21 世纪高等院校教材

微积分(二)

华长生 邓咏梅
徐 晔 钟友明 编著

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

微积分(二)

华长生　邓咏梅
徐　晔　钟友明　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书根据教育部颁布的经济、管理本科专业《经济数学》教学大纲，针对经济数学教学改革的需要，以培养"厚基础、宽口径、高素质"人才为宗旨，介绍了一元函数积分学、多元函数积分学、微分方程与差分方程、无穷级数等内容，另外还特意安排了微积分综合应用案例以及 Mathematica 软件应用介绍作为课外阅读材料，开拓学生的视野. 每节后附有练习题，供课后巩固知识使用，每章后附有综合性的习题，供综合训练使用. 本书注重基本知识、基本技能、基本方法的训练以及实际应用能力的培养. 例题和习题选用基础、适中和综合提高等三类题目，既照顾一般程度水平的学生要求，也兼顾准备参加硕士研究生入学考试读者的需求.

本书适合经济、管理类等专业的高等院校学生、成人教育学生、参加国家自学考试的学生，以及准备参加经济管理类硕士研究生入学考试的有关人士等.

图书在版编目(CIP)数据

微积分(二)/华长生等编著. —北京：科学出版社，2007
21 世纪高等院校教材
ISBN 978-7-03-019659-0

Ⅰ. 微… Ⅱ. 华… Ⅲ. 微积分-高等学校-教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 126792 号

责任编辑：李鹏奇 胡华强 吴伶伶 / 责任校对：李奕萱
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 9 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007 年 9 月第一次印刷 印张：20 3/4
印数：1—7 000 字数：400 000

定价：25.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

前　言

本书是根据国家教育委员会颁布的高等财经专业《经济数学基础教学大纲》和高等教育教学改革的实际需要编写的，并在旧版的基础上进行了修订. 在编写过程中，我们遵循大纲的基本原则和指导思想，注重能力的培养和创新意识的培养，因此，在内容选取上适当弱化了基本性质、定理的理论推导，侧重于基本概念的理解、基本方法的掌握、基本解题技巧的训练，加强了模型、案例和实际应用的介绍. 本书力求做到通俗易懂，深入浅出，突出重点，循序渐进.

本书由江西财经大学信息管理学院部分教师编写. 其中第 6、7 章由邓咏梅编写，第 8 章由钟友明编写，第 9 章由徐晔编写，第 10、11 章及附录由华长生编写.

柳键教授对本书的编写给予了热情的帮助和指导，他认真阅读了全部内容，提出了许多有价值的意见和建议，并做了部分审稿工作. 另外，信息管理学院的其他同仁对本书的编写也给予了大力的支持和帮助，在此一并致谢.

加 * 号部分为选学内容，供学有余力的同学选用.

由于编者水平所限，错误和疏漏在所难免，敬请读者批评指正.

目　　录

第 6 章　不 定 积 分

积分学是微积分中的另一个基本组成部分.积分学中包括两个基本内容:不定积分和定积分.本章介绍不定积分,主要内容包括:

1. *原函数与不定积分的基本概念、性质*

讨论原函数的定义、存在性、数量及一个函数的全体原函数的表达形式等问题;介绍不定积分的定义、性质、几何意义及基本积分公式.

2. *求不定积分的方法*

(1) 换元积分法,包括第一类换元法(凑微分法)和第二类换元法.
(2) 分部积分法.
(3) 其他积分方法.

6.1　不定积分的概念和性质

6.1.1　原函数与不定积分

在微积分(Ⅰ)中,我们已经介绍了如何求一个已知函数的导数和微分,但在科学技术和经济领域的许多问题中,常常需要解决相反的问题,即已知一个函数的导数(或微分),要求这个原来的函数.

例如,已知某种耐用消费品的需求函数:

$$Q = Q(p) \qquad (p\text{ 为价格}),$$

则该消费品的边际需求为

$$Q'(p) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p},$$

这是我们已经熟悉的问题.

反之,如果已知耐用消费品的边际需求函数 $Q'(p)=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}$,要求其需求函数 $Q(p)$.

这是一个与求导数相反的问题.这种问题在数学及其应用中具有普遍意义,因而有必要在一般形式上对它进行讨论.

1. 原函数

定义 1　设 $f(x)$是定义在某一个区间上的函数，如果存在一个函数 $F(x)$，使得对已知区间上任意点 x 都有

$$F'(x) = f(x) \quad 或 \quad \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x,$$

则称函数 $F(x)$是函数 $f(x)$在该区间上的一个原函数.

例如，由于$(x^2)'=2x$，所以 $F(x)=x^2$ 是函数 $f(x)=2x$ 的一个原函数.

又如，当 $x>0$ 时，$(\ln x)'=\frac{1}{x}$，所以 $F(x)=\ln x$ 是函数 $f(x)=\frac{1}{x}$在区间$(0,+\infty)$内的一个原函数.

原函数与导函数是一对互为相反的概念. 在某个区间内，若 $f(x)$是 $F(x)$的导函数，则 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数；反之，若 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，则$f(x)$是 $F(x)$的导函数.

并且，引入原函数的概念后，上述的问题可以表述为：已知函数 $f(x)$，求其原函数.

关于原函数，我们首先要问：一个函数具备什么条件，才能保证它的原函数一定存在？

定理 1　若函数 $f(x)$在某区间上连续，则 $f(x)$在该区间上必存在原函数.

简单地说，即连续函数一定有原函数.

这个定理将在第 7 章中予以证明.

由于初等函数在其有定义的区间上是连续的，因此根据定理 1，初等函数在其有定义的区间上都有原函数.

其次，如果函数 $f(x)$有原函数，其原函数是否唯一？如果不唯一，则一共有多少个？并且，其一般表达形式如何？

定理 2　如果函数 $F(x)$是函数 $f(x)$在某区间上的一个原函数，则

(1) 对任意常数 C，$F(x)+C$ 也是函数 $f(x)$的原函数；

(2) $f(x)$的任意两个原函数之间只相差一个常数.

证明　(1) 由于 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，则

$$F'(x) = f(x),$$

$$[F(x)+C]' = F'(x) = f(x),$$

所以，$F(x)+C$ 也是 $f(x)$的原函数.

(2) 设 $F(x)$与 $G(x)$是 $f(x)$的任意两个原函数，则

$$F'(x) = f(x), \qquad G'(x) = f(x),$$

即

$$F'(x) = G'(x),$$

由拉格朗日中值定理的推论，有

$$F(x)=G(x)+C.$$

这个定理表明，如果函数 $f(x)$在某区间上有原函数 $F(x)$，则 $f(x)$在该区间上就有无穷多个原函数，这个定理还给出了 $f(x)$的全体原函数的一般表达形式为 $F(x)+C$（C 为任意常数），它们称为函数 $f(x)$的原函数簇.

至此，可以引入不定积分的概念.

2. 不定积分

定义 2 若函数 $f(x)$在某区间上存在原函数，则 $f(x)$的所有原函数的全体称为 $f(x)$在该区间上的不定积分. 记为

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

这里"$\int$"称为积分符号，$f(x)$称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量.

按此定义可知，如果函数 $F(x)$是函数 $f(x)$的一个原函数，则 $f(x)$的不定积分为

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C \qquad (C\text{ 为任意常数}), \tag{6-1}$$

任意常数 C 又称为积分常数.

由此可知，求不定积分实际上只需求出一个原函数，再加上任意常数 C.

例如，由于 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数，即$(\sin x)'=\cos x$，所以 $\cos x$ 的不定积分为

$$\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C.$$

由于 $\arctan x$ 是$\frac{1}{1+x^2}$的一个原函数，所以$\frac{1}{1+x^2}$的不定积分为

$$\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C.$$

例 1 求$\int\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

解 因为

$$\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)'=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x},$$

所以

$$\int\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C.$$

例 2 若曲线 $y=f(x)$的切线斜率为 $2x$，且通过点$(1,2)$，求曲线的函数关系

式 $y=f(x)$.

解　据题意,曲线 $y=f(x)$的切线斜率为 $2x$,即

$$y' = f'(x) = 2x,$$

则

$$y = f(x) = \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C.$$

又曲线 $y=f(x)$通过点(1,2),即有

$$y\big|_{x=1} = f(1) = 2.$$

代入上式,有 $y|_{x=1}=f(1)=1^2+C=2$,得 $C=1$.

故所求曲线的函数关系式为 $y=x^2+1$.

3. 不定积分的几何意义

在例 2 中,我们求得 $y=x^2+C$,而曲线 $y=x^2+C$ 可认为是由曲线 $y=x^2$ 沿 y 轴方向平移距离 $|C|$ 所得到的. 当 $C>0$ 时,沿 y 轴正方向平移;当 $C<0$ 时,沿 y 轴负方向平移. 故函数簇 $y=x^2+C$ 的图形是一曲线簇. 而所求曲线 $y=x^2+1$ 是曲线簇 $y=x^2+C$ 中通过点(1,2)的那一条.

一般情形,如果函数 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数,则称曲线 $y=F(x)$为函数 $f(x)$的一条积分曲线. 把曲线 $y=F(x)$沿 y 轴平移可以得到曲线族 $y=F(x)+C$. 不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 的图形就是 $f(x)$的全部积分曲线组成的积分曲线簇. 显然,若在每一条曲线上横坐标相同的点上作切线,则这些切线是互相平行的(图 6-1).

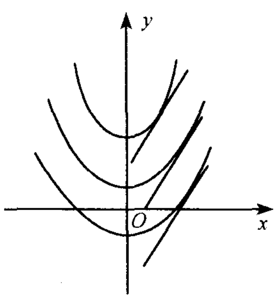

图 6-1

在实际问题中,往往需要根据某个给定的条件,选择一个具体的原函数. 这时,只需要根据条件,将任意常数 C 确定下来即可.

求已知函数的原函数方法称为不定积分法,或简称积分法. 把不定积分看作一种运算,它是求导(或微分)的逆运算.

6.1.2　不定积分的性质

由不定积分的定义,直接可以得到性质 1.

性质 1　$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x)$　或　$\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)\mathrm{d}x$,

$$\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \quad 或 \quad \int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C.$$

这充分说明了,求不定积分与求导数(或微分)之间的关系. 若先积分后微分

(或求导),则两者的作用互相抵消;反之,若先微分(或求导)后积分,则作用抵消后还差一个积分常数项,可简单地记述为:"先积后微,形式不变;先微后积,差个常数".

性质 2 两个函数代数和的不定积分等于它们各自的不定积分的代数和.

$$\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x. \tag{6-2}$$

证明 为了说明等式成立,只需说明等式右端的导数等于左端积分的被积函数 $f(x)\pm g(x)$就可以了.对右端求导,就有

$$\begin{aligned}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x\right]'&=\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'\pm\left[\int g(x)\mathrm{d}x\right]'\\&=f(x)\pm g(x).\end{aligned}$$

所以,式(6-2)的右端表达式是左端的被积函数的原函数.而且,右端的表达式中的不定积分式已包含积分常数,故不必另写.由此可知,式(6-2)右端确是 $f(x)\pm g(x)$的不定积分.

性质 2 可以推广到有限多个函数的情形,即有

$$\begin{aligned}&\int[f_1(x)\pm f_2(x)\pm f_3(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]\mathrm{d}x\\=&\int f_1(x)\mathrm{d}x\pm\int f_2(x)\mathrm{d}x\pm\int f_3(x)\mathrm{d}x\pm\cdots\pm\int f_n(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

性质 3 求不定积分时,被积函数中的非零常数可以提到积分号外面.

$$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x\quad(k\text{ 为常数},k\neq 0). \tag{6-3}$$

性质 3 的证明和性质 2 的证明类似.只需证明(6-3)式的右端的表达式的导数等于左端积分的被积函数即可.

练习 6.1

1. 什么是函数 $f(x)$ 的原函数?什么是 $f(x)$ 的不定积分?它们之间有什么区别与联系?

2. 填空:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int \mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}x=(\quad)$;

(2) $\int \mathrm{d}\cos x=(\quad)$;

(3) $\mathrm{d}x=(\quad)\mathrm{d}(ax+b)\quad(a\neq 0)$;

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=(\quad)\mathrm{d}\sqrt{x}$;

(5) $\dfrac{1}{1-x}\mathrm{d}x=(\quad)\mathrm{d}\ln(1-x)$;

(6) $x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = (\qquad)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x^2}$；

(7) $\sin 2x\mathrm{d}x = (\qquad)\mathrm{d}(\cos 2x)$.

3. 填括号，并计算出相应的不定积分：

(1) $(\qquad)' = 10$；　　　$\int 10\mathrm{d}x = ?$

(2) $(\qquad)' = 2\sin x$；　　　$\int 2\sin x\mathrm{d}x = ?$

(3) $\mathrm{d}(\qquad) = 5x^4\mathrm{d}x$；　　　$\int 5x^4\mathrm{d}x = ?$

4. 已知 $f'(x) = \sqrt{x}$，且 $f(1) = 1$，求 $f(x)$.

5. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln x$，求 $f'(x)$.

6.2　积分基本公式

如果 $F(x)$是函数 $f(x)$的一个原函数，即

$$F'(x) = f(x) \quad 或 \quad \mathrm{d}F(x) = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x.$$

由不定积分的定义，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C.$$

例如，因为$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$，即$\frac{x^4}{4}$是 x^3 的一个原函数，则有

$$\int x^3\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + C.$$

因为$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$，即 e^x 是 e^x 的一个原函数，有

$$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C.$$

以上两个例子表明，根据求导(或微分)与不定积分的关系，可由基本求导公式求得相应的积分公式. 下面我们把一些基本的积分公式列成一个表，通常称为基本积分表.

6.2.1　积分基本公式表

(1) $\int 0\mathrm{d}x = C$　　(C 为任意常数，下同)；

(2)
$$\int k\mathrm{d}x = kx + C,$$

特别$\int 1\mathrm{d}x = x + C$ 简写为$\int \mathrm{d}x = x + C$；

(3) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha}+C \quad (\alpha\neq -1)$;

(4) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$;

(5) $$\int a^{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}a^{x}+C \quad (a>0,a\neq 1),$$

特别有$\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C$;

(6) $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$;

(7) $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$;

(8) $\int \sec^{2}x\mathrm{d}x=\tan x+C$;

(9) $\int \csc^{2}x\mathrm{d}x=-\cot x+C$;

(10) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$;

(11) $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$;

(12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2}}}=\arcsin x+C$;

(13) $\int \frac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\arctan x+C$;

关于基本积分表,我们作如下的补充说明:

(1) 关于积分公式(4),因为 $\ln x$ 只是在 $x>0$ 时才有意义,故公式

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C,$$

仅当 $x>0$ 时才成立.但当 $x<0$ 时,由于

$$[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}(-x)'=\frac{1}{x},$$

故当 $x<0$ 时,我们有

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(-x)+C,$$

通常将 $x>0$ 和 $x<0$ 时的两个公式合并写成一个公式:

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C.$$

(2) 关于积分公式(12)、(13),都有两种不同形式的结果,但表示同一原函数簇.以公式(12)为例:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = \frac{\pi}{2} - \arccos x + C = -\arccos x + \left(C + \frac{\pi}{2}\right).$$

这里$\frac{\pi}{2}+C$也是任意常数，可记为C'，即得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C'.$$

同理

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = -\operatorname{arccot} x + C.$$

6.2.2 直接积分法

直接积分法是将被积函数进行适当的恒等变形，利用基本积分公式和不定积分性质求积分的一种方法.

例 1 求$\int (10^x - 3\sin x + 2\sqrt[3]{x})\mathrm{d}x$.

解 $\int (10^x - 3\sin x + 2\sqrt[3]{x})\mathrm{d}x$

$$= \int 10^x \mathrm{d}x - 3\int \sin x \mathrm{d}x + 2\int x^{\frac{1}{3}} \mathrm{d}x = \frac{10^x}{\ln 10} + 3\cos x + \frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} + C.$$

说明：(1) 在分项积分后，每个不定积分的结果都含有一个任意常数，但由于任意常数之和(或差)仍是任意常数，因此，只要总的写出一个任意常数就可以了.

(2) 检验积分结果是否正确，只要把结果求导，看它的导数是否等于被积函数. 从此例的结果来看，由于

$$\left(\frac{10^x}{\ln 10} + 3\cos x + \frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} + C\right)' = \left(\frac{10^x}{\ln 10}\right)' + (3\cos x)' + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}}\right)'$$
$$= 10^x - 3\sin x + 2x^{\frac{1}{3}},$$

所以结果是正确的.

例 2 求$\int (\sqrt{x}+1)\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$.

解 $\int (\sqrt{x}+1)\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$

$$= \int (x^{\frac{3}{2}} + x - 1 - x^{-\frac{1}{2}})\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x + \int x\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x - \int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^2 - x - 2x^{\frac{1}{2}} + C.$$

例 3 求$\int 2^x \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

解 $$\int 2^x e^x dx = \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C = \frac{(2e)^x}{\ln 2 + 1} + C.$$

例 4 求$\int \frac{x^4+2}{x^2+1}dx$.

解 $$\int \frac{x^4+2}{x^2+1}dx = \int \frac{x^4-1+3}{x^2+1}dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{3}{x^2+1}\right)dx$$
$$= \int x^2 dx - \int dx + 3\int \frac{dx}{x^2+1}$$
$$= \frac{1}{3}x^3 - x + 3\arctan x + C.$$

例 5 求$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

解 $$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

例 6 求$\int \sin^2\frac{x}{2}dx$.

解 $$\int \sin^2\frac{x}{2}dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos x dx$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C.$$

例 7 求$\int \tan^2 x dx$.

解 $$\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1)dx = \int \sec^2 x dx - \int dx$$
$$= \tan x - x + C.$$

例 8 求$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$.

解 $$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$$
$$= \int (\csc^2 x - \sec^2 x)dx = \int \csc^2 x dx - \int \sec^2 x dx$$
$$= -\cot x - \tan x + C.$$

例 9 求$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$.

解 $$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sec^2 x\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \sec^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan x + C.$$

练习 6.2

1. 求下列不定积分：

(1) $\int\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$；

(2) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-3\sin x+2\sqrt[3]{x}\right)\mathrm{d}x$；

(3) $\int(x^{\mathrm{e}}-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{\mathrm{e}})\mathrm{d}x$；

(4) $\int(2^x-3^x)^2\mathrm{d}x$；

(5) $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$；

(6) $\int\frac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

(7) $\int\frac{x^4}{x^2+1}\mathrm{d}x$；

(8) $\int\frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x$；

(9) $\int\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$；

(10) $\int\frac{1}{\sin^2x\cdot\cos^2x}\mathrm{d}x$；

(11) $\int\cot^2x\mathrm{d}x$；

2. 某厂生产某种产品的边际成本 $C'(x)=7+\frac{25}{\sqrt{x}}$，已知固定成本为 1000 元，求总成本函数 $C(x)$.

6.3　换元积分法

从 6.2 节看到，虽然利用恒等变形及基本积分公式可以求出不少函数的不定积分，但是还有很多积分仅凭这些公式是不能完全解决的，因而有必要进一步研究计算不定积分的方法. 本节要讨论一种基本积分方法——换元积分法，这种方法是通过适当的变量代换，使所求的不定积分简化，从而利用基本积分公式计算不定积分.

6.3.1 第一类换元法(凑微分法)

在《微积分(一)》中,我们已经讨论过复合函数的导数及微分.在此,我们将利用复合函数的微分来讨论换元积分法.

对于复合函数 $F(\varphi(x))$,设 $F'(u)=f(u)$,则有

$$\mathrm{d}F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) = f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

把此连等式中的四个部分作为被积表达式,分别求积分,可得

$$\begin{aligned}\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x &= \int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) = \int F'(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) \\ &= \int \mathrm{d}F(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C.\end{aligned}$$

若引进中间变量 $u=\varphi(x)$,则上述连等式可以改写为

$$\int f(u)u'\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}F(u) = F(u) + C \quad (u = \varphi(x)).$$

从上述分析过程,可得下述定理.

定理 1 设函数 $f(u)$ 有原函数 $F(u)$,且函数 $u=\varphi(x)$ 可导,则 $F(\varphi(x))$ 是函数 $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ 的一个原函数,即有换元积分公式

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C. \tag{6-4}$$

证明略.

由这个定理可以看出,如果积分 $\int g(x)\mathrm{d}x$ 可通过恒等变形化为 $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 的形式,那么第一类换元积分法的过程如下:

$$\begin{aligned}\int g(x)\mathrm{d}x &\xlongequal{\text{恒等变形}} \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{\text{凑微分}} \int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) \\ &\xlongequal{\text{变量代换(换元)}} \int f(u)\mathrm{d}u \\ &= F(u) + C \\ &\xlongequal{\text{变量回代}} F(\varphi(x)) + C.\end{aligned}$$

例 1 求 $\int 2\cos 2x\mathrm{d}x$.

解 被积函数中,$\cos 2x$ 是一个复合函数:$\cos 2x=\cos u$,$u=2x$.常数因子 2 恰好是中间变量 u 的导数.因此,可作变换 $u=2x$,则 $\mathrm{d}u=2\mathrm{d}x$,$\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}u$,于是