高等线性代数

Steven Roman 著
陈晓玮　陈辉 译

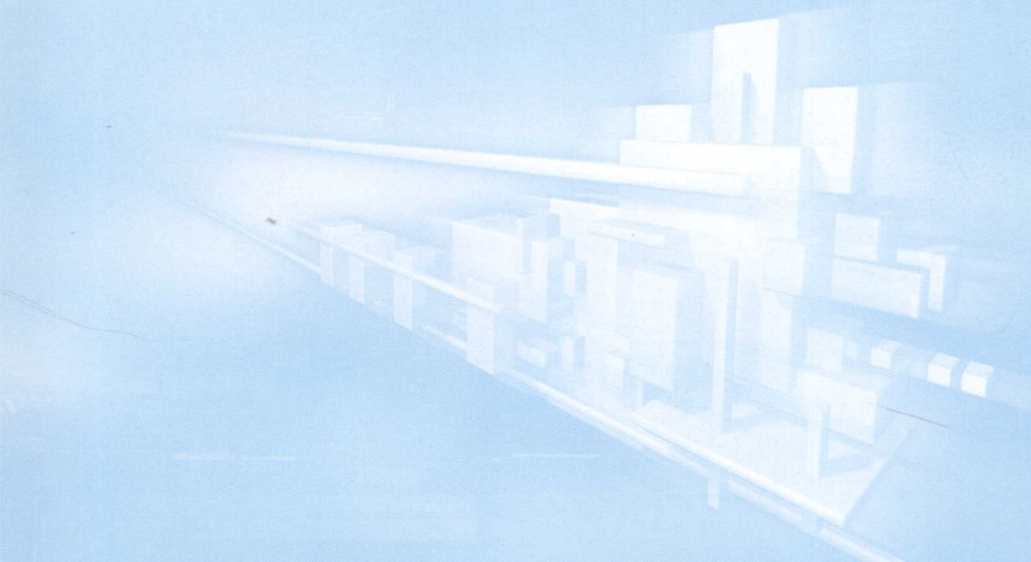
黑龙江人民出版社

高等线性代数

高等线性代数

Steven Roman 著

陈晓玮　陈辉 译



黑龙江人民出版社

高等线性代数

Steven Roman 著

陈晓玮 陈 辉 译

黑龙江人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等线性代数/陈晓玮,陈辉著. —哈尔滨:黑龙江人民出版社,2006.12
ISBN 7-207-07199-X

Ⅰ.高…　Ⅱ.①陈…　②陈…　Ⅲ.线性代数
Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 140163 号

责任编辑:刘桂华
装帧设计:陈雪峰

高等线性代数

Gaodengxian Xing Daishu

Steven Roman 著

陈晓玮　陈　辉　译

出版发行　黑龙江人民出版社
通讯地址　哈尔滨市南岗区宣庆小区1号楼(150008)
网　　址　www. longpress. com E-mail hljrmcbs@ yeah. net
印　　刷　哈尔滨禹嘉商务印刷有限公司
开　　本　880×1230 毫米　1/32
字　　数　300 千字
印　　数　2 000
版　　次　2006 年 12 月第 1 版　2006 年 12 月第 1 次印刷
书　　号　ISNB 7-207-07199-X/O·13

定　　价　28.00 元
(如发现本书有印刷质量问题,印刷厂负责调换)

序　　言

本书对线性代数作了比较详尽的介绍，它适用于大学高年级的学生和研究生．读者只需对矩阵和行列式有一些基本的了解即可．由于本书中我们只对向量空间和线性变换的基本知识只是略微谈一下，所以学一下线性代数的基本知识（即使只有大学二年级的水平），并有一定的数学背景还是需要的．

第 0 章概括介绍了后面将要用到的近世代数的一些主要内容．这一章可以浏览一下，主要是阅读本书的预备知识．第 1——3 章介绍了向量空间和线性变换的一些基本性质．

第 4 章讨论了模，并且比较了模和向量空间的不同性质．第 5 章又进一步讨论了模，主要证明了一个自由模的任意两个基都有相同的基数，与此同时引入了诺特模．教师可以简单地提一下这一章，略去其所有证明．第 6 章介绍了主理想整环上的模论，证明了有限生成模的循环分解定理．这一定理对于证明第 7、8 章讨论的有限维线性算子的结构定理是至关重要的．

第 9 章分别介绍了实、复内积空间，为了使读者能尽快进入第 10 章正规算子的有限维谱定理，这一章把重点放在有限维空间上．当然，我们也会在方便时尽可能多地叙述一下任意维向量空间上的结论．

本书第二部分除了第 13 章要以第 12 章为基础外，其余各章都是

由各自相对独立的主题所组成的，第 11 章讨论了度量向量空间，描述了不同基域上辛几何和正交几何的结构．第 12 章对度量空间作了比较详细的描述，这就和 13 章中基本希尔伯特空间理论的拓扑问题统一了起来．至于每一度量空间都可嵌入其完备化这一较冗长的证明我们就不证了．

第 14 章简要介绍了一下张量积．为了发掘张量乘积的泛性质，而不用涉及太多的范畴论方面的术语，我们给出了自由向量空间，并把它和大家所熟悉的直和作统一的处理．第 15 章讨论了仿射几何，在这里儿强调的是代数而不是几何概念．

最后一章介绍了一个相对较新的概念——哑运算，这是一种代数理论，用来研究应用数学中几种起着重要作用的多项式函数．我们只对这一概念作简单介绍——侧重于其代数本身而不是应用方面．这是第一次把该概念引入正式的教科书中．

最后，除非另有说明，本书中所略去的证明，读者可以自行证明．

Steven Roman　　　　Irvine，Ca

目　录

第一部分　基本线性代数

第二部分　专　　题

第 0 章　预备知识

本章中，我们将简要地讨论我们所关心的几个概念，以便为后几章的学习作铺垫．所以，这一章只需要很快地浏览一下，了解其大意就可以了．

内容提要：

预备知识． 矩阵、行列式、多项式、函数、等价关系、佐恩引理、基数性．

代数结构． 群、环、整环、理想与主理想整环、素元、域、环的特征．

矩阵

如果 F 是一个域，令$\mathcal{M}_{m,n}(\mathrm{F})$表示矩阵的元在 F 中的全体 $m\times n$ 矩阵所成的集合，当不引起歧义时，我们就用$\mathcal{M}_{m,n}$，或$\mathcal{M}$来表示这一集合．集合$\mathcal{M}_{n,n}(\mathrm{F})$就用$\mathcal{M}_{n}(\mathrm{F})$或$\mathcal{M}_{n}$表示．

我们认为读者已经对矩阵的性质，包括矩阵的加法和乘法运算有一定的了解，如果 $\mathrm{A}\in\mathcal{M}$，A 的(i,j)元用 $\mathrm{A}_{i,j}$ 表示．$n\times n$ 的单位阵用 I_n 表示．

定义　$\mathrm{A}\in\mathcal{M}_{m,n}$ 的转置 A^{T} 是由 $(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})_{i,j}=\mathrm{A}_{j,i}$ 定义的矩阵．如果 $\mathrm{A}=\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$，则称矩阵 A 是**对称的**．如果 $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}=-\mathrm{A}$，则称 A 是**斜对称的**．　□

定理 0.1　(转置矩阵的性质)　令 A，$\mathrm{B}\in\mathcal{M}$，则

1)　$(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\mathrm{A}$．
2)　$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{\mathrm{T}}=\mathrm{A}^{\mathrm{T}}+\mathrm{B}^{\mathrm{T}}$．
3)　对于 $\forall\, r\in\mathrm{F}$，$(r\mathrm{A})^{\mathrm{T}}=r\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$．
4)　如果乘积 AB 是有意义的，那么$(\mathrm{AB})^{\mathrm{T}}=\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$．
5)　$\det(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})=\det\mathrm{A}$．　■

矩阵共有三种行初等变换．第一种变换是用 F 中的一非零数乘以 A 的一行．第二种是交换 A 的两行．第三种是把 A 的某一行的数量倍数加到其另一行上．

如果我们对单位阵 I_n 进行第 $k(=1,2$ 或 $3)$种初等变换，得出的矩阵称为一个第 k 种**初等矩阵**. 不难看出，初等矩阵都是可逆的.

如果 A 是 $m\times n$ 矩阵，那么为了对 A 进行行初等变换，同样地，我们可以对单位阵 I_m 进行同一变换，得到初等矩阵 E，然后取乘积 EA. 注，E 必须左乘以 A，因为右乘起着对矩阵*列*变换的作用.

定义 矩阵 R 称为是**行既约阶梯型**，如果

1) 所有元都是 0 的行在矩阵底部.

2) 在任意非零行中，第一个非零元是 1. 这一元叫做**首项元**.

3) 对于任意两相邻行，下一行的首项元在上一行首项元的右边.

4) 对于任意有首项元的列，它的其余位置均为 0. □

以上是**行既约阶梯型**的一些基本要求.

定理 0.2 $\mathcal{M}_{m,n}$ 中两个矩阵 A、B 称为是**行等价的**，如果通过一系列的行初等变换，矩阵 A 可以变换为矩阵 B. 记作 A～B.

1) 行简化是一种等价关系. 即

a) A～A.

b) A～B $\Rightarrow$ B～A.

c) A～B，B～C $\Rightarrow$ A～C.

2) 任意矩阵 A 唯一地行等价于一个在行简化梯型中的矩阵 R. 矩阵 R 就叫做 A 的**行既约阶梯型**. 而且，

$$A = E_1\cdots E_k R.$$

其中 E_i 是把 A 简化到行既约阶梯型的初等矩阵.

3) A 是可逆的，当且仅当 R 是一个单位阵. 因此，一个矩阵是可逆的，当且仅当它是几个初等矩阵的乘积. ■

行列式

我们假定读者已经熟知行列式的以下基本性质.

定理 0.3 令 A 是 F 上一 $n\times n$ 矩阵，那么 det(A)是 F 的一个元. 且

1) 对于 $\forall$ B $\in \mathcal{M}_n$(B)，det(AB) = det(A)det(B).

2) A 是非奇异矩阵(可逆矩阵)，当且仅当 det(A)$\neq$0.

3) 上三角阵或下三角阵的行列式是它主对角线上元素之积.

4) 令 $A(i,j)$表示把矩阵 A 去掉第 i 行、第 j 列后得到的矩阵. A 的伴随矩阵 **adj(A)**是由$(adj(A))_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(A(i,j))$所定义的矩阵.

如果 A 是可逆的，那么

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, adj(A). \qquad ■$$

多项式

如果 F 是一域，那么 F[x]表示系数在 F 上，含有变量 x 的全体多项式所成的集合. 如果 $p(x)\in F[x]$，我们就说 $p(x)$是 F 上一个多项式. 若

$$p(x) = a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

是一个多项式，且 $a_n\neq 0$，那么 a_n 称为 $p(x)$的**首项系数**，且 $p(x)$的**次数** $\deg p(x)$为 n. 我们规定零多项式的次数为$-\infty$. 一个多项式是**首一多项式**，如果它的首项系数为 1.

定理 0.4 (辗转相除法) 令 $f(x)\in F[x]$，$g(x)\in F[x]$，且 $\deg g(x)>0$. 那么在 F[x]中存在唯一的多项式 $q(x)$和 $r(x)$，使得

$$f(x) = q(x)g(x)+ r(x),$$

其中 $r(x) = 0$ 或 $0\leqslant\deg r(x)<\deg g(x)$. ■

如果 $p(x)$整除 $q(x)$，即，如果存在多项式 $f(x)$，使得 $q(x) = f(x)p(x)$，那么我们记作 $p(x)\mid q(x)$.

定理 0.5 令 $f(x), g(x)$是 F 上的多项式. $f(x)$与 $g(x)$的**最大公因式**，记作 $\gcd(f(x),g(x))$，是 F 上唯一的首一多项式 $p(x)$，其中

1) $p(x)\mid f(x)$且 $p(x)\mid g(x)$.

2) 如果 $r(x)\mid f(x)$且 $r(x)\mid g(x)$，那么 $r(x)\mid p(x)$.

而且，F 上存在多项式 $a(x), b(x)$，使得

$$\gcd(f(x),g(x)) = a(x)f(x)+b(x)g(x)\ . \qquad ■$$

定义 令 $f(x)$，$g(x)$是 F 上的多项式，如果 $\gcd(f(x),g(x)) = 1$，我们就说 $f(x)$和 $g(x)$**互素**. 特别地，$f(x)$和 $g(x)$互素，当且仅当存在 F 上的多项式 $a(x), b(x)$，使得 $a(x)f(x)+b(x)g(x) = 1$. □

定义 非常数多项式 $f(x)\in F[x]$是**不可约的**，如果 $f(x) = p(x)q(x)$，

那么 $p(x)$ 或 $q(x)$必为常数. □

下面两个定理说明不可约多项式表现出类似于素数特性的观点.

定理 0.6 如果$f(x)$不可约，且$f(x)\mid p(x)q(x)$，那么$f(x)\mid p(x)$或$f(x)\mid q(x)$. ■

定理 0.7 $F[x]$上每一个非常数多项式都可以分解为不可约多项式的乘积. 而且，这个分解式是唯一的，如果不计因子的次序，及因子的数量倍的差异. ■

函数

为了规定记号，必须稍微讨论一下函数.

定义 令f: $S\to T$ 是集合 S 到集合 T 的一个函数(映射).

1) f的**定义域**是集合 S.

2) f的**象**或**值域**是集合 $im(f)=\{f(s)\mid s\in F\}$.

3) f是**单射的**(一对一的)，或一个**单射**，如果 $x\neq y\to f(x)\neq f(y)$.

4) f是**满射的**(映到 T 上的)，或一个**满射**，如果 $im(f)=T$.

5) f是**双射的**，或一个**双射**，如果f既是单射又是满射. □

若f: $S\to T$ 是单射，那么它的逆 f^{1}: $im(f)\to S$ 存在且是唯一确定的. 可以方便地把f: $S\to T$ 应用到 S 和 T 的子集上. 特别地，如果 $X\subset S$，那么规定 $f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$，如果 $Y\subset T$，规定 $f^{-1}(Y)=\{s\in S\mid f(s)\in Y\}$. 注，即使$f$不是单射，后者也是可以定义的.

如果 $X\subset S$，那么f: $S\to T$ 的**限制**是函数$f|_X$: $X\to T$. 显然，单射的限制是单射.

等价关系

等价关系这一概念在矩阵和线性变换的研究中起着重要作用.

定义 令 S 是一非空集合. S 上的二元关系 $\sim$ 叫做 S 上的一个**等价关系**，如果它满足以下条件.

1) (**自反性**) 对于$\forall a\in S$，$a\sim a$.

2) (**对称性**) 对于$\forall a,b\in S$， $a\sim b \Rightarrow b\sim a$.

3) (**传递性**) 对于$\forall a,b,c\in S$，$a\sim b$，$b\sim c \Rightarrow a\sim c$. □

定义 令 $\sim$ 是S上一个等价关系．对于 $a\in$S，集合

$$[a]=\{b\in \mathrm{S} \mid b\sim a\}$$叫做 a 的**等价类**． □

定理 0.8 令 $\sim$ 是S上一个等价关系．那么

1) $b\in[a] \Leftrightarrow a\in[b] \Leftrightarrow [a]=[b]$.

2) 对于 $\forall\, a,b\in$S，我们有 $[a]=[b]$ 或 $[a]\cap[b]=\varnothing$． ■

定义 令S是一非空集．S的**划分**是S的*非空*子集所成的集合 $\{\mathrm{A}_1,\cdots,\mathrm{A}_n\}$，叫做**块**，使得

1) 对于 $\forall\, i,j$，$\mathrm{A}_i\cap \mathrm{A}_j=\varnothing$．

2) $\mathrm{S}=\mathrm{A}_1\cup\cdots\cup \mathrm{A}_n$. □

以下定理使等价关系的概念更直观．

定理 0.9 1) 令 $\sim$ 是S上一等价关系，那么关于 $\sim$ 的互异等价类所成集合是S的一个划分的块．

2) 反之，如果$\mathcal{P}$是S的一个划分，由 $a\sim b \Leftrightarrow a, b$ 在$\mathcal{P}$的同一个块中定义的二元关系 $\sim$ 是S上的一个等价关系，其等价类是$\mathcal{P}$的块．这就在S的等价关系和S的划分之间建立了一一对应． ■

等价关系中最重要的问题是找到一种有效的方法，以此来确定两个元素是否等价．但在多数情况下，定义本身并不能为等价关系提供一种有效的验证方法，因此，讨论以下概念是必要的．

定义 令 $\sim$ 是S上一个等价关系．函数 f: S→T，其中T是任意集合，叫做 $\sim$ 的**不变函数**，如果 $a\sim b \Rightarrow f(a)=f(b)$.
函数 f: S→T是一个**完全不变函数**，如果 $a\sim b \Leftrightarrow f(a)=f(b)$.
不变量所成集合 $f_1,\cdots,f_k$ 叫做**完全不变量系**，如果

$$a\sim b \Leftrightarrow \text{对于}\ \forall\, i=1,\cdots,n,\ f_i(a)=f_i(b).$$ □

定义 令 $\sim$ 是S上一个等价关系．子集 $\mathrm{C}\subset\mathrm{S}$ 叫做 $\sim$ 的**典范型所成的集合**，如果对于 $\forall\, s\in$S，*恰*有一个 $c\in$C，使得 $c\sim s$． □

例 0.1 在F[x]上定义二元关系 $\sim$ 如下：$p(x)\sim q(x)$，当且仅当存在一个非零常数 $a\in$F，使得 $p(x)=aq(x)$．不难看出，这是一种等价关系．同样地，每一多项式的次数是一个不变函数，因为

$$p(x)\sim q(x) \Rightarrow \deg(p(x))=\deg(q(x)).$$

然而，它并不是一个完全不变函数，因为存在次数相同但不等价的多

项式. 全体首一多项式所成集合就是这种等价关系的典范型的集合. □

例 0.2 我们已经讨论了在$\mathcal{M}_{m,n}(\mathrm{F})$上，行等价是一种等价关系. 而且，行既约阶梯型矩阵所成的子集是行等价的典范型所成的集合，因为每个矩阵都行等价于行既约阶梯型中唯一的一个矩阵. □

例 0.3 两个矩阵 A，B$\in\mathcal{M}_n(\mathrm{F})$是行等价矩阵，当且仅当存在一个可逆矩阵 P，使得 A = PB. 同样，A 和 B 是列等价矩阵(即，利用列初等变换，A 能约化为 B)，当且仅当存在一个可逆矩阵 Q，使得 A = BQ.

两个矩阵 A，B 称作**等价矩阵**，如果存在可逆矩阵 P，Q，使得

$$\mathrm{A}=\mathrm{PBQ}.$$

另一种定义等价矩阵的方法是，A，B 是等价矩阵，如果进行一系列行和/或列初等变换，A 能约化为 B. (在这里，“等价的”这一术语的使用是不适当的，因为它可以应用到所有的等价关系上——不只这一种. 然而，这个术语已经被采用了，所以我们继续沿用它.)不难看出，既是行既约阶梯型，又是列既约阶梯型的方阵 R 必有形式

$$\mathrm{J}_k=\begin{bmatrix}1 & 0 & & \cdots & & 0\\ 0 & \ddots & & \cdots & & 0\\ & & 1 & & & \\ \vdots & & & 0 & & \vdots\\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

它除了主对角线外，其余位置=0. 在主对角线上，有 k 个 1，n-k 个 0.

在$\mathcal{M}_n$中，每个矩阵 A 正好等价于一形如 J_k 的矩阵，因此，这些矩阵所成的集合是等价的典范型所成的集合. 而且，由$f(\mathrm{A})=k$ 定义的函数f是等价关系的完全不变函数，且 A$\sim\mathrm{J}_k$. 这请读者自行证明.

由于 J_k 的秩是 k，而且无论是进行行或列的变换，都不会改变它的秩，从而推出 A 的秩也是 k. 因此，秩是等价关系的完全不变量. □

例 0.4 两个矩阵 A,B$\in\mathcal{M}_n(\mathrm{F})$称作**相似矩阵**，如果存在一个可逆

矩阵 P，使得 $A = PBP^{-1}$.

不难看出，相似关系是$\mathcal{M}_n$上的一种等价关系．正如我们将要学到的，两个矩阵相似，当且仅当在一 n 维向量空间 V 中，它们表示同样的线性算子．因此，对于线性算子的结构的研究来说，相似关系是极其重要的．本书的主要目标之一就是要为相似关系建立典范型．

行列式函数和迹函数是相似关系的不变函数．这留给读者自行证明．但是，一般来说，这两个不变函数并不构成一个不变函数完全系．□

例 0.5 两个矩阵 $A,B\in\mathcal{M}_n(F)$称作**相合矩阵**，如果存在一个可逆矩阵 P，使得 $A = PBP^{T}$.

其中 P^{T} 是 P 的转置．不难看出，这一关系是一种等价关系．我们将尽力去找出相合的典范型．对于某个基域 F(比如 $\mathbb{R}$， $\mathbb{C}$ 或有限域)，这还是相对容易做到的，但对于其他基域来说(比如 $\mathbb{Q}$)，就极其困难．□

佐恩引理

为了说明任意向量空间都存在一个基，我们需要用到一个称为佐恩引理的结论．为了叙述这个引理，我们需要给出几个预备性的定义．

定义 **偏序集**是在非空集合 P 上定义的一个偏序．这里，**偏序**是一种二元关系，记作 $\leqslant$，读作“小于或等于”，它有以下性质．

1) (自反性) 对于$\forall a\in P$，$a \leqslant a$.

2) (反称性) 对于$\forall a,b\in P$， $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant a$ 则 $a=b$.

3) (传递性) 对于$\forall a,b,c\in P$，$a \leqslant b$ 且 $b \leqslant c$ 则 $a \leqslant c$. □

定义 如果 P 是一个偏序集，$m\in P$ 有性质：$m\leqslant p$ 蕴含着 $m=p$，那么 m 叫做 P 的一个**极大元**． □

定义 令 P 为一个偏序集，且令 $a,b\in P$．如果$\exists u\in P$，它有性质

1) $a \leqslant u$，$b \leqslant u$，且

2) 若 $a \leqslant x$，$b \leqslant x$，则 $u \leqslant x$，

那么我们就说 u 是 a 和 b 的一个**上确界**，记作 $u=\mathrm{lub}\{a,b\}$．如果 $\exists l\in P$，有性质

3) $l \leqslant a$，$l \leqslant b$，且

4) 若 $x \leqslant a$，$x \leqslant b$，则 $x \leqslant l$，

那么我们就说 l 是 a 和 b 的一个**下确界**，记作 $l = \mathrm{glb}\{a,b\}$． □

注，在偏序集中，可能存在并不是所有元素都是可比较的情形．换句话说，可能会存在 x，$y \in \mathrm{P}$ 具有性质：x 不小于等于 y 且 y 不小于等于 x．其中每一对元素都是可比较的偏序集叫做**全序集**，或**线性序集**．偏序集 P 的任意全序子集叫做 P 的一条**链**．

令 S 是偏序集 P 的一个子集．如果对于 $\forall s \in \mathrm{S}$，$u \in \mathrm{P}$，都有 $s \leqslant u$，我们就说 u 是 S 的上界．

例 0.6 1) 具有一般二元关系 $\leqslant$ 的实数集 $\mathbb{R}$ 是一个偏序集．它也是一个全序集．它没有极大元．

2) 自然数集 $\mathbb{N}$ 在整除这一二元关系下是一个偏序集．通常记作 $n \mid m$，表示 n 整除 m．如果 $\mathbb{N}$ 的子集 S 由所有 2 的幂组成，那么 S 是 $\mathbb{N}$ 的一个全序子集．即，它是 $\mathbb{N}$ 的一条链．在“|”下，集合 $\mathrm{P} = \{2,4,8,3,9,27\}$ 是一个偏序集．它有两个极大元，即 8 和 27．

3) 令 S 是任意集合，且令 $\mathcal{P}(\mathrm{S})$ 是 S 的幂集，即 S 的所有子集所成的集合．那么，$\mathcal{P}(\mathrm{S})$，在包含 $\subseteq$ 这一二元关系下，是一个偏序集．□

现在，我们就可以来陈述佐恩引理了．

定理 0.10 **(佐恩引理)** 令 P 是一个偏序集，P 中每一条链都有一上界．那么 P 就有一个极大元． ■

读者如果想看佐恩引理应用的话，那么可以看一下第一章中关于每一向量空间都存在一个基的证明．

基数性

我们说两个集合 S 和 T 有相同的基数性，记作 $|\mathrm{S}| = |\mathrm{T}|$，
如果这两个集合之间存在一个双射函数(一一对应)．读者可能会想到：

$$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|, \quad |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$$

其中 $\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Q}$ 分别为自然数，整数和有理数．

如果 S 与 T 的一个子集一一对应，我们就记作 $|\mathrm{S}| \leqslant |\mathrm{T}|$．如果 S 与