高职高专精品课程规划教材

GAOZHIGAOZHUANJINGPINKECHENGGUIHUAJIAOCAI

高等数学

工程分册

GaoDeng ShuXue
GongCheng FenCe

◆李以渝 李金丹 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等数学

工程分册

高职高专精品课程规划教材

高等数学

（工程分册）

李以渝　李金丹　主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书是根据教育部全国高等职业教育《应用数学基础》基本要求和当前高职高专数学教学实际，并结合多年教学实践而编写的. 本书的特点是简明扼要、深入浅出、便于学生学习；重视应用，联系实际；习题分为A(基础题)、B(提高题)、C(应用题、探究题)，便于分层教学. 内容包括多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数与拉普拉斯变换、线性代数初步、概率统计.

本书系高职高专精品课程规划教材高等数学系列教材之一，本系列教材包括《高等数学(基础分册)》、《高等数学(工程分册)》、《高等数学(经管分册)》、《数学建模》等四本.

本书可作为两年制或三年制高职高专各专业高等数学课程教材.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 工程分册/李以渝，李金丹主编. —北京：北京理工大学出版社，2007.3

高职高专精品课程规划教材

ISBN 978-7-5640-1019-5

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①李…②李…　Ⅲ. ①高等数学—高等学校：技术学校—教材②工程数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ. O13　TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第020911号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京圣瑞伦印刷厂
开　　本 / 787毫米×960毫米　1/16
印　　张 / 11.25
字　　数 / 192千字
版　　次 / 2007年3月第1版　2007年3月第1次印刷
印　　数 / 1～6000册　　责任校对 / 陈玉梅
定　　价 / 18.00元　　责任印制 / 母长新

高等数学（工程分册）编写委员会

主　　编　李以渝　李金丹

副主编　李　应　毛大会

编写人员　（以姓氏笔划为序）

毛大会　邓云辉　兰华龙　任树华

余川祥　张卫林　李　应　李金丹

李以渝　李耘侨　夏建军　黄非难

盛晓玲　程立群　谭和平

策　　划　戴本文　薛厚明

序

对数学教育的新认识

1. 为什么我们要重视学习数学

为什么我们从小学开始直到大学要一直学习数学？主要的原因包括：

(1)文化基础

数学与语文两大学科代表着人类两大文化：科学文化与人文文化，数学是一门特殊的科学，数学精神、数学思想、数学方法中充分显示着一般科学精神、科学思想、科学方法；

(2)大脑开发

数学、语文及科学文化、人文文化又大体对应着我们人脑的左右半脑：

人脑结构	知识特性	思维方式	学科	文化类型
左脑	分析性、逻辑性	逻辑思维	数学	科学文化
右脑	综合性、直观性	形象思维	语文	人文文化

数学学习对人脑发育有直接作用，对左右脑发展有全面作用；

(3)知识基础

数学知识已渗透于各种自然科学及许多社会科学之中，数学知识是我们学习各门科学的基础，数学语言、符号、图像、计算、估计、推理、建模等基本内容已渗透于人们日常生活与工作之中，数学成了我们的基本技能；

(4)智慧开发

数学又是最富智慧的科学，数学学习最显著的价值是培养人的思维能力，数学知识学习与解题训练中都能有意义地训练培养我们的逻辑思维与抽象思维、形象思维与直觉思维、辨证思维与系统思维；数学知识是智慧的结晶，有一般智慧内蕴，会给我们以智慧的启迪(举个简单例子，请思考“乘法的智慧”：同样两个数如 7 与 9，$7+9=16$，$7\times9=63$，为什么作乘法比作加法大许多？你想过没有，数学算法实际上等同于我们做事情的一般方法；类似“记数法的智慧”、“坐标系的智慧”、“对数方法的智慧”、“函数的智慧”……)；非智力因素方面，数学学习是困难的、富于竞争的，可以培养我们的主动性、责任感、自信心以及顽强的毅力、

一丝不苟的精神、良好的学习习惯等个性品质.

2. 我们应该如何学习数学

(1)新的数学观

数学是一门特殊的科学,数学充分显示着一般科学精神、思想和方法;数学是一种文化,它属于甚至代表科学文化;数学是最富创新性的科学,数学的研究被视为人类智力的前锋;数学是推动人类进步的最重要的思维学科之一.

(2)新的数学教育观

现代社会,数学的技术作用日益突出,学校教育随之强调数学的技术作用,数学教师也习惯于数学教育就是数学知识、数学方法的教育.但许多学生却认为学大量复杂的数学以后没有用,因而学数学兴趣不大、动力不足.对于大多数学生,现实情况确如日本著名数学教育家米山国藏所指出的:学生进入社会后,几乎没有机会应用他们在学校所学到的数学知识,因而这种作为知识的数学,通常在学生出校门不到一两年就忘掉了.他认为学数学的意义在于:不管人们从事什么业务工作,那种铭刻于头脑中的数学精神和数学思想方法,却长期地在他们的生活和工作中发挥着重要作用. 笔者则进一步认为,由新的数学观有新的教育观:数学教育的意义、价值不仅在于数学知识和方法的教育,还在于通过数学知识、方法的教育来促进人脑发育发展、培养人的科学文化素质、发展包括人的思维能力、创新能力在内的人的聪明智慧,数学学习能为人一生的可持续发展提供动力,原因正在于培养了人的这些素质.

(3)新的数学素质教育观

相应有新的数学素质教育观,即数学课程的素质教育应有"数学素质"与"一般素质"的双重意义.数学素质即数学观念、数学思维、数学语言、数学技能及应用能力等数学学科素质;一般素质包括思想素质、文化素质、思维素质、创新素质、审美素质等人的综合素质的各重要方面. 新的数学素质观,是重视数学(学科)素质教育并努力使其扩展为人的一般素质、全面素质. 例如我们重视数学知识、方法学习的同时重视探讨这些数学知识、方法背后的一般意义,在数学学习中主动感受其科学文化,进行思维开发和智慧发展,即:

数学知识→科学知识、一般知识
数学方法→科学方法、一般方法
数学思维→科学思维、一般思维
数学精神→科学精神、一般精神
数学创造→科学创造、一般创新
数学之美→科学之美、世界之美
……

(4)高职高专高等数学教育观

高职高专培养的是生产、服务一线的高级技术工人,虽然这些岗位对高等数

学知识的直接要求不高，但能否胜任工作、能否有发展能力，更在于人的素质. 相应，高职高专高等数学教材以及教法不应是大学高等数学的“压缩版”，要有自己的特色. 这就是：高等数学课程的学科性、理论性可以适当减弱，而突出应用数学思想方法、探究式学习，重点突出素质教育.

3. 关于本教材的编著

本教材是高职高专精品课程规划教材高等数学系列教材(《高等数学(基础分册)》《高等数学(工程分册)》《高等数学(经管分册)》《数学建模》)之一，是我们针对当前高职高专数学教学实际、总结自己多年高等数学教学、研究的实践与经验，参考国内外多种优秀教材，并融入上述数学教育理念的成果.

本教材是编委会全体老师共同努力的结果. 特别是请到了西南交通大学杨宁教授审阅了全书，在此一并表示谢意.

对于本书的不当之处，敬请读者指正.

李　以　渝

四川工程职业技术学院　教授

教育部高等学校教学指导委员会　委员

目　录

第 1 章　多元函数微分学

在实际生活中有很多问题与多种因素有关，反映到数学上就是多元函数问题，本章主要讨论多元函数的微分（导数）及其应用.

学习多元函数微分的概念和方法，可与一元函数微积分进行类比，注意它们的异同之处.

§ 1.1　空间解析几何基本知识

［**先行问题**］　多元函数的概念、图像等，还是要以空间直角坐标系为基础，相应还有多元函数的图像如空间平面、曲面以及用向量工具来表示等问题.

1.1.1　空间解析几何的有关概念

一、空间直角坐标系

在空间任取一点 O，以 O 为原点作三条互相垂直的数轴，这三条坐标轴分别称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为坐标轴. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，z 轴则是垂直线；按照右手定则规定 ox、oy、oz 轴的正方向，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向（图 1－1）. 这样的三条坐标轴就组成一个空间直角坐标系.

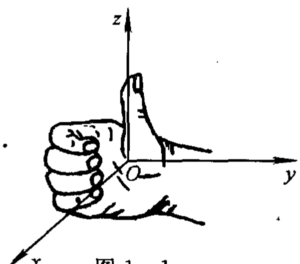

图 1－1

空间直角坐标系中任意两条坐标轴都可以确定一个平面，称为坐标平面，由 x 轴和 y 轴所确定的平面称为 xoy 平面；由 y 轴和 z 轴所确定的平面称为 yoz 平面；由 x 轴和 z 轴所确定的平面称为 xoz 平面. 三个坐标平面把整个空间分成八个部分，依次称为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限（图 1－2），坐标平面不属于任何卦限.

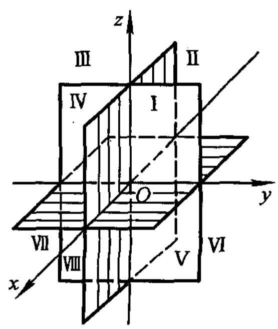

图 1－2

建立空间直角坐标系后，如果点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标分别为 x,y,z（图 1－3），则记作 M

(x,y,z)，于是可以建立起空间的点与有序实数组(x,y,z)之间的对应关系.

显然，原点的坐标为$O(0,0,0)$；x轴、y轴和z轴上的点的坐标分别为$(x,0,0)$、$(0,y,0)$、$(0,0,z)$；xoy、yoz、zox三个坐标面上的点的坐标分别$(x,y,0)$、$(0,y,z)$、$(x,0,z)$.

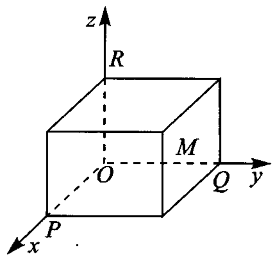

图 1—3

［课堂练习］ 在空间直角坐标系中，求点$P(1,-2,3)$关于x轴、原点、xoz平面的对称点.

二、空间两点间的距离

设$M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点，我们可用这两个点的坐标来表达它们之间的距离d. 假设线段$\overline{M_1M_2}$在xoy坐标面上的投影是$\overline{AB}$（图 1—4），过M_1点在平面M_1M_2BA内作$M_1N \parallel AB$得直角三角形M_1NM_2. 由勾股定理，有

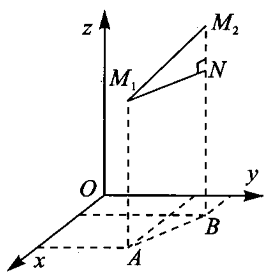

图 1—4

$$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2,$$

又由图示关系可得

$$|M_1N|^2=|AB|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

即 $|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$

及 $|NM_2|^2=(z_2-z_1)^2$

即 $|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$,

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

即为空间两点间的距离公式.

特别地，点$M(x,y,z)$到原点$O(0,0,0)$的距离

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

1.1.2 空间向量概念及运算

一、向量的概念

在空间以A为起点、B为终点的有向线段所表示的向量记为$\overrightarrow{AB}$，有时也用一个粗体字母表示向量，例如，向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$等.

向量的大小称为向量的模，向量$\overrightarrow{AB}$的模记为$|\overrightarrow{AB}|$

若向量$\boldsymbol{a}$的坐标为 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ 则$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

二、向量与数量的乘积及向量的加法与减法

利用向量的坐标，可得向量的加、减法及向量与数量乘积的运算法则：

设$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则

1° $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\}$；

2°　$\lambda \boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\},\lambda\in R$

三、两向量的数量积

1. 向量的数量积的定义和性质

定义　设向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，则称 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的数量积，也称为内积.

2. 数量积的坐标计算式

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为的坐标分别为 $\{a_x,a_y,a_z\}$、$\{b_x,b_y,b_z\}$，根据向量分解式，可以把数量积写成：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_xi+a_yj+a_zk)\cdot(b_xi+b_yj+b_zk)\\&=a_xb_xi\cdot i+a_xb_yi\cdot j+a_xb_zi\cdot k+a_yb_xj\cdot i+a_yb_yj\cdot j+\\&\quad a_yb_zj\cdot k+a_zb_zk\cdot i+a_zb_yk\cdot j+a_zb_zk\cdot k\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\end{aligned}$$

所以
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

而
$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_z^2+a_z^2},\ |\boldsymbol{b}|=\sqrt{b_x^2+b_z^2+b_z^2},$$

于是当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不是零向量时，可得

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}+\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}},$$

由此可得　$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，　即　$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$

例 1　已知向量 $\boldsymbol{a}=i+j-4k,\boldsymbol{b}=i-2j+2k$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积及夹角 $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$.

解　由公式得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\{1,1,-4\}\cdot\{1,-2,2\}=-9,|\boldsymbol{a}|=3\sqrt{2},|\boldsymbol{b}|=3,$$

$$\cos<\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-9}{3\sqrt{2}\cdot 3}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad\text{所以}\quad <\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>=\frac{3\pi}{4}$$

四、两向量的向量积

1. 向量积的定义及其性质

定义　设有两向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足：

1°　$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$；

2°　$\boldsymbol{c}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 所决定的平面，它的正方向由右手法则确定. 则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积，记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

由向量积的定义可知：

两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 相互平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$

2. 向量积的坐标计算式

设 $\boldsymbol{a}=a_xi+a_yj+a_zk,\boldsymbol{b}=b_xi+b_yj+b_zk$，利用向量积的运算规律有：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_xi+a_yj+a_zk)\times(b_xi+b_yj+b_zk)$$

$$=a_xb_x i\times i+a_xb_y i\times j+a_xb_z i\times k+a_yb_x j\times i+a_yb_y j\times j+ a_yb_z j\times k+a_zb_x k\times i+a_zb_y k\times j+a_zb_z k\times k$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)i+(a_zb_x-a_xb_z)j+(a_xb_y-a_yb_x)k$$

为了便于记忆，我们借用行列式记号，将上式表示为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

由于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$，因此，可将 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件表示为

$$a_yb_z-a_zb_y=0,a_zb_x-a_xb_z=0,a_xb_y-a_yb_x=0$$

1.1.3 平面

一、平面方程的一般式

一般地，在空间直角坐标系中，关于 x,y,z 的一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$（A,B,C 不全为零）表示空间平面，也就是说满足方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 的点在平面上，平面上的点的坐标适合方程.

1° 当 $D=0$ 时，方程 $Ax+By+Cz=0$，它表示过原点的平面；

2° 当 $C=0$ 时，方程 $Ax+By+D=0$，它表示平行于 z 轴的平面，

类似地，方程 $Ax+Cz+D=0$ 和 $By+Cz+D=0$ 分别表示平行于 y 轴和 z 轴的平面；

3° 当 $A=B=0$ 时，$Cz+D=0$，它表示平行于 xoy 面的平面，

类似地，方程 $Ax+D=0$ 和 $By+D=0$ 分别表示平行于 yoz 平面和 xoz 平面的方程；

特别地，当 $D=0$ 时，方程 $z=0$，$x=0$ 和 $y=0$ 分别为 xoy 平面，yoz 平面和 xoz 平面的方程.

二、平面方程的点法式 π

在空间直角坐标系中，方程 $Ax+By+C=0$（其中 A,B,C 不全为 0）称为平面的一般式.

如果非零向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直于平面 π，则称 $\boldsymbol{n}$ 为平面 π 的法向量.

设 $M(x,y,z)$ 为平面 π 上的任一点，平面 π 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，

$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 为其一法向量，因为 $\overrightarrow{MM_0}\perp\boldsymbol{n}$ 即 $\overrightarrow{MM_0}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 所以得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

称此方程为平面方程的点法式.

1.1.4 简单的二次曲面

一、球面方程

空间中一动点到定点的距离为定值的点的轨迹称为球面.

例 2　求以点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为球心，R 为半径的球面的方程.

解　设 $M(x,y,z)$ 为球面上任意一点，依题意，有

$$|MM_0|=R$$

由空间两点间距离公式，有

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

或

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

此即为所求之球面方程(图 1－5).

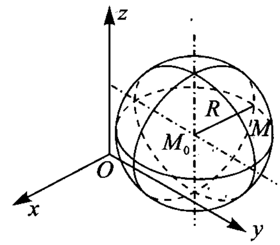

图 1－5

特别地，如果球心就是坐标原点，则球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

可见，球面方程是关于 x、y、z 的二次方程.

二、柱面

设有一动直线 l 沿一定曲线 c 移动，移动时始终保持与定直线 l' 平行，则由 l 形成的曲面称为柱面，而动直线 l 称为该柱面的母线，定曲线 c 称为该柱面的准线.

现在来建立母线平行于 z 轴的柱面方程(图 1－6). 设柱面的准线 c 是 xoy 面上的曲线，其方程为

$$F(x,y)=0$$

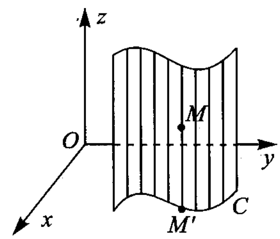

图 1－6

设 $M(x,y,z)$ 为柱面上任意一点，过 M 作柱面的母线 MM'，则母线上全部点在 xoy 面上的投影都是准线 c 上的点 M'. 所以柱面上点的竖坐标是任意的，而 x、y 坐标则满足准线方程，从而点 M 的坐标 x、y、z 也满足准线方程.

以 xoy 面上的曲线 $F(x,y)=0$ 为准线，母线平行于 z 轴的柱面方程，就是不含变量 z 的准线方程 $F(x,y)=0$. 也就是说，在空间直角坐标系中，缺 z 的方程 $F(x,y)=0$，表示母线平行于 z 轴的柱面.

同理，在空间直角坐标系中，缺 y(或缺 x)的方程 $G(x,z)=0$(或 $H(y,z)=0$)表示母线平行于 y 轴(或 x 轴)的柱面.

现在写出几个母线平行于 z 轴的柱面方程：

圆柱面方程：$x^2+y^2=a^2$

椭圆柱面方程：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (图 1－7)

抛物柱面方程：$y^2=2px(p>0)$

双曲柱面方程：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

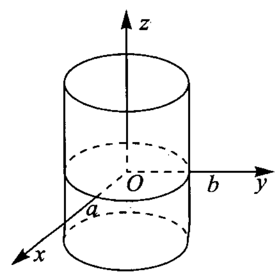

图 1－7

在空间解析几何中，如果曲面方程 $F(x,y,z)=0$ 的