LCS 理工类硕士研究生

21世纪高等学校数学系列教材

（第二版）

模糊（Fuzzy）数学及其应用

彭祖赠　孙韫玉　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

模糊(Fuzzy)数学及其应用

理工类硕士研究生

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

（第二版）

模糊(Fuzzy)数学及其应用

■ 彭祖赠　孙韫玉　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

模糊(Fuzzy)数学及其应用/彭祖赠,孙韫玉编著.—2版.—武汉:武汉大学出版社,2007.9

21世纪高等学校数学系列教材

理工类硕士研究生

ISBN 978-7-307-05824-8

Ⅰ.模…　Ⅱ.①彭…　②孙…　Ⅲ.模糊数学—高等学校—教材
Ⅳ.O159

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第143076号

责任编辑:李汉保　　责任校对:刘　欣　　版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)

印刷:湖北金海印务公司

开本:787×1092　1/16　印张:19.5　字数:464千字　插页:1

版次:2002年3月第1版　　2007年9月第2版

2007年9月第2版第1次印刷

ISBN 978-7-307-05824-8/O·366　　定价:30.00元

21世纪高等学校数学系列教材

编 委 会

内容简介

本书共分10章，第1章、第2章两章系统地介绍了Fuzzy数学的基础知识；第3章～第9章介绍了具有使用价值的Fuzzy数学理论与方法；第10章介绍了较为专门的Fuzzy测度及其扩张问题.本书在内容编排上偏重于应用，力求使读者在阅读某部分内容后即可用于解决这类实际问题.在叙述方式上力求简单易懂，在着重介绍应用方法的同时也说明能有效使用这个方法的原理.此外还力求涉及较少的基础知识，读者只需具备高等数学和线性代数(工科)的基础知识即可读懂第1章～第9章.

依据“传而必习”的原则，在每章末紧密联系讲述的内容配置了大量的习题，读者若能做出所有习题，说明自己已经掌握了书中相关知识，还可以从中悟出新的见解.

本书可以作为硕士研究生(包括数学专业及非数学专业的硕士研究生)及本科生的教材，还可以供从事科研工作的工程技术人员使用，其中第10章专供从事Fuzzy测度的研究者参考.

序

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学。长期以来，人们在认识世界和改造世界的过程中，数学作为一种精确的语言和一个有力的工具，在人类文明的进步和发展中，甚至在文化的层面上，一直发挥着重要的作用。作为各门科学的重要基础，作为人类文明的重要支柱，数学科学在很多重要的领域中已起到关键性、甚至决定性的作用。数学在当代科技、文化、社会、经济和国防等诸多领域中的特殊地位是不可忽视的。发展数学科学，是推进我国科学研究和技术发展，保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要。高等学校作为人才培养的摇篮和基地，对大学生的数学教育，是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面，而教材建设是课程建设的重要内容，是教学思想与教学内容的重要载体，因此显得尤为重要。

为了提高高等学校数学课程教材建设水平，由武汉大学数学与统计学院与武汉大学出版社联合倡议，策划，组建21世纪高等学校数学课程系列教材编委会，在一定范围内，联合多所高校合作编写数学课程系列教材，为高等学校从事数学教学和科研的教师，特别是长期从事教学且具有丰富教学经验的广大教师搭建一个交流和编写数学教材的平台。通过该平台，联合编写教材，交流教学经验，确保教材的编写质量，同时提高教材的编写与出版速度，有利于教材的不断更新，极力打造精品教材。

本着上述指导思想，我们组织编撰出版了这套21世纪高等学校数学课程系列教材。旨在提高高等学校数学课程的教育质量和教材建设水平。

参加21世纪高等学校数学课程系列教材编委会的高校有：武汉大学、华中科技大学、云南大学、云南民族大在学、云南师范大学、昆明理工大学、武汉理工大学、湖南师范大学、重庆三峡学院、襄樊学院、华中农业大学、福州大学、长江大学、咸宁学院、中国地质大学、孝感学院、湖北第二师范学院、武汉工业学院、武汉科技学院、武汉科技大学、仰恩大学(福建泉州)、华中师范大学、湖北工业大学等20余所院校。

高等学校数学课程系列教材涵盖面很广，为了便于区分，我们约定在封首上以汉语拼音首写字母缩写注明教材类别，如：数学类本科生教材，注明：SB；理工类本科生教材，注明：LGB；文科与经济类教材，注明：WJ；理工类硕士生教材，注明：LGS，如此等等，以便于读者区分。

武汉大学出版社是中共中央宣传部与国家新闻出版署联合授予的全国四大优秀出版社之一。在国内有较高的知名度和社会影响力、武汉大学出版社愿尽其所能为国内高校的教学与科研服务。我们愿与各位朋友真诚合作，力争使该系列教材打造成为国内同类教材中的精品教材，为高等教育的发展贡献力量！

21世纪高等学校数学系列教材编委会

2007年7月

再版前言

本书自2002年3月出版至2007年2月5年间印刷了4次，可称得上是畅销书了.乘改版之际作了一些有益的修改与补充，现就有关问题陈述如下：

由于某些客观原因，原版中存在不少印刷上的错误，无疑给读者造成一些阅读上的困难.改版中将已被发现了的错误进行了修改.

为了方便阅读与查考，原则上对首次提及的概念或某个重要自然段的开始陈述都用“黑体”标明.

Fuzzy集中的概念都是普通集中相应概念的推广.但这些推广都不是凭空设想的，而是有一定的依据，有些依据比较直观或容易说明，有些则不很直观或很不直观，因此也不容易说明.改版稿中对这些概念作了很多明确的说明，以方便读者理解.

定理的证明太繁，必然增大了阅读量，有时还使读者抓不住要点；太简单又会造成理解上的困难.改版稿中对不少证明作了适当的修改.对于只注重应用的读者，只要能正确理解定理中的结论，未必要看懂全部证明过程.

现今盛行用$A(x)$表示x对A的隶属度，这种表达方式的优点是形式简单，但在普通集中未见有与此类似的符号.L. A. Zadeh在他的第一篇论文中使用了$\mu_A(x)$表示x对A的隶属度，$\mu_A(x)$是普通集中$\chi_A(x)$的直接推广，我们已在第1章中作了详细的论述，因此在原版中使用了Zadeh提出的“原始”记号，改版中也不作改变，该符号确实有些繁琐，但却是合理的和明确的.

Fuzzy数学在发展中，新的概念、方法“层出不穷”，本书取材的原则是“择其优者而用之”，而不“包罗万象”.

彭祖赠　孙韫玉

2007年6月于武昌

前　言

在生产实践、科学实验乃至日常生活中，人们遇到需要进行讨论研究的实际问题，大体上可以分为确定性与不确定性两类．例如在某导线内电流与端电压之间；气体体积、压强、温度之间；物体的受力状态与其运动速度、加速度和运动方向之间都存在确定性关系，均属于确定性问题，常可以用代数方程、微分方程等数学方法进行分析研究．但对于某确定对象的长度、面积、体积、重量的量测误差（即观测误差）的估计；由多种元件组成的产品的寿命的预测；工程、机械（或人体）某个部分出现“老化”、“病害”程度的评定；美与丑、高与低、好与差、大与小的划分等都未必有某种完全确定的结论，属于不确定性问题，不太能用代数方程、微分方程等作为主要数学工具进行分析研究．

对于不确定性的问题又可以分为随机不确定性与模糊（Fuzzy）不确定性两类．所谓随机不确定性常指由因果律存在破缺所造成的不确定性．例如，上述的观测误差主要与观测手段（如观测仪器先进与否），观测环境（如气温、湿度、海拔高度等）等因素有关；多元件组成的产品的寿命与各元件的制作材料和工艺、操作技术、组合方式等诸多因素有关，且这些因素很难一一枚举，更难定量地说明各自对结果造成了多大影响，从而在因果律上存在破缺，属随机不确定性一类．对于美与丑、高与低、好与差、大与小的划分，通常并不通过因果关系获得所需要的、存在明显不确定性的结果．例如对某种服装，若式样新颖、别致，质地优良，价格低廉，就被列入好的一类；若式样陈旧，质地低劣，价格又贵，则被列入差的一类．然而，人们也常听某人对某服装作出的较好或较差的评价，这说明好与差之间还存在较好、较差等中间状态．又如我们常听医生对某个病人病情作出诸如“重感冒”、“较重感冒”、“较轻感冒”、“轻感冒”等结论，这说明重、轻感冒之间，也有较重、较轻等中间状态．这些中间状态都使用了一些含混不清（较好、较差；较重、较轻）的词汇陈述，带有明显的不确定性．逻辑学中，把事物在同一时间，同一条件下，只具有某种性质或不具有某种性质（不存在中间状态）的规律称为排中律．因此，一类因中间状态的存在而引起的不确定性，起因于排中律存在破缺，称为模糊（Fuzzy）不确定性．

概率论与数理统计是研究随机不确定性问题的主要数学工具．概率论是从数量侧面研究随机现象规律性的数学学科；数理统计的任务是研究怎样用有效的方法去收集和使用带随机性影响的数据．它们于 20 世纪初才被逐步引起重视，并被获得确有成效的应用．1965 年 L. A. Zadeh 的开创性论文“模糊集合”（Fuzzy Sets，Information and Controe）的发表，创造了讨论研究模糊不确定性问题的数学方法——模糊数学．40 多年来，模糊数学受到了各个方面的高度重视．在数学理论（如拓扑学、逻辑学、测度论等）、应用方法（如控制论、聚类分析、模式识别、综合评估等）和实际应用（如中长期气象预报、成矿预测、良种选择、故障诊断等）诸多方面都取得了很多很有意义的成果．还创办了国际杂志《Fuzzy Sets and Systems》，模糊（Fuzzy）意识正向各个领域渗透．

概念是反映对象的特征或本质(以及本质属性)的思维形式.概念的内涵是概念所反映的对象的特征或本质.概念的外延是概念反映的那一事物或那一类事物的总和,即概念所指对象的范围.经典数学中的概念是严格界定的,它们都有确定的内涵与外延.因此,对某个确定的数学概念,在某个给定的范围内,任取一个对象,要么符合这个概念,要么不符合这个概念,二者必居其一,也仅居其一.然而在日常的生产、工作和生活中人们遇到的概念未必都具有这样的特征.如上述的好服装与差服装,重感冒与轻感冒等都很难进行确切的描述和准确的判断.我们将这些很难进行确切描述和准确判断的概念称为模糊(Fuzzy)概念.Zadeh 的"Fuzzy Sets"就是希望能用模糊集去刻画这类模糊概念.因此,人们认为模糊数学是讨论研究模糊概念的主要数学工具.

在使用概率论和数理统计方法研究随机不确定性问题时,常依据实际推断原理(小概率事件在一次试验(或观察)中是几乎不可能发生的)这一客观标准去检验所得结果,并作出一些使人信服的推断.但对模糊概念则很难作出确切描述和准确判断.不同概念之间不仅很难找到明确的界线,而且同一陈述(如好服装、重感冒等)在不同时间、地点还会有不同的理解,很难给出统一的、所有人都能接受的客观标准.因此在使用模糊数学方法时,怎样有效地进行运算,合理地作出推证,正确地用于实践等常常需要凭借经验作出主观选择.据此人们也认为模糊数学研究的主要对象是"主观"不确定性问题.

国内研究模糊(Fuzzy)数学起自于 20 世纪 70 年代,一开始就将"Fuzzy"一词译为"模糊",为此曾引起过一些"争鸣",如有人主张译为意、音兼顾的"泛晰"等,但现今除涉及拓扑方面(国内)的文献资料将"Fuzzy"译为"不分明"外,其他则或直接使用原文"Fuzzy"或使用译文"模糊".考虑到"Fuzzy"一词含有(界限)不很清楚之意,使用"模糊"不能完全表达原意,本书在正文中都直接使用原文"Fuzzy".

作者于 20 世纪 70 年代开始接触 Fuzzy 数学,并于 1984 年编写了《模糊数学简介》,简要地介绍了 Fuzzy 数学的内容,1986 年又进行了一次修改与补充,命名为《Fuzzy 数学及其应用》,且只在原武汉水利电力大学校内作为教材使用,未正式出版.本书是在原教材的基础上进行修改与补充后编写而成的.书中很大一部分内容是作者自己 20 多年来的研究成果,其中绝大部分已在国内外有关杂志或会议文集上发表.本书以工科硕士研究生、数学专业本科生及工科专业本科生为主要阅读对象进行编排.内容选择上力求实用,使读者经分析思考后即可以把所学的知识用来解决某些实际问题.陈述方式上则力求简单易懂,只要有高等数学和线性代数的基础知识即可读懂全书除最后一章外的全部内容.

本书共分 10 章,第 1 章、第 2 章两章介绍了 Fuzzy 数学的基础知识,第 3 章~第 9 章介绍了 Fuzzy 数学中较有实用价值的理论与方法,第 10 章则介绍了比较专门的 Fuzzy 测度及其扩张问题.与其他 Fuzzy 数学书籍比较,本书的主要特点是偏重于实际应用方法的介绍,且所有被介绍的方法都可以进行实际操作并获得比较合理的结果.尤其其中很多方法是作者自己的研究成果,在其他书本中也是较难找到的.例如在基础理论中除介绍了一般的 t-模、余模与伪补外,还特别介绍了有补 t-模、余模及其主要性质,并在 Fuzzy 关系构造和 Fuzzy 命题演算等方面获得了较好的应用,克服了在逻辑演算中缺乏"还原性"的缺陷.在 Fuzzy 聚类方面,早就有人指出使用传递闭包(等价于最大树)聚类有"失真性",本书则首先在 Fuzzy 图中介绍了最优树(近似)算法,并将它用于 Fuzzy 聚类,借此减少"失真性".此外,有序样本 Fuzzy 聚类等也是作者给出的一类 Fuzzy 聚类方法.在综合评判方面,除介绍了

Saaty 的层次分析法外还特别介绍了变权法及在变权法中权数的确定方法. 作者曾成功地使用 3 次样条插值函数改进了灰色模型(GM),使之能达到很好的拟合精度,相应的结果被编入第 9 章中. 作者给出了由 Sugeno 定义的 Fuzzy 测度可被扩张的充要条件,特将它列入第 10 章中,供有兴趣的读者阅读.

限于我们的水平,本书中谬误之处恐所难免,请国内同行和广大读者批评指正.

胡宝清教授审阅了全文,并提出了许多宝贵的意见,特此致谢.

彭祖赠　孙韫玉

2000 年 3 月于武昌

目　录

第 1 章 集与 Fuzzy 集

19 世纪末，Cantor 首创集合论，并迅速渗透到各个数学分支，成为基础数学. 1965 年美国控制论专家 Zadeh 第一次提出了 Fuzzy 集概念，给 Cantor 集合理论作了有益的推广，受到广泛重视，迄今已形成一个较为完善的数学分支，且在很多领域中获得了卓有成效的应用. 本章先介绍 Cantor 集合的基本知识，然后介绍 Fuzzy 集理论.

§1.1 集合及其特征函数

Cantor 对"集"作了如下描述："把一定的并且彼此可以明确识别的东西——东西可以是直观的对象，也可以是思维的对象——放在一起叫做集". 例如，全体人是集，因为张三、李四是可以明确识别的. 全体整数、全体有理数、全体实数都是集. 又如若用 $[a,b]$ 表示所有大于或等于 a，小于或等于 b 的实数全体，则 $[a,b]$ 是集. 函数 $y=\sin x$ 的值域 $[-1,1]$ 是集，定义域 $(-\infty,+\infty)$ 也是集.

以下用 X、Y、Z 或 A、B、C 等大写字母表示集. 设 A 是集，A 中的一个具体对象(成员)称为 A 的元素，常用小写字母 x、y、z 或 a、b、c 等表示. 例如，设 A 是全体人的集，则张三是 A 的成员，用 a 表示张三，则 a 是 A 的元素. 若 A 是集，a 是 A 的元素，则记 $a\in A$，读做 a 属于 A. 若 A 是集，a 是某个具体对象，但 a 不是 A 的元素，则记做 $a\overline{\in} A$，读做 a 不属于 A. 没有元素的集称为空集，用 $\varnothing$ 表示空集. 因此，对空集 $\varnothing$，任给对象 x，都有 $x\overline{\in}\varnothing$.

集合常用以下两种方法表示：

1. 穷举法：将集中的所有元素一一列出，再加上一对花括号{ }来表示. 例如，若集合 A 是由 a,b,c 三个元素组成的，则记 $A=\{a,b,c\}$. 又如全体自然数的集 $\mathbf{N}$ 可以记做 $\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 等.

2. 特性描述法：以 x,y 等符号作为集中的代表元素，然后在其后加一竖线"|"，竖线的后面写出元素 x、y 等所具有的特性或应满足的条件，再加上花括号来表示. 例如，$A=\{x\mid |x|<1$ 且 x 为实数$\}$ 表示 A 是所有绝对值小于 1 的实数的全体，即 $A=(-1,1)$；又如 $B=\{x\mid x^2=1,x$是实数$\}$ 即 $B=\{-1,1\}$ 等.

以后总用 $\mathbf{N}$ 表示全体自然数的集，用 $\mathbf{Q}$ 表示全体有理数的集，用 $\mathbf{R}$ 表示全体实数的集，且不再作一一说明.

设 A，B 都是集，且对任意 $x\in A$，必有 $x\in B$，称 A 是 B 的子集，记做 $A\subseteq B$，读做 A 包含于 B. 约定空集 $\varnothing$ 是任意集 A 的子集. 即对任意集 A，都有 $\varnothing\subseteq A$.

设 A，B 都是集，且 $A\subseteq B$，$B\subseteq A$，则记 $A=B$. 显然 $A=B$ 意味着 A 与 B 的所有元素完全相同.

通常将所讨论的对象限制在一定范围内，并称所讨论的对象的全体为论域. 论域常用 U

或 X,Y,Z 等大写字母表示. 例如,若只讨论全体自然数,则论域 $U=\mathbf{N}$. 以后凡提到论域总假定它是非空的.

设 U 是论域,U 的所有子集所组成的集称为 U 的幂集,记做 $P(U)$. 例如,设 $U=\{a,b,c\}$,则

$$P(U)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

需要指出的是:若字母 a 用来表示集合 A 的元素(即 $a\in A$),则 $\{a\}$ 表示由一个元素 a 组成的集合(称为单点集),且 $\{a\}$ 是 A 的子集(即 $\{a\}\subseteq A$). 因此,a 与 $\{a\}$ 是有区别的.

设 A,B 是集,符号 $A\cup B, A\cap B, A-B, A\ominus B$ 表示由 A 与 B 所确定的集,分别定义如下:

$A\cup B\triangleq\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$,称为 A 与 B 的并集;

$A\cap B\triangleq\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$,称为 A 与 B 的交集;

$A-B\triangleq\{x\mid x\in A$ 且 $x\overline{\in} B\}$,称为 A 与 B 的差集;

$A\ominus B\triangleq\{x\mid$"$x\in A$ 且 $x\overline{\in} B$"或"$x\in B$ 且 $x\overline{\in} A$"$\}$,称为 A 与 B 的中心差集.

以上各式中的符号"$\triangleq$"表示"被定义为".

由以上定义可以看出

$$A\ominus B=(A-B)\cup(B-A)$$

特别地,设 U 是论域,$A\subseteq U$,称 $U-A$ 为 A 对 U 的补集,记做 A^C.

定理 1.1 设 U 是论域,A,B,C 都是 U 的子集. 则 $\cup,\cap,\cdot^C$ 具有以下运算规律:

1. 交换律 $A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$;

2. 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

3. 吸收律 $A\cup(A\cap B)=A,\ A\cap(A\cup B)=A$;

4. 幂等律 $A\cup A=A, A\cap A=A$;

5. 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

6. 复原律 $(A^C)^C=A$;

7. 互补律 $A\cup A^C=U,\ A\cap A^C=\varnothing$;

8. 0－1 律 $A\cup\varnothing=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing$;
$A\cup U=U,\ A\cap U=A$;

9. De · Morgan 律 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C, (A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

证 仅证分配律,其余留做习题.

任取 $x\in A\cup(B\cap C)$,则 $x\in A$ 或 $x\in B\cap C$. 若 $x\in A$,则 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$,从而 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$;若 $x\in B\cap C$,则 $x\in B$ 且 $x\in C$,从而 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$,也有 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$,即 $A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$. 任取 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$,则 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$,从而或 $x\in A$,或 $x\in B\cap C$,故 $x\in A\cup(B\cap C)$,即 $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$. 由集合相等的定义得

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$ □

因为 $\cup,\cap$ 满足结合律,故可记

$$(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C, (A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C.$$

更一般地，设 Λ 是集，λ 是 Λ 的元素，则

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \triangleq \{x \mid \exists\lambda\in\Lambda，使得\ x\in A_\lambda\}，$$
$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \triangleq \{x \mid \forall\lambda\in\Lambda，都有\ x\in A_\lambda\}.$$

式中“$\exists$”表示“存在(Exist)”，“$\exists\lambda\in\Lambda$，使得 $x\in A_\lambda$”即“存在 $\lambda\in\Lambda$，使得 $x\in A_\lambda$”；“$\forall$”表示“全部(All)”，$\forall\lambda\in\Lambda$，都有 $x\in A_\lambda$，即“对全部 $\lambda\in\Lambda$，都有 $x\in A_\lambda$”；式中 Λ 称为指标集，当 $\Lambda=\mathbf{N}$ 时，$\bigcup_{n\in N} A_n$ 常记做 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，$\bigcap_{n\in N} A_n$ 常记做 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

依据上述 $\cup$，$\cap$ 的一般性定义，集合运算中的分配律与 De・Morgen 律也有更一般的形式. 即

$$A\cup\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A\cup A_\lambda),\quad A\cap\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A\cap A_\lambda),$$
$$\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)^C=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C,\quad \Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)^C=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C.$$

设 X，Y 是集，f 是由 X 到 Y 的对应关系，即对任意 $x\in X$，都有 $y=f(x)\in Y$ 与之对应，称 f 是映 X 入 Y 的**映射**，记做 $f:X\to Y$，读做 f 映 X 入 Y.

若 $f:X\to Y$，且对任意 $x_1,x_2\in X$，若 $x_1\neq x_2$，则 $f(x_1)\neq f(x_2)$，称 f 为**单射**，也称 f 为**一一的**.

若 $f:X\to Y$，且对任意 $y\in Y$，都有 $x\in X$ 使得 $y=f(x)$，称 f 为**满射**，也称 f 映 X 到 Y 上(**映上**).

若 $f:X\to Y$ 是一一的满射，称 f 为**双射**，双射也称为**一一对应**.

若 $f:X\to Y$，令

$$f(X)=\{y \mid \exists x\in X，使得\ y=f(x)\}$$

则称 $f(X)$ 是 f 的**值域**.

显然，若 $f:X\to Y$，且 $f(X)=Y$，则 f 是满射，若 f 还是一一的，则 f 是双射.

例 1　设 $f:[0,1]\to[0,2]$，且 $f(x)=x^2$，则 f 是一一的，但不是映上而是映入；设 $f:[-1,1]\to[0,1]$ 且 $f(x)=x^2$，则 f 是映上的，但不是一一的；设 $f:[0,1]\to[0,1]$，且 $f(x)=x^2$ 则 f 是一一的满射(双射).

设 U 是论域，$\chi:U\to\{0,1\}$，χ 称为 U 上的特征函数. U 上特征函数的全体记做 CH(U).

设 $a,b\in[0,1]$，定义：

$$a\vee b=\max\{a,b\},\qquad a\wedge b=\min\{a,b\}$$

容易看出，对任意 $a,b\in[0,1]$，$a\vee b$、$a\wedge b\in[0,1]$，又对任意 $a,b\in\{0,1\}$，$a\vee b$、$a\wedge b\in\{0,1\}$.

设 χ_1，χ_2 和 χ 都是论域 U 上的特征函数，则：

1. 若 $\forall x\in U$，都有 $\chi_1(x)\leqslant\chi_2(x)$，则记 $\chi_1\leqslant\chi_2$；
2. 若 $\chi_1\leqslant\chi_2$，且 $\chi_2\leqslant\chi_1$，则记 $\chi_1=\chi_2$；
3. 若 $\forall x\in U$，都有 $\chi(x)=\chi_1(x)\vee\chi_2(x)$，则记 $\chi=\chi_1\vee\chi_2$；
4. 若 $\forall x\in U$，都有 $\chi(x)=\chi_1(x)\wedge\chi_2(x)$，则记 $\chi=\chi_1\wedge\chi_2$；
5. 若 $\forall x\in U$，都有 $\chi_2(x)=1-\chi_1(x)$，则记 $\chi_2=\overline{\chi_1}$.

显然，$\chi_1=\chi_2$ 当且仅当 $\forall x\in U$，$\chi_1(x)=\chi_2(x)$.

定理 1.2　若 $U\neq\varnothing$，则 U 的幂集 P(U) 与 U 的全体特征函数的集 CH(U) 之间，存在一