College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

高等数学
证明题500例解析

◎ 徐 兵

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

高等数学证明题500例解析

徐 兵

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学证明题500例解析/徐兵主编. —北京:高等教育出版社,2007.5

ISBN 978-7-04-021399-7

Ⅰ.高… Ⅱ.徐… Ⅲ.高等数学-高等学校-解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第047970号

策划编辑 于丽娜 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 王凌波
责任绘图 尹文军 **版式设计** 张 岚 **责任校对** 殷 然
责任印制 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
总　　机	010-58581000	网上订购	http://www.landraco.com http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		

开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2007年5月第1版
印　　张	16.125	印　　次	2007年5月第1次印刷
字　　数	410 000	定　　价	20.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　21399-00

内容简介

本书是为了有效地提高学生求解高等数学证明题的效率，培养训练数学思想方法与掌握数学算理，引导学生探索证明题的基本求解思路。怎样寻找有效途径可以达到证明目的？如果题目的已知条件不变化，而证明的结论发生变化，证明的思路将发生什么变化？如果已知条件变化，而证明的结论不变，证明的思路将发生什么变化？外观形式相仿的题目，证明的思路是否相同？外观形式不同的证明题，它们的证明思路是否也不同？希望能通过这种训练，有效地提高证明题的求解能力。

本书选题范围较广。依据高等数学教学基本要求，参考研究生入学数学考试大纲，由多本高等数学习题集、考研试题、数学竞赛题中选择约500道证明题进行归类、分析。

本书适用于理工类、经济类、管理类本科生学习，也适用于备考研究生的学生选作学习证明题的参考书。

前 言

学习高等数学,要求学生掌握本学科的基本概念、基本性质和基本方法。进一步还要求学生掌握本学科的知识体系、知识框架,期望学生通过学习高等数学,提高抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想像能力、运算能力和运用所学知识分析问题和解决问题的能力。学习数学证明题是学习数学过程中的重要环节之一。数学证明问题通常是检查学生对基本知识掌握程度的重要手段,也是培养学生各种能力的有效方法之一。

有效地提高解答数学证明题的效率是学生共同的目标,也是数学教师普遍关心的问题。多年来经常看到有些数学习题集前后相隔很远的地方出现的题目,虽然外观形式差异较大,但实质是同一类题目,证明思路完全相同。学生常常是给出了前面题目的证明,但是不知道后面的题目如何下手?有些考试试题或数学竞赛题中出现的题目,是习题集中某个题目的特殊情形或推广形式,但是考生得分率很低。这从某种程度上说明学生有个共性问题:需要学习数学证明题的求解基本思想、需要学习掌握数学算理。

本书期望能解决上述问题,引导学生发掘更深层次的问题,本书的主要特色为

1. 对所选高等数学证明题进行对比、分类、归纳

将证明思路相同的题目、证明结论相同的题目、已知条件相同的题目等集中对比,归纳,以引起读者注意证明的基本思想有何变化?希望引导学生从这些数学证明问题的常见方法中,学习发现数学的基本算理,培养训练数学思想方法,本书立意引导学生思考所给问题的证明思路是什么?怎样寻找有效途径得到所要证明的结论?如果题目的已知条件不变化,而证明的结论发生变化,证明

的思路将发生什么变化？如果已知条件发生变化，而证明的结论不变，证明的思路将发生什么变化？外观形式相仿的题目，是否证明思路相同？外观形式不同的题目，是否证明的思路也不同？本书希望读者通过这种训练，有效地提高证明题的求解能力，打牢数学基础。

2. 选题范围较广

依据高等数学教学基本要求，参考研究生入学数学考试大纲，本书选题参考同济大学《高等数学习题集》，吉米多维奇《数学分析习题集》，全国研究生入学考试数学试题，北京市及部分省市大学生数学竞赛试题，美国普特南数学竞赛题及俄罗斯大学生数学竞赛题。从中选择约500题，加以对比、分类、归纳梳理。

例如，书中1.2.2第6题所给四个题设条件不变，而要证的结论发生变化。分析所给四个题目的特点，可以发现这几个题证明思想相同，当属同一类题目。

再如书中1.1.1第13题所给三个题目的外观相似，证明思想相同，但是证明的方法有较大的差异。

书中1.2.3第20题所给五个题目的题设条件不同，但证明的结论相同。由于题目的已知条件差异较大，各题的证明思想也相差较大。

1.3.2第28题中九个题的条件、结论都发生了某些变化，但是它们的证明思想是相同的。

本书将一些形似或方法相似的题目归纳到一起，意图引导读者对照学习，找出不同题目之间的共性与差异，学习分析证明方法，从而有效地提高求解证明题的能力。

本书为高等教育出版社出版的学习辅导系列之一。该系列辅导书分别从概念与性质、基本运算、证明题三个侧面编写。包括

(1)《高等数学证明题500例解析》，由北京航空航天大学徐兵教授编写。

(2)《线性代数、概率论与数理统计证明题500例解析》，由南

开大学肖马成教授、周概容教授编写。

(3)《考研数学、焦点概念与性质》,由徐兵、肖马成、周概容编写。

(4)《考研数学历年真题解析与应试对策》(理工类),由徐兵、肖马成、周概容编写。

(5)《考研数学历年真题解析与应试对策》(经济类),由徐兵、肖马成、周概容编写。

从某种意义上说,《考研数学焦点概念与性质》是针对概念与性质的专项辅导书;《考研数学历年真题解析与应试对策》是对提高运算能力有特殊作用的辅导书;《高等数学证明题500例解析》与《线性代数、概率论与数理统计证明题500例解析》是对提高求解证明题能力有明显功效的辅导书。可以说对于大学生学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计提供了一套全方位、有特色、有成效的精品辅导书.这是几位教授几十年来教学经验与教学研究的总结与积累的成果。

本书题目的顺序安排基本上与教学同步,但是个别题目需要利用后续知识才能证明,之所以将这些题目前移,是为了便于将这些题目与前面相关题目进行对比,而这些题目都加了“*”,提请读者注意。

本书适用于学习高等数学的理工类、学习微积分的经济类、管理类等本科学生学习使用,也适用于备考硕士研究生的学生选作复习参考书。

本书得到北京航空航天大学教务处热情支持,并列入北京航空航天大学教材规划,为本书的完成起到有力的促进作用。

作者于北京航空航天大学

2006年12月

目　录

第一篇　证　明　题

第二篇　证明题解析

第一篇

证　明　题

第一章 极限与连续性

▶▶ 1.1.1 极限

1. 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$,利用极限定义证明$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.

2. 设数列$\{x_n\}$满足$|x_{n+1}| \leqslant q|x_n|(n=1,2,\cdots)$,其中$0<q<1$.利用极限定义证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

变式 1 设数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lambda < 1$,证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

变式 2 设$x_n > 0(n=1,2,\cdots)$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 0$,证明数列$\{x_n\}$从某项起为单调减少.

3. 利用极限定义证明:$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$的充分必要条件为$\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = A$.

4. 利用极限定义证明:单调数列$\{x_n\}$收敛于a的充分必要条件是存在子数列$\{x_{n_k}\}$收敛于a.

5. 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$($l$为有限数或$l=\pm\infty$).证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = l$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n} = l$;

*(3) 当$a_n>0(n=1,2,\cdots)$时,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n} = l$.

6. 试证下列数列$\{x_n\}$存在极限,并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$:

(1) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k+1)!}$;

(2) $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}$.

7. 设 $a_n=\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\varphi}{2^n}$,试证数列 $\{a_n\}$ 存在极限,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

8. 试证下列数列 $\{x_n\}$ 存在极限:

(1) $x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$;

(2) $x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$;

(3) $x_n=(1+a)\cdot(1+a^2)\cdot\cdots\cdot(1+a^{2^n})$,其中 $|a|<1$;

(4) $x_n=(1+a)\cdot(1+a^2)\cdot\cdots\cdot(1+a^n)$,其中 $|a|<1$.

9. (1) 设 $a<b,x_0=a,x_1=b$ 及 $x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2},n=2,3,\cdots$. 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{a+2b}{3}$;

(2) 设 $a_1=1,a_2=2$ 且 $a_{n+2}=\frac{2a_na_{n+1}}{a_n+a_{n+1}}(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

10. 设 $x_1=1,x_2=2,x_{n+2}=\sqrt{x_nx_{n+1}}(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

11. 证明下列数列 $\{x_n\}$ 存在极限,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$:

(1) $x_1=1,x_{n+1}=\sqrt{2x_n}\quad(n=1,2,\cdots)$;

(2) $x_1=\sqrt{2},x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\quad(n=1,2,\cdots)$.

12. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant q^n(n=1,2,\cdots)$,其中 $0<q<1$. 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

13. 证明下列数列 $\{x_n\}$ 存在极限,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$:

(1) $x_1=10,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\quad(n=1,2,\cdots)$;

(2) $x_1=0, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\quad(n=1,2,\cdots)$;

(3) $x_1>-6, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\quad(n=1,2,\cdots)$.

14. (1) 设 $x_0>0, x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}(n=0,1,2,\cdots)$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$;

(2) 设 $x_1=2, x_2=2+\dfrac{1}{x_1},\cdots,x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n},\cdots$. 证明数列 $\{x_n\}$ 存在极限,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

15. 设 $0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在,并求此极限.

16. 设 $A>0, x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{A}{x_n}\right)(n=1,2,\cdots)$. 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

17. 证明下列数列 $\{x_n\}$ 存在极限,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$:

(1) $x_1>0$ 且 $x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}\quad(n=1,2,\cdots)$;

(2) $x_1>0$ 且 $x_{n+1}=\dfrac{A(1+x_n)}{A+x_n}\quad(n=1,2,\cdots)$,其中 $A>0$.

18. 设 $0<x_n<1, x_{n+1}^2=-x_n^2+2x_n(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

19. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求该极限.

变式　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin[\sin(\cdots\sin x)]}_{(n重)}$.

20. 设 $x_0=m, x_{n+1}=m+\varepsilon\sin x_n(n=0,1,2,\cdots)$. 证明有 $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$,且数 ξ 为方程

$$x-\varepsilon\sin x=m\quad(0<\varepsilon<1)$$

的唯一根.

21. 证明下列数列$\{y_n\}$存在极限,并求$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$:

(1) $y_1=\dfrac{x}{2}(0\leqslant x\leqslant 1),y_n=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y_{n-1}^2}{2}(n=2,3,\cdots)$;

(2) $y_1=\dfrac{x}{2}(0\leqslant x\leqslant 1),y_n=\dfrac{x}{2}-\dfrac{y_{n-1}^2}{2}(n=2,3,\cdots)$.

22. 若 $x_1=a>0,y_1=b>0(a<b)$,且 $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$,$y_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+y_n)$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

23. 设 $a_k\geqslant 0(k=1,2,\cdots,r)$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_r^n}$存在,并求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_r^n}$.

24. 证明下列数列$\{x_n\}$存在极限,并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$:

(1) $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+i}$;

*(2) $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+i^2}$;

*(3) $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n^2}\dfrac{n}{n^2+i^2}$.

25. 判定下列数列$\{x_n\}$是否存在极限,如果存在极限,求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$:

(1) $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+i}}$;

(2) $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n^2}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+i}}$;

*(3) $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+i^2}}$.

*26. 证明下列数列$\{x_n\}$存在极限,并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$:

(1) $x_n=\ln\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)}$;

(2) $x_n = \ln \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k \cdot \left(1+\frac{2}{n}\right)^k \cdots \left(1+\frac{n}{n}\right)^k}$,$k$ 为正整数.

*27. 证明下列数列$\{x_n\}$存在极限,并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$:

(1) $x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \sin \frac{i}{n}\pi$;

(2) $x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n+\frac{i}{n}} \sin \frac{i}{n}\pi$.

28. 设函数$f(x)$定义于$(a,+\infty)$上,且在每一个有限区间(a,b)内是有界的. 证明

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} [f(x+1)-f(x)].$$

29. 设$f(x)$对于$(-\infty,+\infty)$内的任意两点x,y,恒有

$$|f(x)-f(y)| \leqslant q|x-y|,$$

其中$0<q<1$. 任取$x_0 \in (-\infty,+\infty)$,令$x_n = f(x_{n-1})$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$存在,且$f(x^*)=x^*$.

►► 1.1.2 连续性

1. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,$f(x)$在点$x=0$处连续,且对一切实数x_1,x_2有

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2),$$

试证$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内处处连续.

2. 证明黎曼函数

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{n}, x=\frac{m}{n}, \text{其中 } m \text{ 和 } n \text{ 为互质数}, \\ 0, x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

当x取任一个有理数时是不连续的,而当x取任一个无理数时是连续的.

3. 若$f(x)$,$g(x)$都是连续函数,试证:

(1) $|f(x)|$为连续函数;

(2) $F(x)=\min\{f(x),g(x)\}$为连续函数;

(3) $G(x)=\max\{f(x),g(x)\}$为连续函数.

4. (1) 证明单调有界函数的一切不连续点均为第一类间断点;

(2) 若单调有界函数$f(x)$可以取到$f(a)$与$f(b)$之间的一切值,则$f(x)$在$[a,b]$上连续.

5. 设函数$f(x)$在$(0,1)$内有定义,且函数$e^x f(x)$与$e^{-f(x)}$在$(0,1)$内都是单调增加函数.证明:$f(x)$在$(0,1)$内为连续函数.

6. (1) 设$f(x)$在$(0,+\infty)$内连续,且$f(x^2)=f(x)$ $(x>0)$.试证$f(x)$在$(0,+\infty)$内为常数;

(2) 设$f(x)$在其定义区间内连续,且在有理点处值为零,试证$f(x)$在其定义区间内恒为零;

(3) 若$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,且对x,y的一切实数值满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

试证$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内为线性函数$f(x)=ax$,其中$a=f(1)$;

(4) 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,且对x,y的一切实数值满足

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y).$$

试证$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内不恒等于零时,一定为指数函数$f(x)=a^x$,其中$a=f(1)$;

(5) 设$f(x)$在$(0,+\infty)$内连续,且对x,y的一切正实数值满足

$$f(xy)=f(x)+f(y).$$

试证$f(x)$在$(0,+\infty)$内不恒等于零时,一定为对数函数$f(x)=\log_a x$,其中a为正常数;

(6) 设$f(x)$在$(0,+\infty)$内连续,且对x,y的一切正实数值