SHOUXIANJINGSUANSHUXUE

【中国精算师资格考试辅导用书】

寿险精算数学

◆邹公明◆周俊所／主编

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

中国精算师资格考试辅导用书

ZHONGGUOJINGSUANSHIZIGEKAOSHIFUDAOYONGSHU

【综合经济基础】

【寿险精算数学】

责任编辑：刘　荇
封面设计：张　戈

ISBN 978-7-80221-335-7

9 787802 213357 >

定价：29.00元

【中国精算师资格考试辅导用书】

寿险精算数学

SHOUXIANJINGSUANSHUXUE

◆邹公明◆周俊所／主编

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目（CIP）数据

寿险精算数学 / 邹公明，周俊所主编. — 北京：中国时代经济出版社，2007.6

中国精算师资格考试辅导用书

ISBN 978-7-80221-335-7

Ⅰ.寿…　Ⅱ.①邹…②周…　Ⅲ.人寿保险—精算学—资格考核—自学参考资料　Ⅳ.F840.62

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 065705 号

寿险精算数学

邹公明　周俊所　主编

出 版 者	中国时代经济出版社
地　　址	北京市东城区东四十条24号 青蓝大厦11层
邮政编码	100007
电　　话	（010）68320825（发行部） （010）88361317（邮购）
传　　真	（010）68320634
发　　行	各地新华书店
印　　刷	北京市白帆印务有限公司
开　　本	787×1092　1/16
版　　次	2007年6月第1版
印　　次	2007年6月第1次印刷
印　　张	23.75
字　　数	409千字
印　　数	1~4000册
定　　价	29.00元
书　　号	ISBN 978-7-80221-335-7

序　言[①]

《寿险精算数学》是学习者跨入寿险精算领域的标志性学科，这门课程包含了大量从实务中抽象出来的数学模型，体现了精算学务实性的学科特点。可以说脱离了实务与实践，精算学的存在意义就不大了。因此，学好这门学科除了需要很好的数学素养外，还需要树立学以致用的学习理念，也就是说，仅仅依靠脱离实际的单纯的公式推导是不可能掌握精算学的精髓的。

在强调理论与实践相结合的同时，笔者还必须重申，学习者要竖立“大精算”的理念，尽管许多学者将“精算学”称为“保险精算学”，并且精算的发展主要是由保险业的发展推动的，但精算理论体系的日益丰富和完善已经赋予了精算更广阔的应用空间。也就是说精算除了服务于保险业之外，对银行、证券、基金等其它金融业的风险管理都起着十分重要的作用。不仅如此，精算的理论还广泛应用于金融领域之外的诸多行业，如房地产、国防、工业产品可靠性研究、企业管理、企业估价与诊断、政治风险测评、国民经济核算等。学习者要树立“大精算”的概念，这样才能更完备全息式地评估风险，才能使精算理论应用的更全面更深入。

这门课程的学习难度并不大，相信考精算师的学习者会相对轻松地拿到六分成绩。不过笔者想提一个非常不成熟甚至有些荒谬的建议，鉴于这门课程在精算学中的基础及枢纽地位，这门课只有拿到八分的学员方算通过。笔者别无它意，并不是特意为后来者设置障碍，笔者只是想用这种方式表达这门课的重要性。

精算学在我们国家的发展速度非常快，随着学习者整体水平的提高，这本书的效用应该说越来越小了，尽管如此，作者还是尽了自

①本书由世纪保联（北京）软件技术有限公司资助出版。

己的最大努力，争取与中国保险业的发展与时俱进。希望为中国精算事业的更加成熟，为保险业更加稳健的发展做一点贡献。但是由于能力和水平有限，书中可能会出现这样或那样的不足，请读者见谅，并批评指正。

在结束这则序言之际，有一些重要的事情必须要读者知晓，那就是这本书的出版得到了国内保险企业管理软件生产商世纪保联(北京)软件技术有限公司的大力资助，作者在此表示衷心的感谢。顺便告诉大家一个喜讯，那就是该公司正在致力于国产精算软件的研发，并且精算软件的核心部分已经开发完成，这项工作将大大提高精算工作者的工作效率，将精算师从繁琐的 EXCEL 表中解放出来。另外作者还要感谢亦师亦友的精算大师们，譬如李秀芳教授、谢志刚教授、李晓林教授等，他们的鼓励、智慧及理念给作者完成这套丛书莫大的帮助。辛苦了，还有这本书的责编刘荇主任，她的精明与智慧一样出色。

在此书的出版之际，正逢作者的人生又一次转折，作者有了为社会做出更大贡献的机会。作者在此深深地感谢那位拥有无边智慧而又胸怀大志给作者无私提供发展机遇的人，在表示知遇之恩的同时作者也祝愿他的事业一帆风顺，如日中天。在新的职业生涯中，作者永远会铭记曾经帮过作者的那些善良的人们都是不平凡的。

深深地感谢，谢谢！

邹公明　于北京

2007 年 5 月

前 言

寿险精算数学是以概率论和数理统计为工具，以人寿保险中的不确定事件为研究对象，建立经济计量模型，来研究人寿保险中寿命分布规律、保费厘定、责任准备金计提、现金价值的计算及分布等问题的一门学科。随着中国精算师资格考试体系的逐步完善及中国精算教育水平的不断提高，为方便广大考生及初学者的学习与掌握精算知识，我们特编写此书。

本书共八章，第一章为精算学的基础，主要讲述了生存分布函数和生命表等；第二章、第三章讲述趸缴保费、生存年金及均衡纯保费等精算计算方法；第四章、第五章主要讲述了纯保费准备金和毛保费准备金及其修正方法；第六章、第七章推广到多元寿险模型，第八章简单地介绍了精算方法在养老金计划中的应用。最后，有四套中国精算师资格考试模拟试题供读者自我测试。

本书为寿险精算学辅导用书，主要帮助读者理解把握寿险精算学的基本理论知识，因此，我们把每一章分成了三个部分：第一部分，本章基本结构框架，让读者初步了解本章的知识体系；第二部分，重点难点解析，主要是帮助读者加深理解本章的重要知识点及不易理解的难点内容，阐述完每一个重点难点之后，都有精选的例题详细分析；第三部分，习题解答，每一章都有数十道习题及详细的解答过程，读者可以以此为练习来加强理解各个知识点。

本书不仅可作为中国精算师资格考试 04 科目《寿险精算数学》的辅导用书，也可以作为大专院校金融保险专业及相关专业的学习辅导书，也可以作为保险从业人员自学参考书。

在研习本书的过程中，由于我们水平有限，可能会发现这样或那样的不足之处，敬请各位读者批评指正。

周俊所

2007 年 5 月

目 录

第一章　生存分布与生命表

(一)本章基本结构框架

- 生存分布
  - 生存函数
    - 性质:递减函数,$S(0)=1,S(\omega)=0$
    - 同 $F(x),f(x),\mu_x$ 关系
  - 未来寿命
    - 离散型:$K(x),e_x,\mathrm{Var}[K(x)]$
    - 连续型:$T(x),\mathring{e}_x,\mathrm{Var}[T(x)]$
    - 在 UDD 假设下:$\mathring{e}_x=e_x+\frac{1}{2}$
- 死力
  - 定义:$\mu_x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{s(x)-s(x+\Delta x)}{\Delta x}=-\frac{s'(x)}{s(x)}$
  - 关于四个假设:demivre/compertz/makeham/weibull
- 尾龄的三个假设
  - UDD 假设　$s(x+t)=(1-t)s(x)+ts(x+1)$
  - 常值死力假设　$s(x+t)=s(x)e^{-\mu_x t}$
  - Balducci 假设　$\frac{1}{s(x+t)}=\frac{1-t}{s(x)}+\frac{t}{s(x+1)}$
- 其他生命表函数
  - $l_x=l_0 s(x),L_x=\int_0^1 l_{x+t}\mathrm{d}t$
  - 死亡者平均死亡年龄 $\alpha(x)$/中央死亡率 m_x

(二)重点与难点解析

本章的重点是生存模型,死力函数,尾龄假设,选择终极生命表。难点是随机变量 $T(x)$,$K(x)$之间的区别和联系,以及它们相应的数字特征,生命表函数 $l_x,d_x,L_x,T_x,Y_x,\mathring{e}_x,e_x,\mathring{e}_{x:\overline{n}|}$ 等的含义,也是一大难点,另外还要注意 $\alpha(x)$,m_x 也是中国精算师考试中的常考考点,下列以例题逐一说明。

1. $T(x)$与 X 的关系

(1)X 为新生儿生存的时间随机变量

(2)$T(x)$为一个 x 岁的人到死亡时的时间随机变量

(3)$X=T(0)$

(4)$f(x)={}_xp_0\mu_x, f_{T(x)}(t)={}_tp_x\mu_{x+t}$

$F(x)={}_xq_0, F_{T(x)}(t)={}_tq_x$

例 1 设死力 $\mu_x=\dfrac{1}{100-x}, 0\leqslant x\leqslant 100$,

试求:

(1)随机变量 x 的分布函数与密度函数

(2)随即变量 $T(x)$的分布函数与密度函数

(3)$P(20<x\leqslant 40)$

(4)$P(30<x\leqslant 35/x>20)$

【解】 (1) $F_X(x)=1-\exp(-\int_0^x \frac{1}{100-s}ds)$

$$=1-\exp[\ln(100-x)-\ln 100]$$

$$=\frac{x}{100}$$

$$f_X(x)=F_X'(x)=\frac{1}{100}$$

(2) $F_{T(x)}(t)=1-\exp(-\int_x^{x+t}\frac{1}{100-s}ds)$

$$=1-\exp[\ln(100-x-t)-\ln(100-x)]$$

$$=\frac{t}{100-x}$$

$$f_X(x)=F_X'(x)=\frac{1}{100-x}$$

(3)$P(20<x\leqslant 40)=F(40)-F(20)$

$$=\frac{40}{100}-\frac{20}{100}$$

$$=0.2$$

(4) $P(30<x\leqslant 35/x>20)=\dfrac{F(35)-F(30)}{1-F(20)}$

$$=\frac{35/100-30/100}{1-20/100}$$

$$=0.0625$$

注:这个均匀分布的死力假设,是精算考试的重点,考生应熟练掌握它的

相关函数及其数字特征。

2. 关于 $T(x)$、$K(x)$的性质及关系

$$\begin{aligned}E(T) &= \int_0^{\infty} t\ {}_tp_x\mu_{x+t}\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{\infty} t\ \mathrm{d}_tp_x \\ &= -t\ {}_tp_x\big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} {}_tp_x\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} {}_tp_x\mathrm{d}t \\ &= \mathring{e}_x\end{aligned}$$

又有：$\mathring{e}_x = \int_0^{\infty} {}_tp_x\mathrm{d}t = \dfrac{\int_0^{\infty} l_{x+t}\mathrm{d}t}{l_x} = \dfrac{T_x}{l_x}$

$$\begin{aligned}E(T^2) &= \int_0^{\infty} t^2\ {}_tp_x\mu_{x+t}\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{\infty} t^2\mathrm{d}_tp_x \\ &= -t^2\ {}_tp_x\big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2t\ {}_tp_x\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{\infty} t\ {}_tp_x\mathrm{d}t\end{aligned}$$

又有：$E(T^2) = 2\int_0^{\infty} t\ {}_tp_x\mathrm{d}t = \dfrac{2\int_0^{\infty} tl_{x+t}\mathrm{d}t}{l_x} = \dfrac{2Y_x}{l_x}$

$$\mathrm{Var}(T) = 2\int_0^{\infty} t\ {}_tp_x\mathrm{d}t - (\mathring{e}_x)^2 = \frac{2Y_x}{l_x} - \left(\frac{T_x}{l_x}\right)^2$$

令 $K(x)$的函数为 $Z(k)$，则

$E[Z(K)]=Z(0)q_x+Z(1)_{1|}q_x+Z(2)_{2|}q_x+\cdots+Z(\omega-x-1)_{\omega-x-1|}q_x$

$=Z(0)q_x+[Z(0)+\Delta Z(0)]_{1|}q_x+[Z(0)+\Delta Z(0)+\Delta Z(1)]_{2|}q_x+\cdots$

$\quad+[Z(0)+\Delta Z(0)+\cdots+\Delta Z(\omega-x-2)]_{\omega-x-1|}q_x$

$=Z(0)[q_x+{}_{1|}q_x+{}_{2|}q_x+\cdots+{}_{\omega-x-1|}q_x]+Z(0)[{}_{1|}q_x+{}_{2|}q_x+\cdots$

$\quad+{}_{\omega-x-1|}q_x]+\cdots+\Delta Z(\omega-x-2)_{\omega-x-1|}q_x$

$=Z(0)+\Delta Z(0)p_x+\Delta Z(1)_2p_x+\cdots+\Delta Z(\omega-x-2)_{\omega-x-1}p_x$

对于 $Z(K)=k$ 时，有 $Z(0)=0, \Delta Z(K)=1$

对于 $Z(K)=k^2$ 时，有 $Z(0)=0, \Delta Z(K)=2k+1$

$$E(K) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k \cdot {}_{k|}q_x$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-2} {}_{k+1}p_x$$

$$= e_x$$

$$E(K^2) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k^2 \cdot {}_{k|}q_x$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-2} (2k+1) \cdot {}_{k+1}p_x$$

$$\mathrm{Var}(K) = \sum_{k=0}^{\omega-x-2} (2k+1) \cdot {}_{k+1}p_x - [e_x]^2$$

令 $S=T-K$,S 服从均匀分布,则 K 与 S 相互独立

$$\begin{aligned}\Pr(k<T(x)\leqslant k+s) &= {}_kp_x \cdot {}_sq_{x+k} \\ &= s \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} \\ &= s\Pr(K(x)=k)\end{aligned}$$

$$\Pr(S\leqslant s) = \int_0^s 1\mathrm{d}s = s$$

$$\Pr(k<T(x)\leqslant k+s)=\Pr(K(x)=k)\cdot\Pr(S(x)\leqslant s)$$

$$\begin{aligned}\mathring{e}_x = E(T) &= E(K+S) \\ &= E(K)+E(S) \\ &= e_x+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(T) &= \mathrm{Var}(K+S) \\ &= \mathrm{Var}(K)+\mathrm{Var}(S) \\ &= \mathrm{Var}(K)+\frac{1}{12}\end{aligned}$$

例 2 试用另一种方法证明:$E(K) = \sum_{k=0}^{\omega-x-2} {}_{k+1}p_x$ 及 $\mathrm{Var}(K) = \sum_{k=0}^{\omega-x-2} (2k+1)\,{}_{k+1}p_x$

【证明】 $E(K) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k\,{}_{k|}q_x$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k({}_kp_x - {}_{k+1}p_x) \\ &= p_x - {}_2p_x + 2\,{}_2p_x - 2\,{}_3p_x + 3\,{}_3p_x - 3\,{}_4p_x + \cdots \\ &\quad + (\omega-x-1)\,{}_{\omega-x-1}p_x - (\omega-x-1)\,{}_{\omega-x}p_x \\ &= p_x + {}_2p_x + \cdots + {}_{\omega-x-1}p_x \\ &= \sum_{k=1}^{\omega-x-1} {}_kp_x\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-2} {}_{k+1}p_x$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(K) &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k^2 {}_{k|}q_x \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k^2 ({}_kp_x - {}_{k+1}p_x) \\
&= p_x - {}_2p_x + 4\,{}_2p_x - 4\,{}_3p_x + 9\,{}_3p_x - 9\,{}_4p_x + \cdots \\
&\quad + (\omega - x - 1)^2[{}_{\omega-x-1}p_x - {}_{\omega-x}p_x] \\
&= p_x + 3\,{}_2p_x + 5\,{}_3p_x + \cdots + (2\omega - 2x - 3)_{\omega-x-1}p_x \\
&= \sum_{k=1}^{\omega-x-1} (2k-1)_kp_x \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x-2} (2k+1)\,{}_{k+1}p_x
\end{aligned}$$

注：${}_{\omega-x}p_x=0$；在运算中常常运用以上的结论，大大简化了运算的过程。

例 3. 给定生存函数 $S(x)=e^{-0.05x}$，$x\geqslant 0$，计算：

(1)${}_{5|10}q_{30}$，(2)$F(30)$，(3)$\mathring{e}_{30}$，(4)$\mathrm{Var}[T(30)]$

【解】 (1)$${}_{5|10}q_{30}=\frac{S(35)-S(45)}{S(30)}=\frac{e^{-1.75}-e^{-2.25}}{e^{-1.50}}=0.3064$$

(2) $$F(30)=P(x\leqslant 30)=1-S(30)=1-e^{-1.5}=0.7769$$

(3) $$\begin{aligned}
\mathring{e}_{30} &= \int_0^{\infty} {}_tp_x \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} \frac{S(x+t)}{S(x)}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} e^{-0.05t}\mathrm{d}t \\
&= -\left(\frac{e^{-0.05t}}{0.05}\right)\Big|_0^{\infty} \\
&= 20
\end{aligned}$$

(4)$$E(T^2) = 2\int_0^{\infty} te^{-0.05t}\mathrm{d}t$$

$$= 2\left[\frac{-te^{-0.05t}}{0.05}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-0.05t}}{0.05}dt\right]$$

$$= \frac{2}{0.05}\int_0^\infty e^{-0.05t}dt$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{0.05}\right)^2$$

$$= 800$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(T) &= E(T^2) - [E(T)]^2 \\ &= 800 - 400 \\ &= 400\end{aligned}$$

例 4　考虑如下一个由 21 名年龄为 90 岁的人所组成的群体的死亡模型。

$$d_{90} = 6$$

$$d_{91} = d_{92} = 3$$

$$d_{93} = d_{94} = d_{95} = d_{96} = 2$$

$$d_{97} = 1$$

计算：$E(K)$，$\mathrm{Var}(K)$

【解】

x	l_x	d_x	${}_{t+1}p_x$	$(2t+1)_{t+1}p_x$	t
90	21	6	15/21	15/21	0
91	15	3	12/21	36/21	1
92	12	3	9/21	45/21	2
93	9	2	7/21	49/21	3
94	7	2	5/21	45/21	4
95	5	2	3/21	33/21	5
96	3	2	1/21	13/21	6
97	1	1	0/21	0/21	7
98	0	1	—	—	8
			52/21	236/21	

$$\begin{aligned}E(K) &= e_x \\ &= \sum_{t=0}^{8} {}_{t+1}p_{90} \\ &= \frac{52}{21} \\ &= 2.48\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(K)&=E(K^2)-[E(K)]^2\\&=\sum_{t=0}^{8}(2t+1)\ {}_{t+1}p_{90}-(2.48)^2\\&=\frac{236}{21}-(2.48)^2\\&=5.09\end{aligned}$$

3. 关于死力

(1)死力 μ_x:死亡在瞬间的强度

$$\mu_x=[-\ln S(x)]'$$

(2) $S(x)={}_xp_0=e^{-\int_0^x\mu_x dt}$

$${}_tp_x=e^{-\int_0^t\mu_{x+t}dt}=e^{-\int_x^{x+t}\mu_s ds}$$

(3) ${}_tp_x\mu_{x+t}=(-{}_tp_x)'=({}_tq_x)'$

(4) $\int_0^{\infty}{}_tp_x\mu_{x+t}dt=1$

(5) $\int_n^{m+n}{}_tp_x\mu_{x+t}dt={}_{n|m}q_x$

(6) $\int_0^{r}{}_tp_x\mu_{x+t}dt={}_rq_x$

(7) $\int_r^{\infty}{}_tp_x\mu_{x+t}dt={}_rp_x$

例 5 下列函数中哪几个可被作为死力函数:

(1) $BC^x, B>0, 0<C<1, x\geqslant 0$

(2) $B(x+1)^{-0.5}, B>0, x\geqslant 0$

(3) $k(x+1)^n, k>0, n>0, x\geqslant 0$

【解】 (1) $S(x)=e^{-\int_0^x\mu_y dy}$

$$\begin{aligned}\int_0^x BC^y dy&=\left.\frac{BC^y}{\ln C}\right|_0^x\\&=\frac{B}{\ln C}(C^x-1)\end{aligned}$$

即:$S(x)=\exp\left[-\frac{B}{\ln C}(C^x-1)\right]$

检查:$S(x)\geqslant 0, s(0)=1$

$$\lim_{x\to\infty}S(x)=\exp\left[\frac{B}{\ln C}\right]\neq 0,\qquad (由于\ 0<C<1)$$

因此 $\mu_x=BC^x$ 不能作为死力函数

(2) $\int_0^x B(y+1)^{-0.5}\mathrm{d}y = \left.\frac{B(x+1)^{0.5}}{0.5}\right|_0^x$

$$=2B[(x+1)^{0.5}-1]$$

即：$S(x)=\exp\{-2B[(x+1)^{0.5}-1]\}$

检查：$s(x)\geqslant 0, s(0)=1$

$$\lim_{x\to\infty}S(x)=0$$

所以 $s(x)$ 为严格递减函数。因此，$\mu_x=B(x+1)^{-0.5}$ 可以被作为死力函数

(3) $\int_0^x k(y+1)^n\mathrm{d}y = \left.\frac{k(y+1)^{n+1}}{n+1}\right|_0^x$

$$=\frac{k}{n+1}[(x+1)^{n+1}-1]$$

即：$S(x)=\exp\left\{-\frac{k}{n+1}[(x+1)^{n+1}-1]\right\}$

检查：$S(x)\geqslant 0, S(0)=1$

$$\lim_{x\to\infty}S(x)=0$$

所以 $s(x)$ 为严格递减函数。因此，$\mu_x=k(x+1)^n$ 可以被作为死力函数

例 6 说明下列函数为什么不能作为相应符号所指明的函数：

(1) $\mu_x=(1+x)^{-3}, x\geqslant 0$

(2) $S(x)=1-\frac{22x}{12}+\frac{11x^2}{8}-\frac{7x^3}{24}, 0\leqslant x\leqslant 3$

(3) $f(x)=x^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, x\geqslant 0, n\geqslant 1$

【解】 (1) 当 $x\to\infty, \mu_x=0$，这是不可能的

(2) 生存函数是单调不增的

(3) $\int_0^\infty x^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x\neq 1$

4. 死力 deMoivre 假设与尾龄 UDD 假设是等价的

$$\mu_x=\frac{1}{\omega-x}, S(x)=\frac{\omega-t}{\omega}$$

$$F(x)=\frac{x}{\omega}, f(x)=\frac{1}{\omega}$$

$$f_{T(x)}(t)=\frac{1}{\omega-x}, F_{T(x)}(t)=\frac{t}{\omega-x}$$

$$E[T(x)]=\frac{\omega-x}{2}, \mathrm{Var}[T(x)]=\frac{(\omega-x)^2}{12}$$