当代科技与教育

主编 李桂荣 刘恒 李海田 张存峰

天津科学技术出版社

当代科技与教育

主　编　李桂荣　刘　恒　李海田　张存峰

天津科学技术出版社

《当代科技与教育》编辑委员会

图书在版编目(CIP)数据

当代科技与教育/李桂荣等主编.—天津:天津科学技术出版社,2007
ISBN 978—7—5308—4393—2

Ⅰ.当… Ⅱ.李… Ⅲ.科学教育学—文集 Ⅳ.G42—53

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第124813号

责任编辑:范朝辉　陈　雁
责任印制:白彦生

天津科学技术出版社出版
出版人:胡振泰
天津市西康路35号　邮编300051
电话:(022)23332393(发行部)　23332392(市场部)　27217980(邮购部)
网址:www.tjkjcbs.com.cn
新华书店经销
吴桥金鼎古籍印刷厂印刷

开本889×1194　1/16　印张:17.5　字数:590 000
2007年8月第1版第1次印刷
定价:36.00元

目　录

基于 VaR 的 CVaR 方法及实证分析

德州学院　王金婵　上海财经大学　曹璐璐

摘　要　基于 VaR 方法在解决和处理一些实际情况上的不足，提出 CVaR 的概念即条件风险价值，进而介绍 CVaR 的一些性质及其峰值计算法，讨论 CVaR 的峰值计算法在实际金融生活中的应用，并用一个实例加以分析说明。

关键词　VaR　CVaR 定义及性质　CVaR 峰值计算法

一、CVaR 定义及性质

随着我国金融市场的不断发展，新型金融衍生工具的不断涌现，特别是金融市场即将对外全面开放，金融风险的管理与防范越来越引起人们的重视。从广义上讲，风险可以被定义为"时间结果上的不确定性"。因为我们一般情况下只关注风险可能带来的损失，所以风险的概率可以进一步表述为"由于时间结果的不确定性而带来损失的可能性"。

VaR 定义是"处于风险中的价值"，是指市场正常波动下，某一金融资产或证券组合的最大可能损失。更为确切的是指，在一定的概率水平下（置信度），某一金融资产或证券组合在未来特定的一段时间内的最大可能损失。可表示为：

$$\mathrm{Prob}(\Delta p > \mathrm{VaR}) = 1 - a$$

其中，Δp 为证券组合在持有期 Δt 内的损失；VaR 为置信水平 α 下处于风险中的价值。这里 VaR 以及损失均为正数形式，主要是为了方便。

CVaR 可以定义为"条件风险价值"，是指在一定的时间间隔内具有置信水平为 α 的损失超过 VaR 的期望损失。

定义 1　假设已经知道回报的分布（假设为 F），则：

$$\mathrm{VaR}_t(\alpha) = F^{-1}(\alpha),$$

$$\mathrm{CVaR}_\alpha = E[x \mid x > \mathrm{VaR}_\alpha] = \int_{\mathrm{VaR}\alpha}^{+\infty} x \mathrm{d}F(x \mid x > \mathrm{VaR}_\alpha)\ 。$$

所以，计算 CVaR 的关键在于对回报有一个合适的分布。而这种风险度量只与回报分布的尾部有关，所以找到一个合适的尾部拟合对问题的解决至关重要。

二、CVaR 的峰值计算法

由于尾部风险处理极值事件，因而跟极值的选取很有关系。除了超过某个阈值以上的数据可以作为极值外，对数据进行分组，每组的最大值组成的序列也可以作为极值来处理。并且对这种最大值序列有如下定理。

定理 1　设 (X_n) 是一列独立同分布的随机变量，令 $M_1 = X_1, M_n = \max(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 。若存在常数 $C_n > 0, d_n \in \mathbf{R}$，且存在某个退化的分布函数 H，满足 $\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{L} H$，则 H 属于下列三种标准极值分布之一：

$$\text{Frechet}: \phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0 \\ e^{-x^{-\alpha}}, x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0$$

$$\text{Weibull}: \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ e^{-(-x)^{-\alpha}}, x \geqslant 0 \end{cases} \quad \alpha > 0$$

$$\text{Gumbell}: \Lambda_\alpha(x) = \exp(-e^{-x}), x \in \mathbf{R}$$

这个定理告诉我们不管样本的母体服从什么分布，样本的极值渐进分布总是属于这三种分布之一。

鉴于统计目的，应用以上三个极值分布族并不方便。*Jenkinson* 得出了三个分布族经过适当变换后，这三种类型的分布可用一种分布——广义极值分布（Generalizde Extreme Value Distribution，简称 GEV）来统一表示：

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp(-(1+\xi x)^{\frac{1}{\xi}})\ if \xi \neq 0, 1 + \xi \cdot x > 0 \\ \exp(-e^{-x})\ if \xi = 0 \end{cases}$$

其中 $\xi > 0$ 对应 Frechet 分布，$\xi < 0$ 对应 Weibull 分布，$\xi = 0$ 对应 Gumbel 分布。参数 ξ 称为形状参数，μ 称为位置

参数，$\sigma(>0)$称为尺度参数。

具体说来，就是对样本数据进行分组，取每组的最大值，则最大值序列渐进服从广义极值分布(GEV)，再利用样本数据估计广义极值分布中的参数。最后令一个置信概率p，求出相应的VaR和CVaR值。

下面重点讨论用分块极值渐进法求VaR和CVaR。

假设所取样本时序为$X_1,\cdots,X_n$，把它分成m组，每组有g个样本，且$g\geq 10$，设n除以m的余数为l，若$l=0$最好，若$l\neq 0$，则把前l个样本去掉。为简单起见，令所取的样本中$l=0$，即

$X_1,X_2,\cdots,X_n=X_1,X_2,\cdots,X_g,X_{g+1},X_{g+2},\cdots,X_{2g},\cdots,X_{(m-1)g+1},\cdots,X_{mg}$

接着取每组最大值，$y_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{ig})$，$i=1,2,\cdots,m$。由上述定理知，对$y_1,y_2\cdots,y_m$，则存在常数$c_n>0,d_n\in\mathbf{R}$，使得当$n\to\infty$时，$\frac{y_n-d_n}{c_n}$收敛于GEV分布，由于金融回服常是肥尾的，故通常采用frechet分布，即$\xi>0$时的GEV分布。故对于$y_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{ig})$，存在$\sigma>0,\mu\in\mathbf{R}$，使得

$$H_\xi(\frac{\gamma-\mu}{\sigma})=H_{\xi,\mu,\sigma}(\gamma)=e^{-(1+\xi\frac{\gamma-\mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}},\xi>0,1+\xi\frac{\gamma-\mu}{\sigma}>0$$

其中，ξ,μ,σ分别称为形状参数、位置参数和尺度参数，本文采用极大似然函数估计法来拟合这些参数。则置信度为p的VaR值为从上面的分布函数表达式中用p代替H并解出γ的值：

$$\mathrm{VaR}_p=\frac{\sigma}{\xi}[(1-\log p)^{-\xi}-1]+\mu$$

而相应的CVaR值计算过程为：

分布函数为$H_{\xi,\mu,\sigma}(\gamma)=e^{-(1+\xi\frac{\gamma-\mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}}$

分布密度为$H_{\xi,\mu,\sigma}(\gamma)=\frac{1}{\sigma}(1+\xi\frac{\gamma-\mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}-1}e^{-(1+\xi\frac{\gamma-\mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}}$

$$\begin{aligned}\text{则 }\mathrm{CVaR}_p&=E[y|Y>\mathrm{VaR}_p]\\&=\frac{1}{p(\gamma>\mathrm{VaR}_p)}\int_{\mathrm{VaR}_p}^{\infty}yh_{\xi,\mu,\sigma}(\gamma)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{1-p}\int_{\mathrm{VaR}_p}^{\infty}\frac{\gamma}{\sigma}(1+\xi\frac{\gamma-\mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}-1}e^{-(1+\xi\frac{\gamma-\mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}}\end{aligned}$$

令$v=(1+\xi\frac{\gamma-\mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}\Rightarrow y=\frac{\sigma}{\xi}(v^{-\xi}-1)+\mu\Rightarrow \mathrm{d}y=-\sigma v^{-\xi-1}\mathrm{d}v$

$$\begin{aligned}\mathrm{CVaR}_p&=\frac{\sigma}{1-p}\int_B^0(\frac{1}{\xi}(V^{-\xi}-1)+\frac{\mu}{\sigma})e^{-v}\mathrm{d}v\\&=(\frac{\sigma}{\xi}\int_0^B v^{-\xi}e^{-v}\mathrm{d}v+(\mu-\frac{\sigma}{\xi})\int_0^B e^{-v}\mathrm{d}v)/(1-p)\\&=\frac{(\mu\xi-\sigma)(1-e^{-b})+\sigma\int_0^B v^{-\xi}e^{-v}\mathrm{d}v}{\xi(1-p)}\end{aligned}$$

其中$B=(1+\xi\frac{\mathrm{VaR}_p-\mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}$，且所有的参数用极大似然估计量代替。

三、峰值法评估CVaR的实证分析

以下的实证研究中我们主要讨论峰值法在实际中的应用。因为分析CVaR考虑的是极端的事件，而这样的事件发生的概率很小，在短时间内有可能不会发生，因此要考虑大范围内的数据即大容量的样本。

为了研究中国股市的风险和收益，我们收集沪综合指数的原始数据x_t。其中x_t表示第t天的指数收盘价，每日负对数收益率定义为：$r_t=-\log(x_t/x_{t-1})$，样本数据从2000年1月4日到2006年9月1日，样本容量为1564个。极大似然估计以CVaR的计算都是用Matlab6.5语言编程实现。

我们主要分析这些指数的负对数回报，则正值表示损失，负值表示收益。以下所有图表的数据对象均是负对数回报。

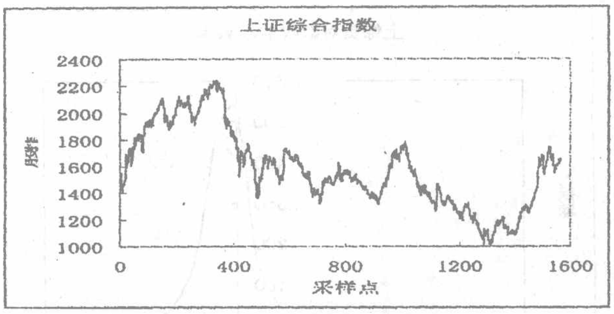


图 1　上证综合指数走势图

1. 样本数据的探索分析

由下图我们可以看出负对数回报的基本波动情况。我们主要分析它的损失，即负对数回报大于零的部分，发现绝大部分数据在 0 到 0.06 之间波动。

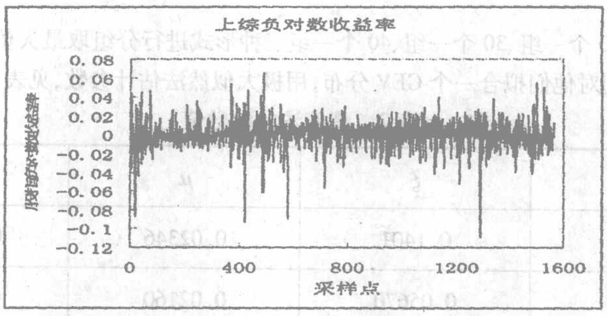


图 2　上证综合指数每日负对数收益率的走势图

表 1　沪综合指数基本统计信息

	最大值	最小值	均值	标准差	峰度	偏度	中位数
沪综合	0.0654	-0.1096	$-9.703E-05$	0.0139	6.9386	-0.7924	-0.0002

表 1 列出了负对数回报的基本统计信息。因为峰度大于 3，只在尾部比正态分布要平坦，即具有肥尾，偏度小于零，说明总体右偏。这些信息也可以从图 3 中看出，它的直方图与它的最佳正态拟合曲线相比，在两尾有明显的肥尾现象，而在峰部有尖峰现象，并且稍微右偏。因此用正态分布拟合该数据是不合适的。

因此，我们可以考虑用广义极值分布来拟合它的尾部。

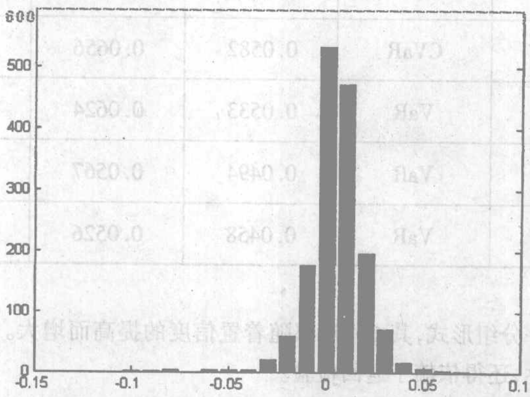


图 3　上证综合指数的负对数收益率的直方图

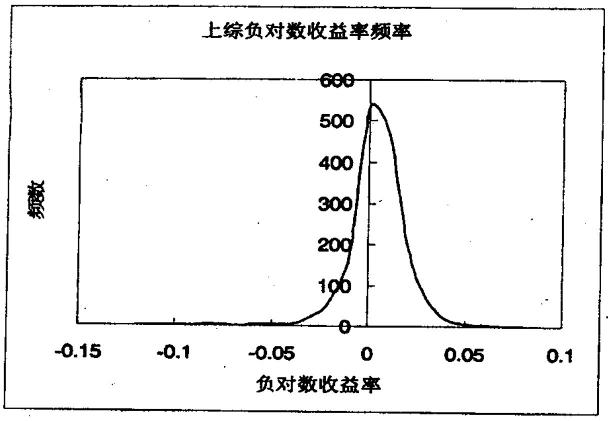


图 4　上证综合指数的负对数收益率的频率图

2. CVaR 的计算

我们将数据分别按每 20 个一组、30 个一组、40 个一组三种形式进行分组取最大值，并将其最大序列分别表示为 FZ20、FZ30、FZ40 。分别对他们拟合一个 GEV 分布，用极大似然法估计参数，见表 2。

表 2　峰值法的参数值

	ξ	μ	δ
FZ40	0.1401	0.02346	0.008108
FZ30	0.05670	0.02160	0.008591
FZ20	0.04222	0.01932	0.008369

估计了参数之后，可以用公式计算出各置信度下的 CVaR 值。其结果见表 3。由表中数据可看出，对同一分组形式，其 CVaR 都随着置信度的提高而增大。

表 3　沪综合指数 CVaR 和 VaR 结果比较

	p	0.95	0.975	0.99
FZ40	CVaR	0.0701	0.0809	0.0965
FZ30	CVaR	0.0627	0.0708	0.0813
FZ20	CVaR	0.0582	0.0656	0.0756
FZ40	VaR	0.0533	0.0624	0.0758
FZ30	VaR	0.0494	0.0567	0.0668
FZ20	VaR	0.0458	0.0526	0.0618

由表中数据可看出，对同一分组形式，其 CVaR 都随着置信度的提高而增大。这些结果至少从表面上看是合理的，但要真正验证它的合理性，还得依赖于返回检验。

对于 CVaR 的返回检验，我们关心的是在分位数的违反事件中，每个违反的数值与 CVaR 的差异有多大，于是我们考虑 CVaR 与违反值的均值的差。这样的检验统计量表示为：$LE=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\text{CVaR}_p$，其中的 $x_i>\text{VaR}_p$，n 表示违反 VaR_p 的个数。

这里我们从表 1 的基本统计数据很容易看出，其结果是合理的。特别是当 $p=0.99$ ，$LE<0$，似乎高估了风险。在极端情况下，这样的结果对我们还是有益的。我们的样本数据是对日负对数收益率的考察，在实际情况中，

为了控制风险和维持股市的稳定以及证券市场的健康发展，我们在实际操作时，对日收益率进行限制，如涨停板的限制。但是，如果我们考察多个时间段的收益率，该方法对于风险的考察还是比较合理的。

参考文献

1 王春峰. 金融市场风险管理[M]. 天津：天津大学出版社，2001

2 （美）菲利普·乔瑞. VaR：风险价值[M]. 北京：中信出版社，2000

3 Rocka feller T, Uryasev S. Optimization of conditional value – at – risk. Journal of Risk, 2000, 2(3): 21 – 41

4 De Haan L, Jansen D W, Koedijk K G, and De Vries, C. G. (1994). Safety first Portfolio selection, Extreme Value Theory and long run asset risks. In J. Galambos, J. Lechner and E. Simiu, eds. Extreme Value Theory and Applications, Kluwer, Dordrecht:471 – 488

关于伴随矩阵的讨论

The Discussion of the Adjoint Matrix

德州学院　吴玉杰

摘　要　本文讨论了 n 阶方阵 A 的伴随矩阵 A^* 的性质，并给出了严格的证明。

关键词　方阵的行列式　矩阵的秩　伴随矩阵　可逆矩阵

Abstract: This paper discusses the properties of the adjoint matrix of a matrix A .

Key words: Square matrix determinant; rank of Matrix; adjoint matrix; invertible matrix

设 A 是数域 F 上的 n 阶方阵，记，$A=(a_{ij})_n$、$A^*=(A_{ij})_n$ 为 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，矩阵 A 的秩记为 $R(A)$。

【引理 1】矩阵 A、B 都是 n 阶方阵，若 $AB=0$，则 $R(A)+R(B)\leqslant n$

证明：设齐次方程组 $AX=0$，它的解空间记为 S，则有 $R(S)=n-R(A)$

因为矩阵 B 的所有列向量都属于 S　所以 $R(B)\leqslant R(S)=n-R(A)$

所以 $R(A)+R(B)\leqslant n$

【引理 2】对于实数域上的 n 阶方阵 A，$f(x)=|A-xE|$，则存在实数 x_0，当 $x>x_0$ 时，有 $f(x)\neq 0$

证明：$f(x)=0$ 是一个 n 次方程，最多有 n 个不同的实根，设这 n 个根为 x_1、x_2、$\cdots$、x_n，取 $x_0=\max(x_1、x_2、\cdots、x_n)$，当 $x>x_0$ 时 $f(x)\neq 0$

【引理 3】数域 F 上两个次数不超过 n 的多项式 $f(x)$、$g(x)$，若有 n 个以上的 x 使得 $f(x)=g(x)$，则对所有的 x 都有 $f(x)=g(x)$

证明：假设 $f(x)\neq g(x)$，则 $L(x)=f(x)-g(x)$ 是次数不超过 n 的多项式，所以 $L(x)=0$ 的根不超过 n 个，因为有 n 个以上的 x 使得 $f(x)=g(x)$，所以 $L(x)=0$ 有 n 个以上的根，这便产生了矛盾，所以 $f(x)=g(x)$

【定理 1】　设 A^* 为 A 的伴随阵，则 $AA^*=A^*A=|A|E$，其中 $|A|$ 是方阵 A 的行列式。

证明：因为 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}0, i\neq j\\ |A|, i=j\end{cases}$　$\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}0, i\neq j\\ |A|, i=j\end{cases}(i、j=1,2,\cdots,n)$

所以 $AA^*=A^*A=|A|E$,

若 $|A|\neq 0$，即 A 可逆

则：$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$

【定理 2】$|A^*|=|A|^{n-1}(n>1)$

证明：如果 A 可逆，由定理 1，$A^*A=|A|E$，得：$|A^*A|=|A^*||A|=|A|^n$，所以 $|A^*|=|A|^{n-1}$

若 A 不可逆，

$A=0$,则 $A^{*}=0$,所以 $|A^{*}|=|A|^{n-1}=0$

若 $A\neq0$,由引理1,$A^{*}A=|A|E=0$, 得 $R(A^{*})+R(A)\leqslant n$

由 $1<R(A)<n$,得:$R(A^{*})<n$, 所以 $|A^{*}|=|A|^{n-1}=0$

综上所述: $|A^{*}|=|A|^{n-1}$

【定理3】设 A、B 是 n 阶方阵,则 $=(AB)^{*}=B^{*}A^{*}$

证明: 由定理1, $(AB)^{*}(AB)=|AB|E$,所以 $(AB)^{*}(AB)\quad B^{*}A^{*}=|AB|\,B^{*}A^{*}=(AB)^{*}|A||B|$,即 $|A||B|(AB)^{*}=|AB|B^{*}A^{*}$

若 A、B 可逆,则有 $(AB)^{*}=B^{*}A^{*}$

若 A、B 不可逆,可得

$|A-xE(B-xE)|[(A-xE)(B-xE)]=|A-xE||B-xE|(B-xE)^{*}(A-xE)^{*}$

由引理3,存在 x_0 使得 $x>x_0$ 时,$A-xE,B-xE$ 可逆,

所以 $[(A-xE)(B-xE)]^{*}=(B-xE)^{*}(A-xE)^{*}$ 对所有的 x 都成立,当 $x=0$ 时,有 $(AB)^{*}=B^{*}A^{*}$ 成立。

综上所述, $(AB)^{*}=B^{*}A^{*}$

【定理4】$(A^{*})^{*}=|A|^{n-2}\cdot A$

证明:由定理1,$A^{*}(A^{*})^{*}=|A^{*}|E=|A|^{n-1}A$

$AA^{*}(A^{*})^{*}=|A|(A^{*})^{*}=|A|^{n-1}A$,即 $|A|(A^{*})^{*}=|A|^{n-1}A$

当 A 可逆时,$(A^{*})^{*}=|A|^{n-2}\cdot A$

当 A 不可逆时, $|A|=0$,若 $n=2$ 时,$A=\begin{Bmatrix}a & b\\ c & d\end{Bmatrix}$,$A^{*}=\begin{Bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{Bmatrix}$, 可知 $(A^{*})^{*}=A$

若 $n>2$ 时, 当 $R(A)=n-1$ 时,$A^{*}A=|A|E=0$, $A^{*}\neq0$,且 $R(A^{*})+R(A)\leqslant n$,所以 $R(A^{*})=1$,则 $(A^{*})^{*}=0$,即 $(A^{*})^{*}=|A|^{n-2}$。当 $R(A)<n-1$ 时, $A^{*}=0$,所以 $(A^{*})^{*}=0$,即 $(A^{*})^{*}=|A|^{n-2}\cdot A$

综上所述,得 $(A^{*})^{*}=|A|^{n-2}\cdot A$,其中 $n=2$ 时,把 $|A|^{n-2}=|A|^{0}=0^{0}=1$ 看待

由此得推论 $|(A^{*})^{*}|=|A|^{n-12}$

【定理5】A 为 n 阶可逆阵,则 $(A^{-1})^{*}=(A^{*})^{-1}$

证明: 由定理3　因为 $A^{*}(A^{-1})^{*}=(A^{-1}A)^{*}=E$,所以 $(A^{-1})^{*}=(A^{*})^{-1}$

【定理6】A 为 n 阶方阵,则 $(A^{*})^{T}=(A^{T})^{*}$

证明: 因为 $(A^{*})^{T}A^{T}(A^{T})^{*}=(AA^{*})^{T}(A^{T})^{*}=|A|(A^{T})^{*}$,

而 $(A^{*})^{T}A^{T}(A^{T})^{*}=(A^{*})^{T}|A^{T}|E=|A|(A^{*})^{T}$

所以 $|A|(A^{*})^{T}=|A|(A^{T})^{*}$

若 A 可逆,则有 $(A^{*})^{T}=(A^{T})^{*}$

若 A 不可逆,由 $|A-xE|((a-xE)^{*}))^{T}=|A-xE|((A-xE)^{T})^{*}$,由引理3,存在 x_0 使得 $x>x_0$ 时,$A-xE$ 可逆

所以 $((a-xE)^{*}))^{T}=((a-xE)^{T}))^{*}$ 对所有的 x 都成立,当 $x=0$ 时,$(A^{*})^{T}=(A^{T})^{*}$ 有成立。

综上所述,对 n 阶方阵 A,总有 $(A^{*})^{T}=(A^{T})^{*}$ 成立。

以上讨论了伴随矩阵的几个性质,从中可以得到,对可逆矩阵成立的命题,对不可逆矩阵也成立的证明的一般方法。

参 考 文 献

1　北京大学数学力学系几何与代数小组编.高等代数

2　扬子胥.高等代数习题解

3　同济大学线性代数

数形结合观点的一些应用

德州学院数学系　高秀娟

数学是以现实世界中的空间形式与数量关系为研究对象,简单地说,数学是研究数、形及其关系的一门科学,

因此,数形结合的观点是研究数学的一个基本观点。深刻理解这一观点,有利于提高学生的数学素养,有利于发展分析问题、解决问题的能力。

解析几何借助于坐标系的建立,将点和数对应起来,将曲线和方程对应起来,这就使数与形结合起来。数形结合使我们有可能通过对数量关系的讨论来研究图形的性质;另一方面也可以利用几何图形直接地反映出函数或方程中的变量之间的关系,有时还能由几何形象提示解决问题的途径。这两方面都很重要,并且不能截然分割。解析几何中,着重的是前者,即"利用数来研究形"。但是掌握利用形来研究数的观点,在研究许多数量关系的时候,能自觉地利用图形来帮助思考,帮助理解,帮助分析,帮助记忆。

以下列举代数、三角、几何中"利用形来研究数"的若干方面,以期引起重视,也有利于学生全面的、牢固地树立数形结合的观点,更好地学好数学。

一、利用图形纠错,印象深刻

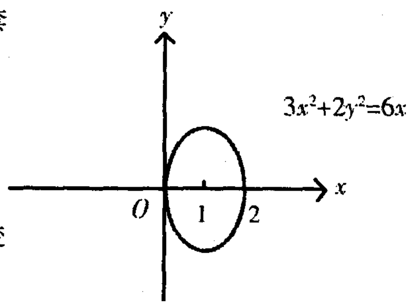
【例1】x、y 为实数,且满足等式 $3x^2+2y^2=6x$, 求 x^2+y^2 的最大值。

解:设 $z=x^2+y^2$, 由 $3x^2+2y^2=6x$, 得 $y^2=-\frac{3}{2}x^2+3x$

则 $z=x^2+y^2=x^2-\frac{3}{2}x^2+3x=-\frac{1}{2}x^2+3x$

所以当 $x=-\frac{3}{2\cdot(-\frac{1}{2})}=3$ 时, z 有最大值$\frac{9}{2}$。

我们说,上述解法之所以错,就是因为它无视本题的约束条件,而死套二次函数 $z=ax^2+bx+c$ 的求极值公式。

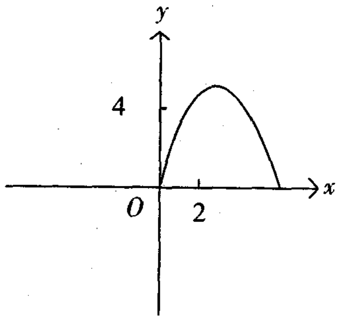


事实上,由 $3x^2+2y^2=6x$,可得:$3(x-1)^2+2y^2=3$

即:$\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{3}{2}}=1$

满足此约束条件的(x,y)是图中椭圆周上的点,由此可知变量 x 的变化范围是$0\leqslant x\leqslant 2$

所以我们的问题是求二次函数 $z=-\frac{1}{2}x^2+3x$ 在有限区间 $0\leqslant x\leqslant 2$ 上的最大值。



由右图可以看出 X 的最大值等于4,而不是等于$\frac{9}{2}$。

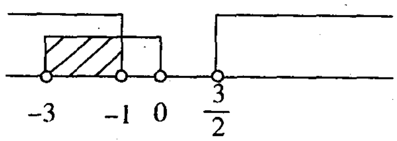
【例2】解不等式组:$\begin{cases} x^2+3x<0 & ① \\ 2x^2-x-3>0 & ② \end{cases}$

解:由式①得解集$\{x|-3<0\}$, 由式②得解集$\{x|x<-1\}\cup\left\{x|x>\frac{3}{2}\right\}$

然后把式①的解集与式②的解集求交集即得$\{x|-3<x<-1\}$为原不等式组的解。

关于解不等式组这一类的问题,无论是一次的,还是二次的,学生都容易出错。利用数轴解这类问题既简便迅速,又不容易出错。

借助数轴,易见图中阴影部分即为原不等式组的解,也可以此来验证用代数法求解过程中的错误。



二、利用图形求解,化繁为简

一题多解是培养学生学习兴趣,发展学生能力的良好途径。许多题目,不仅可以采用代数方法、三角方法,也可以采用几何方法求解。由于几何图形能直观地反映我们所研究的量之间的相互关系,量的许多性质能够明显地从图形上看出来,因此在解题中借助图形帮助思考,常常会收到事半功倍的效果。

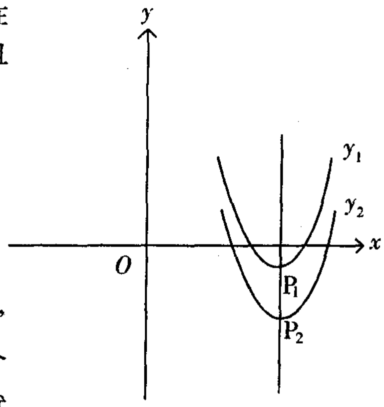
【例3】如果方程 $x^2+2ax+k=0$ 的两实根在方程 $x^2+2ax+(a-4)=0$ 两实根之间,试求 a、k 应满足的关系式。

本题如果用求根公式来解，比较麻烦。如果我们从下面两个函数图像入手考虑，就简单得多。

$y_1=x^2+2ax+k$　　　　　①

$y_2=x^2+2ax+(a-4)$　　　　②

函数①②的图像形状相同，且有相同的对称轴，故第一个方程的二实根在第二个方程的二实根之间的重要条件是：抛物线①的顶点纵坐标不大于0且大于抛物线②的顶点纵坐标。



如图，易解得顶点 $P_1(-a,-a^2+k)$，$P_2(-a,-a^2+a-4)$

故 $-a^2+a-4<-a^2+k\leqslant 0$，　即 $a-4<k\leqslant a^2$

【例4】求1的5次方根。

解：直接套用求复数 n 次方根的公式：

$r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的 n 次方根为$\sqrt[n]{n}(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n})$，(其中 $k=0,1,\cdots,n-1$)，算起来比较麻烦，但是利用复数 n 次方根的几何意义，即这 n 个根均匀地分布在以$\sqrt[n]{r}$原点为圆心、以$\sqrt[n]{n}$为半径的圆周上，借助几何图形来解，就比较简单且不易出错。

我们说的1的5次方根均匀地分布在单位圆上，且利用上述公式，当 $k=0$ 时，得1本身是它的一个根，则每转$\dfrac{2\pi}{5}$，在单位圆周上就找到1的一个5次方根。

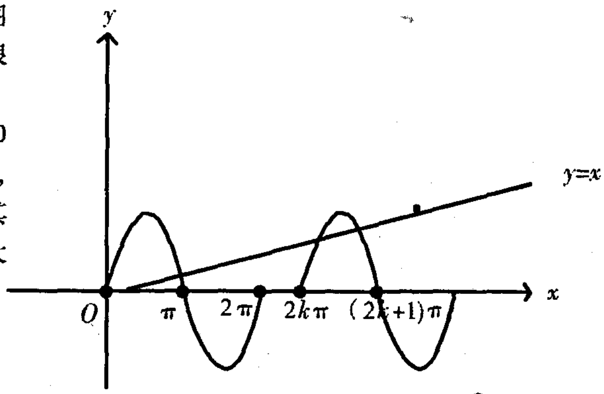
1. $\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$，$\cos\dfrac{4\pi}{5}+i\sin\dfrac{4\pi}{5}$，$\cos\dfrac{6\pi}{5}+i\sin\dfrac{6\pi}{5}$，$\cos\dfrac{8\pi}{5}+i\sin\dfrac{8\pi}{5}$

三、利用几何直观，提供解题思路

【例5】问方程 $80\sin x=x$ 有多少个实根？

分析：要研究方程 $80\sin x=x$ 有多少个实根，只需考虑函数 $y=80\sin x$ 与 $y=x$ 的图像有多少个交点。

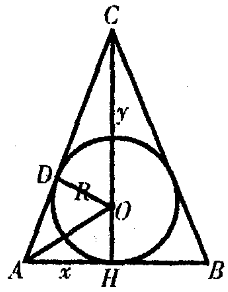
由于这两个函数图像都关于原点对称，且 $y=x$ 的图像只在第一和第三象限，故归结为考察它们在第一象限有多少个交点。



画出 $y=x$ 与 $y=80\sin x$ 的草图。可以看出，当 $x>0$ 时，这两个图像仅在 $(0,\pi)$，$(2\pi,3\pi)$，$(4\pi,5\pi)$，…，$(2k\pi,(2k+1)\pi)$ 的每一个区间中各有两个交点，在其他区间均无交点。使这两个函数图像有两个交点的最大整数 k，可由下式决定：

$2k\pi+\dfrac{\pi}{2}<80\sin(2k\pi+\dfrac{\pi}{2})<2(k+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}$

由上式解得 $k=12$，故在第一象限 $y=80\sin x$ 与 $y=x$ 有26个交点，而在整个区间有：$26\times2-1=51$ 个交点，即方程 $80\sin x=x$ 有51个实根。



【例6】在半径为 R 的球的所有外切圆锥中，求全面积最小的一个。

解：设 x 是圆锥的底面圆半径，y 是它的高，S 是它的全面积，则

$S=\pi x^2+\pi x\cdot AC=\pi x^2+\pi x(CD+x)$

由 $\triangle CAH\backsim\triangle COD$ 得 $CD=\dfrac{2R^2x}{x^2-R^2}$　所以 $S=\pi x(x+x+\dfrac{2R^2x}{x^2-R^2})=\dfrac{2\pi x^4}{x^2-R^2}$

为了确定 S 的最小值，可求它的倒数的最大值，从上式得

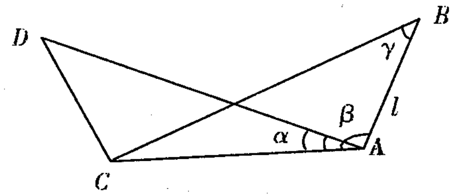
$\dfrac{2\pi}{S}=\dfrac{x^2-R^2}{x^4}=\dfrac{1}{x^2}(1-\dfrac{R^2}{x^2})$

两边乘以常数 R^2 得：$\dfrac{2\pi R^2}{S}=\dfrac{R^2}{x^2}(1-\dfrac{R^2}{x^2})$

由于和$\dfrac{R^2}{x^2}+(1-\dfrac{R^2}{x^2})=1$ 是定值，所以积为$\dfrac{R^2}{x^2}(1-\dfrac{R^2}{x^2})$，当$\dfrac{R^2}{x^2}=1-\dfrac{R^2}{x^2}$时取最大值，由此，当 $x=\sqrt{2}R$ 时，球的外

切圆锥有最小全面积 $S=\frac{2\pi\cdot 4R^4}{R^2}=8\ \pi R^2$

四、利用数形结合观点，揭露解题方法的实质



【例7】测量平地上的塔 CD 的高。

我们可以在平地上取定两点 A、B，量出 AB 间的距离 l，另外再测出如下三个角：

$\angle CAD=\alpha,\quad \angle CAB=\beta,\quad \angle ABC=\gamma$

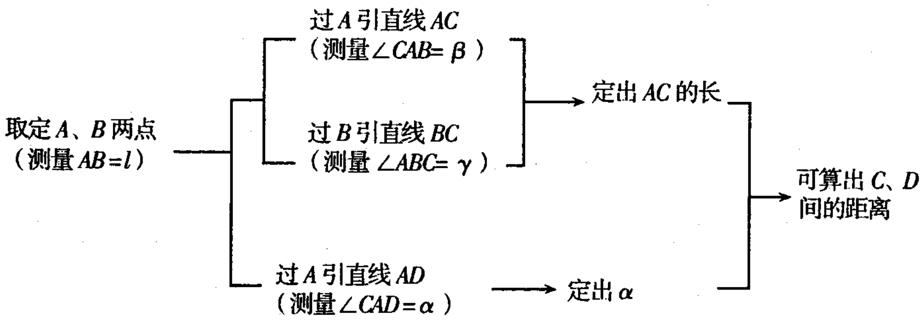
当我们测得(l,α,β,γ)的一组数据后，便可用解三角形的办法算出 CD 的长。

上述测量办法是怎样想出来的？这就涉及测量方法的实质。下面我们从数形结合的观点探讨一下这个问题。

根据数形结合的观点，我们可以确立如下的一个信念：如果在图形上我们能够通过某些量把两点间的位置确定下来，那么我们可以用有关的量把这两个点的距离表示出来. 简单地说就是："只要形定，测量就定".

现在我们做的问题是，如何才能确定 C、D 两点的位置。

由于"直角三角形中，只要能知道一个角，一条边，就能唯一确定三角形"，所以我们可以按如下的思路来确定 C、D 两点的位置，从而算出 CD 的长。



上述测量方法的实质可概括为：基本思想是"形定量就定"，基本工具是"一边、一角定直角三角形"。

五、运用数形结合的观点来提出问题，发现问题

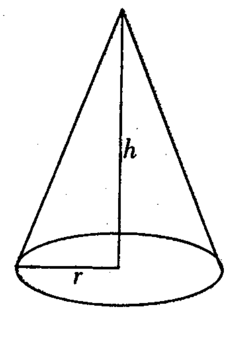
学生在教师的指导下，模拟科学家发现定理和证明定理的过程，通过自己的观察、分析、归纳、概括，亲自去探索应得的结论或规律，这种"发现式"教学法是培养创造性思维的一种学习方法。发现问题和提出问题是发现式教学中的第一个环节。下面我们举例说明，如何应用数形结合的观点来提出问题，创造"发现"的诱人情景，以激发学生的探索精神。

【例8】（圆锥体积公式的提出），从几何直观我们不难想象：已知底面半径 r，以及圆锥的高 h，就完全确定了圆锥的形状，于是也就完全确定了圆锥的体积 V。

现在我们来研究：已知 $\left.\begin{cases}\text{底面半径 } r\\ \text{高 } h\end{cases}\right\}\Rightarrow$ 圆锥体积 $V=?$

比如说圆锥底面半径为 3，高为 2，则圆锥的体积

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\times 3.14\times 3^2\times 2=18.84$$



【例9】（点到直线距离公式的提出）平面上给定直线 l，以及直线 l 外的一点 A，那么点 A 到直线 l 的距离就完全确定了。这意味着：给定直线 l 的方程及给定点 A 的坐标，那么就可以算出点 A 到 l 的距离 d。现在就来研究：

给定—$\left.\begin{cases} l\text{ 方程}:ax+by+c=0\\ A\text{ 点坐标}(x_A,y_A)\end{cases}\right\}\Rightarrow d=?$

如已知直线方程为 $3x+4y+1=0$，则点$(1,2)$到该直线的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+c|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|3\cdot 1+4\cdot 2+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{12}{5}$$

由以上可以更清楚地看到几何图形在解题中的应用多么重要，因此要好好掌握这一观点，运用这一观点解题。

"数据结构"教学探讨

德州学院数学系　赵学杰

摘　要　"数据结构"课程是一门重要的专业基础课程，该课程的学习效果直接影响学生对计算机专业课程的学习能力和学习兴趣。本文从教学实践出发，结合学生的特点，从数据抽象能力、上机实验能力的培养等几个方面入手，对本课程的教学方法进行了一些探讨。

关键词　数据结构　数据抽象　教学方法　CAI

Abstract: Data structure is an important course of computer field. The effect of study influences the students' learing ability and interest of computer directly. According the practice of teaching, some teaching methods are introduced to improve the quality of teaching and learning.

Keywords: data structure; data abstract; teaching method; CAI

一、引言

《数据结构》是计算机专业的核心基础课程，同时也是信息管理、通信、电信等其他相关理工专业的重要选修课程。作为一门专业技术基础课程，重点是培养学生的数据抽象能力。在多年"数据结构"教学实践中，常常遇到这样的现象："学生上课能看懂听懂，课下自己独立解决问题时却不知如何下手分析，更谈不上找到合适的数据结构"，在"数据结构"初学者中普遍存在这样的问题，常常让人困惑："课堂上教师讲得明明白白，学生也听得清清楚楚，而实际应用时就稀里糊涂？"，也常令人反思："难道是教师讲得不清楚，还是学生学得不认真？"，其实都不是。虽然教师对知识的理解和表达能力以及学生学习努力的程度是影响学生学习效果的重要因素，但并不是主要原因。什么才是问题的关键所在呢？思考！在"数据结构"课堂教学中，如何激发学生思考，使学生在学习过程中进行深入、全面、独特的思考，对"数据结构"这门课"饶有兴趣"；如何让学生学会观察思考，锻炼创新思维，这是我们一直要面对、不得不思考的问题。本文对这些问题进行了探讨，并提出了一些具体的措施，以期提高课程的教学质量。

二、加强数据抽象能力的培养

《数据结构》课程教学的主要目的之一是培养学生的数据抽象能力，现有的《数据结构》教材无论是 C++ 语言版还是 JAVA 版的，都是以基本类的思想对数据类型进行描述，这样的描述形式对抽象数据类型的定义简明清晰，有利于培养学生良好的编程习惯。抽象数据类型是指一个数学模型以及定义在该模型上的一组操作。在教学过程中，我们发现学生对于抽象数据类型的理解往往局限于前者，而忽略了后者。对于数据类型的数学模型以及数学特征较容易理解，而对于数据模型的操作则容易理解成是一个独立的部分，出现这种现象的主要原因是面向对象知识的欠缺。在教学中应注意从开始就强调数据的抽象性，强调数据类型是由数学模型及操作两部分组成的。我们从学生熟悉的标准数据类型入手介绍，说明标准数据类型也一样由两部分构成，只不过标准数据类型的操作大部分无需自己编程实现罢了。

三、加强实践环节，实施教学方法多样化

《数据结构》课程教学的另一个目的是进行程序设计训练，使学生的编程能力在学习过程中得到提高，培养良好的编程习惯。实验是《数据结构》课程的一个重要环节，同时也是大部分学生比较薄弱的一个环节。由于《数据结构》中稍微复杂一些的算法设计常常涉及到多种技术和方法，例如 链表、递归技术等，但选修课程中所介绍的相关专业知识又不多，同时，隐含于教材中各种算法的设计技巧丰富、形式多样，因而学生在学习过程中常常觉得教科书中的内容与具体的算法设计题相距甚远，无从下手。要使学生真正学好、学懂《数据结构》，除了在课堂上要采用行之有效的教学方法外（诸如案例法、讨论法等），还应加强实践环节。可以通过三种实践方式：一是做习题，二是上机实践，三是综合实习。习题主要限于章节的内容，使学生加深对各章节主要的理论、概念、方法、结构等的理解。由于专业课程的理论与技术往往表现出较强的综合性、前沿性、探索性，是发展中的科学，通过课程设计让学生撰写自己的小论文或总结报告，使学生时刻跟踪本课程的最新动态。上机实践则不仅能进一步提高