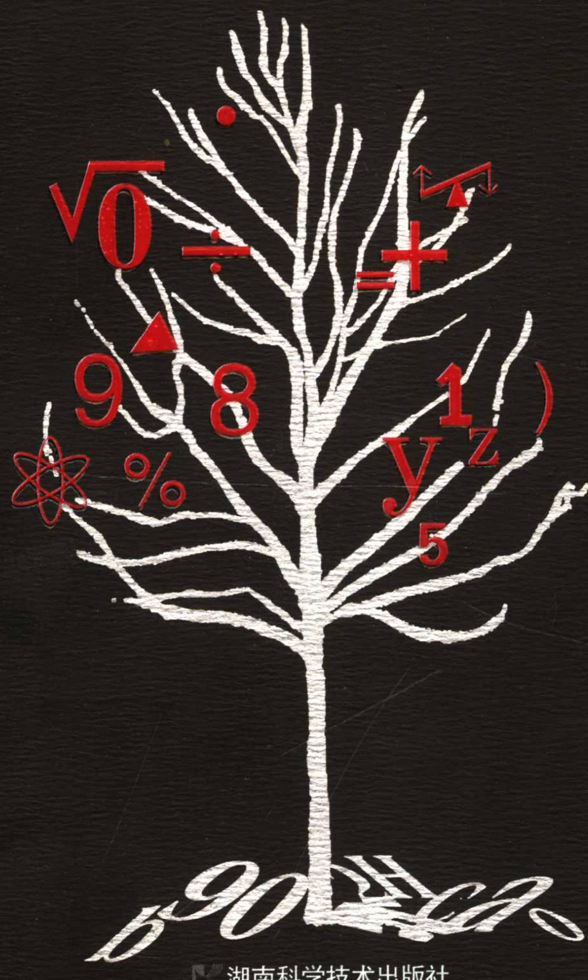
CONG JINGYA DAO SIKAO
SHUXUE DE YINJI

从惊讶到思考

——数学的印迹

韩雪涛 著



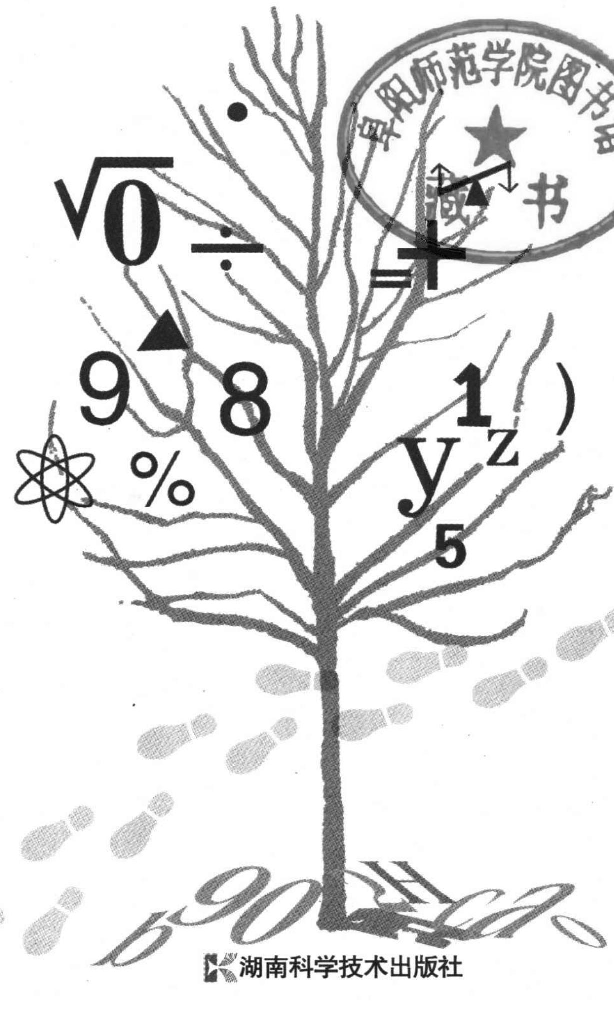
湖南科学技术出版社

CONG JINGYA DAO SIKAO
SHUXUE DE YINJI

从惊讶到思考

——数学的印迹

韩雪涛 著



阜阳师范学院图书馆
藏书

湖南科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

从惊讶到思考：数学的印迹／韩雪涛著.—长沙：湖南科学技术出版社，2007.8

ISBN 978-7-5357-5009-9

Ⅰ.从... Ⅱ.韩... Ⅲ.数学－普及读物 Ⅳ.01-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第124462号

从惊讶到思考

——数学的印迹

著　　者：韩雪涛
责任编辑：赵　龙
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市湘雅路276号
http://www.hnstp.com
邮购联系：本社直销科 0731-4375808
印　　刷：长沙化勘印刷有限公司
（印装质量问题请直接与本厂联系）
厂　　址：长沙市青园路4号
邮　　编：410004
出版日期：2007年8月第1版第1次
开　　本：880mm × 1230mm　1/32
印　　张：8.125
插　　页：2
字　　数：196000
书　　号：ISBN 978-7-5357-5009-9
定　　价：20.00元

（版权所有 · 翻印必究）

前言

众所周知，数学是极为重要的。在现代社会，数学作为一种国际语言已成为每一个实施教育的国家必须讲授的课目，每天也都有无数的人在学习数学。而其中或许有着数不清的人困惑于一个问题：数学究竟有什么用？

当然，简单的算术是我们生活中须臾不可离的，学习它的必要性无需强调。然而，我们为什么要学习那些由许多复杂符号组成的抽象的难以理解的数学呢？它似乎离我们相距很远，在人类的生活中似乎难以寻觅到它的芳踪。

如果你抱有这样的疑问，那请你翻阅一下你手中的这本书。

本书从日常生活、自然、音乐、体育、艺术、建筑、天文历法、科学技术、经济、社会科学等方面选取了与数学相关的若干有趣题材进行了简要介绍。这些题材不过是数不清的数学之用中的非常少的一部分，然而仅仅通过它们，你或许就已惊讶地发现：数学，抽象的数学，其实是无处不在的。在人类生活的差不多每一方面，都留有数学的印迹！

这一追寻和发现数学脚印的过程，还会成为你反复体验“从惊讶到思考”的快乐之旅。你可以从不断的惊讶中，深入思考数学与人类社会的密切联系、数学的奇特、数学之美、数学的力量……从而增进对数学本质的理解，更深刻地感受、领悟数学。

本书是一本数学科普读物，可供广大师生及其他数学爱好者阅读。

本书在写作过程中参考了大量的数学书籍（书后附有主要的参考文献），谨向这些书作者和译者表示真诚的谢意。另外，本书中所用图片大都是通过搜索引擎在网上找到的，在此谨向这些图片的作者或所有者表示感谢，对无法一一注明图片的来源还请见谅。

最后需要说明的是，书的内容涉及的范围较广，限于本人的能力，书中不足或错误在所难免，我真诚期望能得到读者朋友的指正。如果您有什么意见或建议，可以通过我的电子信箱 zhhxt@163. com 与我联系。

韩雪涛

2007 年 7 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章 日常生活中的数学

1.1 数字的历史与故事

两位贵族骑马外出，其中一位贵族挑战另一位说：看谁能想出一个更大的数。另一位贵族答应了，并在沉思几分钟之后，骄傲地说出了“3”，比赛发起者沉思了半个小时，最后耸耸肩承认自己落败。

这样的数盲受到我们的嘲笑是自然的。因为对于现代社会的人来说，几岁的孩子就已经能够把数数到 3 以上了。然而，如果把时间推到人的早期阶段，那么知道“3”确实有着骄傲的资本，因为“3”曾是人认识数过程中的一个“瓶颈”。

人类早在进化的蒙昧时期就对数有一种天赋本能。依靠这种本能，人不仅能区分有与没有的差别，而且当在一个小的集合中，增添或者去掉东西时，人能觉察到其中的变化，会意识到是“多了”或是“少了”。这种觉察数之有无与数之多少的能力，被数学史家称为“数觉”。对人类的这种数觉，现代心理学家做过一些有趣的实验。我们举其中一个。

在小小的舞台上放一只绒毛玩具，让只有几个月大的婴儿看。然后，舞台前落下幕布。实验人员利用一个秘密的洞孔偷偷地添加或拿开玩具。当幕布再次拉开时，如果里面仍旧只有一只玩具，婴儿就无精打采，失去了兴趣，但如果加进了一只玩具的话，婴儿就会特别来劲。这个实验表明：婴儿知道，1 与 2 是不

一样的。进一步的实验表明，如果 1+1 的结果仍只得到一个玩具，婴儿就会更加惊奇。因为这同他的期望相反：一个玩具再加上一个玩具，应当是两个玩具。

实际上，利用这一实验与类似的实验，已经确认，早在我们能开口说话之前，我们中间的绝大多数人就已经知道 1+1=2，2−1=1，2+1=3。

有趣的是，有实例表明若干种动物具有与人类相类似的原始数觉。如，在有些鸟类的鸟巢中若是有 4 个卵，那么你可以放心地拿去一个，鸟没有觉察；但是如果拿掉 2 个，这鸟通常就要逃走了。鸟会用某种奇怪的方法来辨别 2 和 3。下面一则有趣的故事能很好地说明鸟所具有的这种本领。

有个田主决心打死一只在他庄园的瞭望楼里筑巢的乌鸦。但最初没有成功：因为人一走近，乌鸦就离开了巢，飞走了。它会栖在远远的树上守着，等到人离开了瞭望楼，才肯飞回巢去。有一天，这田主定下了一个计策：2 个人走进瞭望楼，一个留着，一个出来走开了。但是乌鸦并不上当：它老等着，直到留在瞭望楼里的人也走了出来才作罢。这个试验一连作了几天：2 个人，3 个人，4 个人，都没有成功。末了，用了 5 个人：也像以前一样，先都进了瞭望楼，留 1 个在里面，其他 4 人走出来，离开了。这次乌鸦却数不清了：它不能辨别 4 与 5，马上就飞回巢里去了。

你看，“3”好像是一个瓶颈，在 3 以后，本能就变得不那么可靠了。

由此，我们也可以明白，虽然数觉是人类产生数概念的基础与起点。但如果仅限于此，人类“在计算上是不会比鸟类有多少进步的，更谈不上发展什么数学”。

让我们感到庆幸的是，在一连串的内在的与外在的特殊条件影响下，人类在数觉之外，学会了“计数”的技巧。这一技巧的

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

形成，经过了非常困难的阶段才作出。而且，在文明还没有那么复杂的社会，“3”作为数字观念的极限又一次得到体现。

对很多原始民族来说，用于数的单独的名称只有 1 和 2，间或也有 3，超过这几个数时，便说“许多，很多，太多”。事实上，在古今中外的人类语言中都保留着许多“3”被当成多的痕迹。例如“Three is a crowd”和我国的“三人成众”不谋而合。而古埃及的象形文字中的造字原则也是把三当成“多”。例如画三瓶水表示“大水成灾”；一只眼睛底下画三滴眼泪表示号啕大哭；三根毛发束在一起，表示那是三千烦恼丝。这原则和我国造字原理中的“鑫”表示多金、磊表示“多石”、森表示“多木”、淼表示“多水”有异曲同工之妙！另外，英文的 thrice 和拉丁文的 ter，有双重意义：三倍和许多，而我们古汉语中的“三”也常泛指多。

随着生产力水平的提高，较大的数目在生产、生活中越来越多的出现。在这种背景下，一些民族开始突破了“3”的瓶颈限制，更大的数字产生了。随之产生的问题是：如何计这些数？

在较小范围内计数时，人类不约而同地采用了画横杠或竖杠的方式。即数目是几，就画几道杠。然而当面对较大的数目时，这种最原始的解决办法就不行了。

《笑府》中有一则许多人熟悉的笑话：“一个学生刚从先生那里学会写一、二、三，便认为自己已经学会识字了。于是，有些吝啬的孩子的父亲高高兴兴地辞掉了先生。不久家里请一位姓万的客人，需要这位‘聪明’的学生写个请柬，于是他一画一画忙了起来，忙了大半天，还没有写出这个万字，最后当父亲急急火火地问他怎么还没有写完时，他抱怨说：‘这人真怪，为什么偏要姓万呢？’他以为万字就是一定要画出 10000 道横杠来。”

如果我们不用我们嘲笑的这个傻学生的办法，那么用什么办法才能完满地解决计大数的问题呢？新的解决思路叫进位制思

想。所谓进位制就是“以 P 个数组成一个新的单位，而 P 个新单位又可以用一个更高的单位来表示，以此类推”。因为是以 P 个数组成新的单位，所以就叫 P 进制。P 称作进位的基数。有了这种进位制的思想，计数就可以简单些了，人们就可以凭借少数的数码来表示出很大的数目，而不必采用过多的符号了。但是单纯的进位制存在明显的不足，比如人们要不停地创造新的符号，才能表示越来越大的数目。能否用有限的几个符号来表示任意大的数目呢？

举一个简单例子，看看我们现在是如何解决这一问题的。比如在十进位中数“一千九百七十一”，我们现在记作 1971，从右算起，1、7、9、1 所在的位置分别称为个位、十位、百位、千位。出现在最左边的数字 1 由于处于千位上于是代表一千，而与右边的数字 1 表示不同的意思。你看，没有采用新的计数符号十、百、千等，我们也表示出了数“一千九百七十一”。

这一奇妙的效果是如何实现的呢？道理说出来很简单，就是利用了数在书写时有“顺序”，即在写法上无非是从左到右，或者从右到左，或从上到下。于是计数符号本身有了位置的概念。也就是说，不但每个计数符号本身表示大小不同的数目，更巧妙的是同一个计数符号由于写在不同位置上，其数值大小就可以不相同而表示出不同的数目。或者说一个数字究竟表示什么数值，要看它在什么位置上。这就是“位值”的含义，而这种巧妙的方法就是位值制。位值制的奇特处在于它不用随着数的增大而采用不同的符号，从而使人们可以仅用比较少的数字来表示出任意大的数目。

位值制是千百年来人类智慧的结晶。然而，位值制的引入马上会出现一个困难：如何解决某位上没有数字的问题。

对于我们这些一开始就接触符号 0 的人来说，一切似乎都是那么顺理成章，这种理所当然使得我们已经很难体会到许多事情

的必要性了。比如说，102、1002、10002、120、1200……即便是小学生，也能容易地区分它们的不同。然而，早期很多民族都没有零的记号，他们大都使用空位的办法，于是会出现诸如1 2、1 2、1 2、1 2……这样的计数，此时我们还能清楚区分出它们到底代表的是些什么数吗？

因此，我们看到在位值制中，为了表明某位置上有无空位，以及各个数字的位置，必须要有零的符号，否则就容易出现混乱。完整的位值制中，零的符号是不可少的，零是位值制计数的必然产物，也是位值制计数法的精要所在。

但作为位值制计数法精髓的零，在历史上出现比位值制又晚得多。一般认为，它来源于印度，是印度人的贡献。印度人大约在公元前 3 世纪开始使用计数符号，以后逐渐地形成了十进制计数系统，在大约公元 6 世纪前开始采用位值制。他们创造了十个互相独立的符号，这是完善的十进位置制必不可少的重要内容。然而，印度人的伟大的变革之处正是零符号的发明。我们现代使用的椭圆零符号“0”最早是在公元 876 年中印边界一块石碑上发现的。

从第一个数字符号开始计数到想出一个表示无的符号，占据了人类大约 5000 年的时间。但无的符号却使世界整个改观！零这代表空无一物的东西，竟具有震动世界的重要性，说起来真叫人觉得奇怪；而更令人奇怪的是，多少伟大的数学家，竟让零从他们眼皮底下溜走。

也许有的读者早已经在心里暗想：这有什么难的？要是当初有我，这一点小发明早就出现了。对于如此想的读者，我们可以讲述一个有趣的故事。

1492 年，哥伦布从西班牙出发，历尽千辛万苦，终于发现了美洲新大陆，他在 1493 年返回西班牙后，受到了群众的欢迎和王室的优待，也招致了一些贵族大臣的妒忌。

在一次宴会上，有人大声宣称："到那个地方去，没有什么了不起，只要有船，谁都能去。"

哥伦布对这挑衅性的话并没有直接回击，而是随手在餐桌上拿起一个熟鸡蛋说："谁能把鸡蛋竖起来?"许多人试了又试，都说不可能。

哥伦布将鸡蛋壳在桌子上轻轻地敲破了一点，就竖了起来，于是又有人说："这谁不会?"

哥伦布说："在别人没有做之前，谁都不知怎么做，一旦别人做了之后，却又认为谁都可以做。"这就是流传了 400 多年的哥伦布鸡蛋的故事。哥伦布的这句话，由于寓意深刻，也便成了世界名言。

凡事都是开创时困难，别人开了头，仿效是容易的。实际上，零的诞生正是一个这样的典型例子。在发明之前，谁都想不到，一旦有了它，人人都会用它来计数。数学史家把 0 比作"哥伦布鸡蛋"，不仅仅是形状相似，其中还蕴涵着深刻的道理。真是一个一语双关的绝妙比喻。

有了零，有了位值制，在十进位制中我们就能够用十个数字表示出任何自然数了！这让我们早已习以为常视为常识般简单的东西，在人类花费了巨大的难以置信的劳动并经过了漫长的时间后，才最终建立起来！公元 773 年，印度数字开始传入阿拉伯国家，后经阿拉伯又传入欧洲，现在已被全世界所通用。这就是现在世界上所通用的阿拉伯数字，更确切地说应称为印度-阿拉伯数字。

只用有限个符号就能够驾驭无穷多个数，就可以方便、清楚地表示出所有的自然数。你有没有为此感到过惊奇呢？法国数学家拉普拉斯曾总结说："用十个记号表示所有的数，每个记号不但有绝对的值，而且有位置的值，这种巧妙的方法出自印度。这是一个深远而重要的思想，今天看来它如此简单，以致我们忽视

了它的真正伟绩。但恰恰是它的简单性以及对一切计算都提供了极大的方便，才使我们的算术在一切有用的发明中列在首位；而当我们想到它竟逃过了古代最伟大的两位数学家阿基米德和阿波罗尼奥斯的天才思想的关注时，我们更感到这个成就的伟大了……用很少的几个符号来表示一切数目，使符号除了具有形状意义外，还具有数位的意义。这一思想如此自然，如此使人容易理解，简直无法估计它的奇妙程度。”无怪乎革命导师马克思曾把十进位值制计数法称为人类“最妙的发明之一”了。

1.2 二进制计数法

古代各民族计数法中使用的进位制是五花八门的，不过有几种似乎更受青睐。1920 年前后，有人调查了 307 种原始计数方法。结果发现有 146 种是 10 进制的。对十进制的偏爱，最可能的原因在于人有十个手指。除十进制外，五进制和二十进制在历史上都曾被广泛使用。另外，证据表明，3、12、60 等进位制也曾在史前时期被不同民族使用过。在我们现代生活如长度、重量、货币、时间等的计量中，还经常会使用或残存着十进制之外的进位制。如角度的度量，时间的分秒等都是六十进位制。英国等国家用一“打”表示 12 个，用的是 12 进位制。我们有成语：半斤八两，这是我国旧时一斤为十六两，使用 16 进位制的印迹。

近年来人们最熟悉的非十进位制是二进制。

二进制作为最古老的计数法，现在还可以找到它的许多痕迹。如我们用双、对来计量。但这种神秘雅致的计数法的历史更多地与德国伟大人物莱布尼兹联系在一起。原因在于，1672～1676 年间莱布尼兹重新发现并对二进制做出了系统研究。1679 年 3 月 15 日，在《二进算术》的论文中，他对二进制进行了充分的讨论，并建立了二进制的表示及运算。1701 年，莱布尼兹

将关于二进制的论文提交给法国科学院，但要求暂不发表。1703年，他将修改后的论文再次送给法国科学院，并要求公开发表。自此，二进制开始公之于众。

1697年12月，在与一位著名法国传教士白晋的通信中，莱布尼兹曾阐明自己的二进制观点。1701年11月，白晋从北京给莱布尼兹回信，信中告诉他"伏羲六爻"的排列与二进制计数法的顺序是相同的。白晋还随信附上了伏羲六十四爻排列的木版图。经过辗转，1703年4月1日，莱布尼兹收到了这封信，并看到了伏羲易图。几天后，他完成了上述那篇递交给法国科学院的论文。此论文的题目是：《关于仅用0与1两个符号的二进制算术的说明，并附其应用以及据此解释古代中国伏羲图的探讨》。透过这个长题目，不难窥出莱布尼兹在此论文中不但阐明了二进制，而且还把它与中国的八卦联系在一起了。这是用二进制解释八卦的最早由来。莱布尼兹曾为几千年前中国圣人的创造与自己的发现相一致而高兴，并为自己解开了《周易》之谜而欣喜若狂。然而，事实上，在二进制与《周易》的关联方面，我们最多可以说"《易经》的八卦中无意识巧合碰上的东西，被莱布尼兹有意识地发现了"（李约瑟语）。

进入20世纪，由于计算机的广泛使用，二进制旧貌换新颜变得身价倍增起来。为什么在计算机中会采用这种进位制计数法呢?

最为重要的原因在于二进制只用两个数码的长处使它只要求元件有两种不同的稳定状态，这不但容易办到，而且可靠性高。如开关的"通"、"断"，穿孔带的"有孔"、"无孔"，晶体管的"通导"、"截止"等都可以实现。而如果电子计算机中使用其他进制，就要求元件具有更多种稳定的物理状态来表示这些个数码，而这是很困难的。其二，是符号的经济和演算的简单。在这种进位制中，计算法则只有两条：$1+1=10$；$1\times1=1$。而在十

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com