最新世界各国
数学奥林匹克中的
平面几何试题

The Lastest Plane Geometry Questions in Mathematical Olympiads in The World

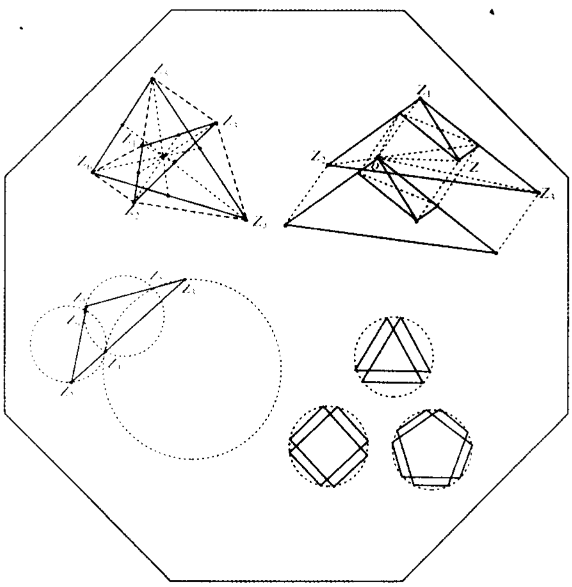
刘培杰 主 编
李志敏 副主编

哈尔滨工业大学出版社

最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题

The Lastest Plane Geometry Questions in Mathematical Olympiads in The World

刘培杰　主　编
李志敏　副主编



哈爾濱工業大學出版社

内容简介

本书精选了近年来国内外数学奥林匹克中的几何试题,并将其分为有关直线形的试题和有关圆的试题两部分,通过对真题的实践训练,可激发兴趣、启迪思维,提高参赛者的实战能力。本书适用于参加初高中数学奥林匹克竞赛的选手及教练员,也适用于平面几何爱好者。

图书在版编目(CIP)数据

最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题/刘培杰主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2007.1

ISBN 978-7-5603-2460-9

Ⅰ.最… Ⅱ.刘… Ⅲ.平面几何-习题 Ⅳ.0123.1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 004596 号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 李广鑫
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本 787mm×1092mm　1/16　印张 16　插页 1　字数 287 千字
版　　次 2007 年 3 月第 1 版　2007 年 3 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-2460-9
印　　数 1~4 000 册
定　　价 38.00 元

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版图书目录

书　　名	出版时间	定　　价
平面几何证明方法全书	2005-09	35.00
平面几何证明方法全书习题解答	2005-09	25.00
500 个最新世界著名数学智力趣题	2005-12	48.00
数学奥林匹克与数学文化（第一辑）	2006-05	48.00
历届 IMO 试题集（1959—2005）	2006-05	58.00
中考数学专题总复习	2006-08	28.00
新编中学数学解题方法全书（高中版）上卷	2006-10	38.00
新编中学数学解题方法全书（高中版）中卷	2006-10	48.00
从毕达哥拉斯到怀尔斯	2006-10	48.00
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释（上、下）	2006-12	68.00
中等数学英语阅读文选	2006-12	38.00
统计学专业英语	2007-03	28.00
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007-03	28.00
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007-03	38.00

联系地址：哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号哈尔滨工业大学出版社
邮　　编：150006
联系电话：0451-86281378　　13904613167
E-mail：lpj1378@yahoo.com.cn

目录

第一章　有关直线形的试题

① 设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $AB = c, BC = a, CA = b$. a, b, c 互不相等, AD, BE, CF 分别为 $\triangle ABC$ 的三条内角平分线,且 $DE = DF$. 证明:

(1) $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b}$;

(2) $\angle BAC > 90°$.

(2003 年中国女子数学奥林匹克)

证明　(1) 如图 1,由正弦定理得

$$\frac{\sin\angle AFD}{\sin\angle FAD} = \frac{AD}{FD} = \frac{AD}{ED} = \frac{\sin\angle AED}{\sin\angle DAE}$$

则
$$\sin\angle AFD = \sin\angle AED$$

故 $\angle AFD = \angle AED$,或 $\angle AFD + \angle AED = 180°$. 若 $\angle AFD = \angle AED$,则

$$\triangle ADF \cong \triangle ADE, AF = AE$$

于是
$$\triangle AIF \cong \triangle AIE, \angle AFI = \angle AEI$$

从而, $\triangle AFC \cong \triangle AEB$. 故 $AC = AB$. 矛盾. 所以, $\angle AFD + \angle AED = 180°$, A, F, D, E 四点共圆. 于是, $\angle DEC = \angle DFA > \angle ABC$.

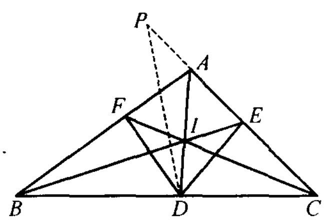


图 1

在 CA 的延长线上取一点 P,使得 $\angle DPC = \angle ABC$,则

$$PC = PE + CE \quad ①$$

由 $\angle BFD = \angle PED, FD = ED$,得 $\triangle BFD \cong \triangle PED$. 故

$$PE = BF = \frac{ac}{a+b}$$

又 $\triangle PCD \backsim \triangle BCA$,则 $\dfrac{PC}{BC} = \dfrac{CD}{CA}$. 于是

$$PC = a \cdot \frac{ba}{b+c} \cdot \frac{1}{b} = \frac{a^2}{b+c} \quad ②$$

$$CE = \frac{ab}{a+c} \quad ③$$

由 ①,②,③ 得
$$\frac{a^2}{b+c} = \frac{ac}{a+b} + \frac{ab}{c+a}$$

所以
$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

(2) 由(1) 的结论有

$$a(a+b)(a+c) = b(b+a)(b+c) + c(c+a)(c+b)$$
$$a^2(a+b+c) = b^2(a+b+c) + c^2(a+b+c) + abc >$$

$$b^2(a+b+c)+c^2(a+b+c)$$

因为 $a^2 > b^2 + c^2$.所以 $\angle BAC > 90°$.

②证明:若凸四边形 $ABCD$ 内任意一点 P 到边 AB,BC,CD,DA 的距离之和为定值,则 $ABCD$ 是平行四边形.

(2003 年中国西部数学奥林匹克)

证明 如图 2,用记号 $d(P,l)$ 表示点 P 到直线 l 的距离.先证一个引理:设 $\angle SAT = \alpha$ 是一个定角,则 $\angle SAT$ 内一动点 P 到两边 AS,AT 的距离之和为常数 m 的轨迹是线段 BC,其中 $AB = AC = \frac{m}{\sin\alpha}$.若点 P 在 $\triangle ABC$ 内,则点 P 到两边 AS,AT 的距离之和小于 m;若点 P 在 $\triangle ABC$ 外,则点 P 到两边 AS,AT 的距离之和大于等于 m.

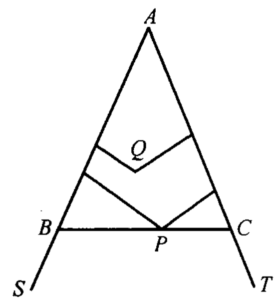


图 2

引理的证明:事实上,由 $S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PAC} = S_{\triangle ABC}$,知

$$d(P,AB) + d(P,AC) = m$$

如图 2,若点 Q 在 $\triangle ABC$ 内,由 $S_{\triangle QAB} + S_{\triangle QAC} < S_{\triangle ABC}$,得

$$d(Q,AB) + d(Q,AC) < m$$

若点 Q 在 $\triangle ABC$ 外,$S_{\triangle QAB} + S_{\triangle QAC} > S_{\triangle ABC}$,得

$$d(Q,AB) + d(Q,AC) > m$$

下面回到原题.

1) 若四边形 $ABCD$ 的两组对边都不平行,不妨设 BC 与 AD 相交于点 F,BA 与 CD 相交于点 E.过点 P 分别作线段 l_1,l_2,使得 l_1 上的任意一点到 AB,CD 的距离之和为常数,l_2 上的任意一点到 BC,AD 的距离之和为常数,如图 3 所示.则对于区域 S 内任意一点 Q,有

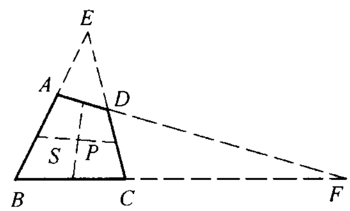


图 3

$$\begin{gathered}d(P,AB)+d(P,BC)+d(P,CD)+d(P,DA)=\\ d(Q,AB)+d(Q,BC)+d(Q,CD)+d(Q,DA)=\\ [d(Q,AB)+d(Q,CD)]+[d(Q,BC)+d(Q,DA)]>\\ [d(P,AB)+d(P,CD)]+[d(P,BC)+d(P,DA)]\end{gathered}$$

矛盾.

2) 若四边形 $ABCD$ 是梯形,也可推得矛盾.

③已知 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R.若

$$\frac{a\cdot\cos\alpha + b\cdot\cos\beta + c\cdot\cos\gamma}{a\cdot\sin\beta + b\cdot\sin\gamma + c\cdot\sin\alpha} = \frac{a+b+c}{9R}$$

其中,a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的三边长,α,β,γ 分别为 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的角度数,求 α,β,γ 的值.

(2002 ~ 2003 年匈牙利数学奥林匹克)

解　如图4,有

$$9R(a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma)=$$
$$18(S_{\triangle ABO}+S_{\triangle ACO}+S_{\triangle BCO})=18S_{\triangle ABC}$$

另一方面,由切比雪夫(Chebyshev)不等式有

$$(a+b+c)(a\cdot\sin\beta+b\cdot\sin\gamma+c\cdot\sin\alpha)\geqslant$$
$$3(ab\cdot\sin\gamma+bc\cdot\sin\alpha+ca\cdot\sin\beta)=18S_{\triangle ABC}$$

等号成立等价于

$$a:b:c=b\cdot\sin\gamma:c\cdot\sin\alpha:a\cdot\sin\beta$$

又因为　$ab\cdot\sin\gamma=ca\cdot\sin\beta=bc\cdot\sin\alpha$

所以 $a=b=c$,故 $\alpha=\beta=\gamma=60°$.

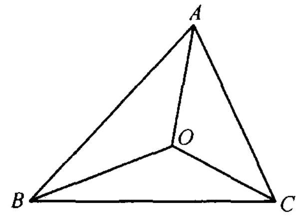


图4

④ 由小三角形 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 拼成三角形 H,它们的内切圆半径分别为 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 和 r,证明:$r\leqslant r_1+r_2+\cdots+r_n$.

(2002～2003年匈牙利数学奥林匹克)

证明　如图5,对任意一个小角形 $H_i(i=1,2,\cdots,n)$,它的半周长 p_i 小于等于 $\triangle ABC$ 的半周长 p,则由面积关系式

$$pr=S_{\triangle ABC}=S_{H_1}+S_{H_2}+\cdots+S_{H_n}=$$
$$p_1r_1+p_2r_2+\cdots+p_nr_n\leqslant p(r_1+r_2+\cdots+r_n)$$

就有　$$r\leqslant r_1+r_2+\cdots+r_n$$

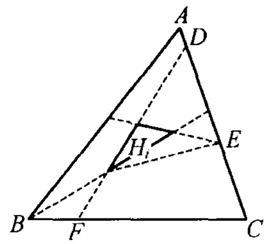


图5

⑤ 已知 $\triangle ABC$,由顶点 A 分别向 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的平分线引垂线,垂足分别为 A_1 和 A_2.同理,定义 B_1,B_2 和 C_1,C_2.证明:$2(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)=AB+BC+CA$.

(2002～2003年匈牙利数学奥林匹克)

证明　如图6,易知 $\angle B,\angle C$ 的平分线的交点为内心 I,过点 I 分别作 AB,AC,BC 的垂线交三边于 F,E,D.

因为 $\angle AA_2C=\angle AA_1B=90°$,所以,$A,A_2,I,A_1$ 四点共圆,且 AI 为此圆的直径.由弦角关系,有

$$A_2A_1=AI\cdot\sin\angle A_2IA_1$$

因为 $\angle A_2IA_1=180°-\left(\frac{\angle ABC}{2}+\frac{\angle ACB}{2}\right)=90°+\frac{\angle BAC}{2}$

所以　$$A_2A_1=AI\cdot\cos\frac{BAC}{2}=AF$$
$$2A_2A_1=AF+AE$$

同理　$2B_1B_2=BD+BF,2C_1C_2=CD+CE$

因此　$2(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)=AB+BC+CA$

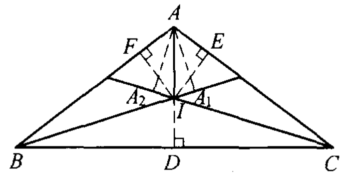


图6

⑥ 平面上的点集 H 称为是好的，如果 H 中任意3个点都存在一条对称轴，使得这3个点关于这条对称轴对称. 证明：

(1) 一个好的集合不一定是轴对称的；

(2) 如果一个好的集合中恰有2 003个点，则这2 003个点在一条直线上.

(2002 ~ 2003年匈牙利数学奥林匹克)

证明 (1) 如图7，$\triangle ABC$，$\triangle ADC$，$\triangle BCD$ 均为等腰三角形，A，B，D 也共线. 所以，任意三个点皆有一条对称轴. 故它是一个好的集合. 但是 A，B，C，D 不是轴对称的.

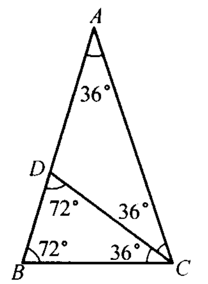


图7

(2) 反证法. 假设结论不成立. 于是，不可能有集合中的6个点共线. 否则，在这条直线外必有1个属于集合的点 K，过点 K 作此直线的垂线，则此直线上必有至少3个点在这条垂线的同侧，记为 A，B，C(图8).

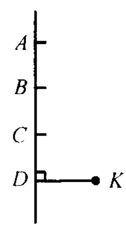


图8

因为 $\angle KCB$，$\angle KBA > \frac{\pi}{2}$，所以，$AC > BC$.

由于 K，C，B 有对称轴，则 $BC = CK$.

同理，$AC = CK$，矛盾. 故不可能有集合中的6个点共线.

不妨设 A，B 为这个集合中距离最短的两个点(图9). 则其余2 001个点有以下4种情况：

1) 在线段 AB 中垂线上；

2) 在 AB 所在直线上；

3) 在以 A 为圆心，AB 长为半径的圆上；

4) 在以 B 为圆心，AB 长为半径的圆上.

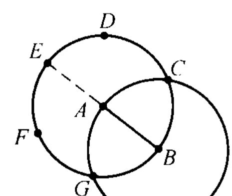


图9

由前面的证明可知，1)，2)两种情况点的总数不超过10个. 又因为 AB 的距离最小，所以，3)，4)两种情况点的总数不超过10个.

故 $10 + 10 + 2 < 2\ 003$. 矛盾.

因此，结论成立.

⑦ 设 H 是锐角 $\triangle ABC$ 的高线 CP 上的任一点，直线 AH，BH 分别交 BC，AC 于点 M，N.

(1) 证明：$\angle NPC = \angle MPC$；

(2) 设 O 是 MN 与 CP 的交点，一条通过 O 的任意的直线交四边形 $CNHM$ 的边于 D，E 两点. 证明：$\angle EPC = \angle DPC$.

(2003年保加利亚数学奥林匹克)

证明 (1) 记 $\angle NPC = \varphi_1$，$\angle MPC = \varphi_2$. 则

$$\frac{S_{\triangle NPC}}{S_{\triangle NPA}} = \frac{CN}{AN} = \frac{CP \cdot PN \cdot \sin\varphi_1}{AP \cdot PN \cdot \cos\varphi_1} = \frac{CP \cdot \sin \varphi_1}{AP \cdot \cos \varphi_1}$$

所以
$$\tan \varphi_1 = \frac{CN}{AN} \cdot \frac{AP}{CP}$$

同理
$$\tan \varphi_2 = \frac{CM}{BM} \cdot \frac{BP}{CP}$$

于是,$\tan \varphi_1 = \tan \varphi_2$ 等价于
$$\frac{CN}{AN} \cdot \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BM}{CM} = 1$$

在 $\triangle ABC$ 中,利用塞瓦(Ceva)定理,取直线 AM,BN,CP 就可得到上式.

(2) 记 $\angle NPC = \angle MPC = \varphi$.

欲证结论,只须证明
$$\frac{\sin(\varphi - x)}{\sin x} = \frac{\sin(\varphi - y)}{\sin y}$$

其中,$x = \angle EPO, y = \angle DPO$.

事实上,后者等价于
$$\frac{\sin \varphi \cdot \cos x - \cos \varphi \cdot \sin x}{\sin x} = \frac{\sin \varphi \cdot \cos y - \cos \varphi \cdot \sin y}{\sin y} \Leftrightarrow$$
$$\cot x = \cot y \Leftrightarrow x = y$$

假定 $E \in NH, D \in CM$.则
$$\frac{NE}{EH} = \frac{S_{\triangle NEP}}{S_{\triangle EHP}} = \frac{NP \cdot \sin(\varphi - x)}{PH \cdot \sin x}$$

因此
$$\frac{\sin(\varphi - x)}{\sin x} = \frac{NE}{EH} \cdot \frac{PH}{NP} \quad ①$$

同理可得
$$\frac{\sin(\varphi - y)}{\sin y} = \frac{DM}{CD} \cdot \frac{CP}{PM} \quad ②$$

利用 ① 和 ② 只须证明
$$\frac{NE}{EH} \cdot \frac{CD}{DM} \cdot \frac{PH}{CP} \cdot \frac{MO}{NO} = 1 \quad ③$$

因为 PO 是 $\triangle NPM$ 的角平分线,即$\frac{PM}{PN} = \frac{MO}{NO}$.又因为
$$\frac{NE}{EH} = \frac{S_{\triangle NEO}}{S_{\triangle EHO}} = \frac{NO \cdot \sin \delta}{OH \cdot \sin \psi}$$
$$\frac{CD}{DM} = \frac{S_{\triangle CDO}}{S_{\triangle DMO}} = \frac{CO \cdot \sin \psi}{OM \cdot \sin \delta}$$

其中,$\delta = \angle MOD, \psi = \angle EOP$.于是,式 ③ 可简化为
$$\frac{OC}{OH} \cdot \frac{PH}{PC} = 1$$

分别对 $\triangle BHC$ 和直线 MN,$\triangle CHM$ 和直线 AB,$\triangle BHM$ 和直线

AC 应用梅涅劳斯定理,可得

$$\frac{BN}{NH}\cdot\frac{HO}{OC}\cdot\frac{CM}{MB}=1$$

$$\frac{CP}{PH}\cdot\frac{HA}{AM}\cdot\frac{MB}{BC}=1$$

$$\frac{HN}{NB}\cdot\frac{BC}{CM}\cdot\frac{MA}{HA}=1$$

三式相乘得
$$\frac{OC}{OH}\cdot\frac{PH}{PC}=1$$

⑧ P 是 $\triangle ABC$ 内的一点,直线 AC,BP 相交于 Q,直线 AB,CP 相交于 R.已知 $AR=RB=CP,CQ=PQ$.求 $\angle BRC$.

(2003 年日本数学奥林匹克)

解 如图 10,设 S 是线段 CR 上的点,且使得 $RS=CP$.因为 $CQ=PQ$,所以

$$\angle ACS=\angle QPC=\angle BPR$$

因为 $RS=CP$,所以

$$SC=CR-RS=CR-CP=RP$$

考虑 $\triangle ABQ$ 与直线 CR,由梅涅劳斯定理有

$$\frac{RB}{AR}\cdot\frac{PQ}{BP}\cdot\frac{AC}{CQ}=1$$

又因为 $AR=RB,CQ=PQ$,则$\frac{AC}{BP}=1$.所以,$AC=BP$.因此,$\triangle ACS\cong\triangle BPR$.故 $AS=BR$.

由 $RS=CP$ 和已知有 $AS=AR=RS$.因此,$\angle ARS=60^\circ$.故 $\angle BRC=120^\circ$.

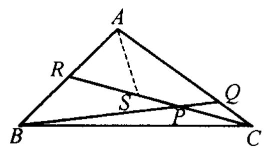


图 10

⑨ 在锐角 $\triangle ABC$ 中,点 A,B 到对边垂线的垂足分别为 H_a,H_b.$\angle A,\angle B$ 的平分线分别交对边于点 W_a,W_b.证明:$\triangle ABC$ 的内心 I 在线段 H_aH_b 上当且仅当外心 O 在 W_aW_b 上.

(2002 ~ 2003 年德国数学奥林匹克)

证明 先给出一个熟知的引理:任一锐角三角形相似于两条高线的垂足与第三个顶点构成的三角形.

如图 11,要证原结论,只须证

$$I\in H_aH_b\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\cos\gamma=\frac{a+b}{a+b+c}\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\cos\gamma=\cos\alpha+\cos\beta\overset{(3)}{\Leftrightarrow}O\in W_aW_b$$

其中,α,β,γ 为 $\triangle ABC$ 的三个内角.

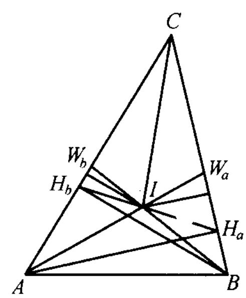


图 11

注:(1) 在 $\triangle BH_bC$ 中,$CH_b = a \cdot \cos\gamma$.

同理,$CH_a = b \cdot \cos\gamma$.

由引理知,$\triangle H_aH_bC \backsim \triangle ABC$.则

$$\frac{CH_b}{CB} = \frac{a \cdot \cos\gamma}{a} = \cos\gamma$$

因此 $$S_{\triangle H_bH_aC} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos^2\gamma$$

由角平分线定理有

$$I \in H_aH_b \Leftrightarrow S_{\triangle CH_bH_a} = S_{\triangle CH_bI} + S_{\triangle CIH_a} \Leftrightarrow$$

$$S_{\triangle ABC} \cdot \cos^2\gamma = \frac{1}{2}ra \cdot \cos\gamma + \frac{1}{2}rb \cdot \cos r \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}r(a+b+c)\cos^2\gamma = \frac{1}{2}r(a+b)\cos\gamma \Leftrightarrow$$

$$\cos\gamma = \frac{a+b}{a+b+c}$$

(2) $a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta, b = a \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\alpha$.

(3) 如图 12,在 $\triangle OM_bC$ 中,$M_bO = R \cdot \cos\beta$.

同理,$M_aO = R \cdot \cos\alpha, M_cO = R \cdot \cos\gamma$.所以

$$O \in W_aW_b \Leftrightarrow S_{\triangle CW_bW_a} = S_{\triangle CW_bO} + S_{\triangle COW_a} \Leftrightarrow$$

$$S_{\triangle ABC} \cdot \frac{a}{a+c} \cdot \frac{b}{b+c} =$$

$$\frac{ab}{2(a+c)} \cdot R \cdot \cos\beta +$$

$$\frac{ab}{2(b+c)} \cdot R \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}aR \cdot \cos\alpha + \frac{1}{2}bR \cdot \cos\beta + \frac{1}{2}cR \cdot \cos\gamma\right) \cdot$$

$$\frac{a}{a+c} \cdot \frac{b}{b+c} =$$

$$\frac{1}{2}Rab\left(\frac{\cos\beta}{a+c} + \frac{\cos\alpha}{b+c}\right) \Leftrightarrow \cos\gamma = \cos\alpha + \cos\beta$$

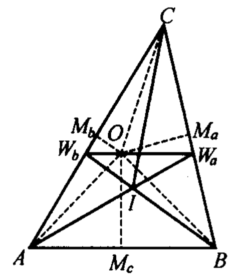


图 12

⑩ 在 $\square ABCD$ 中,M,N 分别在 AB,BC 上,且 M,N 不与端点重合,$AM = NC$. 设 AN 与 CM 交于点 Q. 证明:DQ 平分 $\angle ADC$.

(2002 ~ 2003 年德国数学奥林匹克)

证明 如图 13,有

$$S_{\triangle AQC} = S_{\triangle AMC} - S_{\triangle AMQ} = S_{\triangle CNA} - S_{\triangle CNQ}$$

记点 Q 到 AB,BC,CD,DA 的距离分别为 h_a,h_b,h_c,h_d.从而

$$\frac{1}{2}AM(h_a + h_c) - \frac{1}{2}AM \cdot h_a =$$

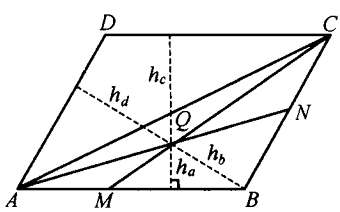


图 13

$$\frac{1}{2}CN(h_b + h_d) - \frac{1}{2}CN \cdot h_b \Leftrightarrow \frac{1}{2}AM \cdot h_c = \frac{1}{2}CN \cdot h_d$$

由 $AM = CN \neq 0$ 知，$h_c = h_d$，即 Q 在 $\angle ADC$ 的平分线上.

⑪ 对于任意三角形都有两条边的边长之差不超过这个三角形周长的六分之一.请判断此命题是否成立.

（阿拉尼·丹尼尔竞赛）

证明 假设命题不成立.

不妨设不满足结论的三角形三边长为 a,b,c，且 $a>b>c$，则大边与小边差均大于三角形周长的六分之一，于是有

$$c > a - b > \frac{a+b+c}{6}$$

$$b > c + \frac{a+b+c}{6} > \frac{a+b+c}{3}$$

$$a > b + \frac{a+b+c}{6} > \frac{a+b+c}{2}$$

所以，$a+b+c > a+b+c$.矛盾.

因此，命题成立.

⑫ 已知 $\triangle ABC$，且边 AC,BC 中点的连线为 l_c，$\angle A,\angle B$ 的平分线分别交直线 l_c 于 M,N.同理，在直线 l_b 上定义 K,L；在直线 l_a 上定义 P,Q.证明：

$$2(MN + KL + PQ) = AB + BC + CA$$

（阿拉尼·丹尼尔竞赛）

证明 如图 14，有

$$QE = BE = \frac{c}{2}, PF = CF = \frac{b}{2}, EF = \frac{a}{2}$$

所以 $$PQ = QE + PF - EF = \frac{b+c-a}{2}$$

同理 $$MN = \frac{a+b-c}{2}, KL = \frac{a+c-b}{2}$$

因此 $$2(MN + KL + PQ) = AB + BC + CA$$

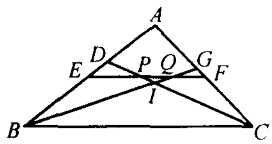


图 14

⑬ 如图 15，已知锐角 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 的中点分别为 A_1,B_1,C_1.分别由 A_1,B_1,C_1 向 $\triangle ABC$ 的另外两条边作垂线，相应的交点分别为 A_2,B_2,C_2.证明：六边形 $A_1C_2B_1A_2C_1B_2$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的一半.

（2003 年德国数学奥林匹克）

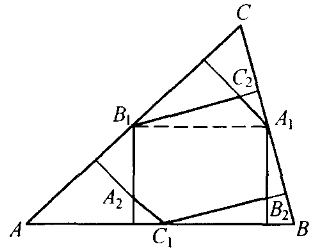


图 15

证明　如图16,联结 A_1B_1,B_1C_1,C_1A_1,作 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三条高 A_1A_3,B_1B_3,C_1C_3.设 $\triangle A_1B_1C_1$ 的垂心为 H.

因为 $B_1H\perp AC,C_1A_2\perp AC$,则 $B_1H\parallel C_1A_2$.

同理,$C_1H\parallel B_1A_2$.

所以,$B_1A_2C_1H$ 是平行四边形.从而 $S_{\triangle B_1A_2C_1}=S_{\triangle B_1C_1H}$.

同理 $S_{\triangle A_1B_2C_1}=S_{\triangle A_1C_1H},S_{\triangle A_1B_1C_2}=S_{\triangle A_1B_1H}$.因此

$$S_{六边形A_1C_2B_1A_2C_1B_2}=2S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$$

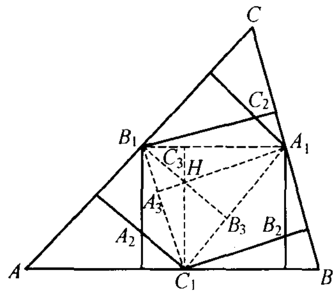


图 16

⑭ 在一条直线上按 A,B,C 的次序排列着三个点,且 $AB=8,AC=18$.D 为直线外一点,且 $DA\perp AB$.求 AD 等于多少时,$\angle BDC$ 有最大值?

(2003年新加坡数学奥林匹克)

解　如图17,设 $AD=x$.在 $\triangle ADC$ 中,$\tan\angle 1=\frac{x}{8}$,$\tan\angle 2=\frac{x}{18}$.于是可得

$$\tan\alpha=\tan(\angle 1-\angle 2)=\frac{\tan\angle 1-\tan\angle 2}{1+\tan\angle 1\cdot\tan\angle 2}=$$

$$\frac{\frac{x}{8}-\frac{x}{18}}{1+\frac{x}{8}\times\frac{x}{18}}=\frac{10}{\frac{144}{x}+x}\leqslant\frac{10}{2\sqrt{144}}=\frac{5}{12}$$

因此,当 $x=12$ 时,$\tan\alpha$ 有最大值 $\frac{5}{12}$,即 α 有最大值 $\arctan\frac{5}{12}$.

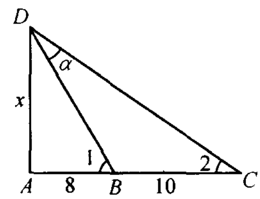


图 17

⑮ 已知梯形 $ABCD,AB\parallel CD$.若高为2,$AB=2,CD=4$,且 AB 的中点为 M.当边 CD 上的点 N 移动时,求 $\triangle ANB$ 和 $\triangle DMC$ 公共部分的面积的最大值.

(2003年新加坡数学奥林匹克)

解　如图18,设

$$AN\cap DM=E,MC\cap BN=F,DN=x$$

则 $S_{四边形MENF}=S_{\triangle MEN}+S_{\triangle MFN}=$

$$\frac{EN}{AN}\cdot S_{\triangle AMN}+\frac{FN}{BN}\cdot S_{\triangle BMN}=$$

$$\frac{x}{1+x}\times 1+\frac{4-x}{5-x}\times 1=2-$$

$$\frac{1}{1+x}-\frac{1}{5-x}=2-\frac{6}{-x^2+4x+5}=$$

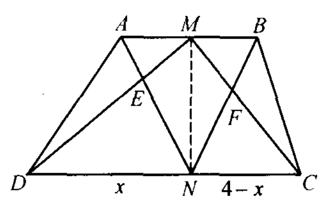


图 18

$$2+\frac{6}{(x-2)^2-9}\leqslant 2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

当 $x=2$ 时,上式等号成立.

⑯ 已知一个角的一条边上有 1 001 个不同的点 $A_0,A_1,\cdots,A_{1\,000}$,另一条边上也有 1 001 个不同的点 $B_0,B_1,\cdots,B_{1\,000}$,且满足

$$A_0A_1=A_1A_2=\cdots=A_{999}A_{1\,000}$$
$$B_0B_1=B_1B_2=\cdots=B_{999}B_{1\,000}$$

若四边形 $A_0A_1B_1B_0$ 和四边形 $A_1A_2B_2B_1$ 的面积分别为 5 和 7,求四边形 $A_{999}A_{1\,000}B_{1\,000}B_{999}$ 的面积.

(2003 年白俄罗斯数学奥林匹克)

解 如图 19,设四边形 $A_{k-1}A_kB_kB_{k-1}$ 的面积为 $S_k,k=1,2,\cdots,1\,000$.

由于

$$S_{\triangle B_{k-2}A_{k-2}B_{k-1}}=\frac{1}{3}S_{\triangle B_{k-2}A_{k-2}B_{k+1}}$$
$$S_{\triangle A_{k+1}B_{k+1}A_k}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_{k+1}B_{k+1}A_{k-2}}$$

则 $$S_{\triangle B_{k-2}A_{k-2}B_{k-1}}+S_{\triangle A_{k+1}B_{k+1}A_k}=\frac{1}{3}(S_{k-1}+S_k+S_{k+1})$$

因为 $$S_{\triangle A_{k-2}B_{k-1}A_{k-1}}=S_{\triangle A_{k-1}B_{k-1}A_k},S_{\triangle B_{k-1}A_kB_k}=S_{\triangle B_kA_kB_{k+1}}$$

所以 $$\begin{aligned}S_{k-1}+S_k+S_{k+1}=&(S_{\triangle B_{k-2}A_{k-2}B_{k-1}}+S_{\triangle A_{k+1}B_{k+1}A_k})+\\&(S_{\triangle A_{k-2}A_{k-1}B_{k-1}}+S_{\triangle A_{k-1}B_{k-1}A_k})+\\&(S_{\triangle B_{k-1}A_kB_k}+S_{\triangle A_kB_kB_{k+1}})=\\&\frac{1}{3}(S_{k-1}+S_k+S_{k+1})+\\&2(S_{\triangle A_{k-1}B_{k-1}A_k}+S_{\triangle A_kB_kB_{k-1}})=\\&\frac{1}{3}(S_{k-1}+S_k+S_{k+1})+2S_k\end{aligned}$$

于是 $$S_k=\frac{1}{2}(S_{k-1}+S_{k+1})$$

故 $S_1,S_2,\cdots,S_{1\,000}$ 是等差数列.

因为公差为 $S_2-S_1=7-5=2$,所以

$$S_{1\,000}=S_1+999(S_2-S_1)=5+999\times 2=2\,003$$

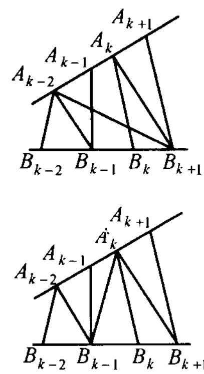


图 19

⑰ 已知圆内接四边形 $ABCD$ 满足 $AB = BC = AD + CD$，$\angle BAD = \alpha, AC = d$.求 $\triangle ABC$ 的面积.

(2003 年白俄罗斯数学奥林匹克)

解 设 M 是 AD 延长线上的点，且满足 $DM = DC$，又设 $AD = x, CD = y, AB = z$.因为 $\angle CDM = \angle ABC$，所以，$\triangle DCM \backsim \triangle BAC$.

设 $k = \frac{CD}{AB} = \frac{y}{z}$.则

$$CM = k \cdot AC = kd, S_{\triangle CDM} = k^2 \cdot S_{\triangle ABC}$$

$$S_{\triangle CDM} = \frac{y}{x + y} \cdot S_{\triangle ACM} = \frac{y}{z} \cdot S_{\triangle ACM} = k \cdot S_{\triangle ACM}$$

由于 $\angle DCM = \angle BCA$，所以

$$\angle ACM = \angle BCD = 180^\circ - \alpha$$

故

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{k^2} \cdot S_{\triangle DCM} = \frac{1}{k^2} \cdot k \cdot S_{\triangle ACM} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2} AC \cdot CM \cdot \sin \angle ACM = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2} d \cdot kd \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin \alpha$$

⑱ 若三角形和矩形有相等的周长和面积，则称它们是“孪生的”.证明：对于给定的三角形，存在“孪生的”矩形，该矩形不是正方形，且较长的边与较短的边之比至少为 $\lambda - 1 + \sqrt{\lambda(\lambda - 2)}$，其中 $\lambda = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(2003 年白俄罗斯数学奥林匹克)

证明 设矩形的边长分别为 x, y，三角形的半周长为 p，面积为 S.则这个三角形和矩形是“孪生的”充分必要条件是

$$\begin{cases} x + y = p \\ xy = S \end{cases} \quad ①$$

方程组 ① 有实根的充分必要条件是 $p^2 \geqslant 4S$.

由 p 和 S 是正数可知这两个根均为正根.因为

$$\frac{p^2}{S} = \frac{(x + y)^2}{xy} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2$$

设 $\frac{x}{y} = t$，则有

$$t^2 - \left(\frac{p^2}{S} - 2\right) t + 1 = 0$$

易知该方程有实数根的充分必要条件是 $p^2 \geqslant 4S$. 于是,矩形与三角形是"孪生的" 充分必要条件是矩形边的较大的比为

$$t = \frac{p^2}{2S} - 1 + \sqrt{\frac{p^2}{2S}\left(\frac{p^2}{2S} - 2\right)}$$

其中,$p^2 \geqslant 4S$.

设 a,b,c 是三角形的三边长,由均值不等式和海伦公式,有

$$\frac{p}{3} = \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \geqslant$$

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt[3]{\frac{S^2}{p}}$$

所以,$\frac{p^2}{S} \geqslant 3\sqrt{3}$,且三角形为正三角形时,等号成立. 故易知 $\frac{p^2}{S}$ 的变化区域为$[3\sqrt{3}, +\infty)$.

设$\frac{p^2}{2S} = \lambda$. 则这个矩形与三角形是"孪生的" 充分必要条件是矩形边的较大的比为 $\lambda - 1 + \sqrt{\lambda(\lambda - 2)}$,其中 $\lambda \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

因为对于 $\lambda \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$,函数 $t = \lambda - 1 + \sqrt{\lambda(\lambda - 2)}$ 是单调增加的. 于是,可得矩形与三角形是"孪生的" 充分必要条件是矩形边的较大的比大于等于 $\lambda - 1 + \sqrt{\lambda(\lambda - 2)}$,其中 $\lambda = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

因此,对任意三角形均存在一个"孪生的" 矩形.

⑲ 已知凸五边形 $ABCDE$ 满足 $AB = BC, CD = DE$, $\angle ABC = 150°$, $\angle CDE = 30°$, $BD = 2$. 求五边形 $ABCDE$ 的面积.

(2003 年白俄罗斯数学奥林匹克)

解 如图 20,设点 K 是点 C 关于直线 BD 的对称点. 则

$$BK = BC = BA, DK = DC = DE$$

作 $\angle ABK$ 和 $\angle EDK$ 的平分线,且交于点 M. 于是,BM 是 AK 的中垂线,DM 是 EK 的中垂线. 特别地,有 $MA = MK = ME$,即 M 是 $\triangle AKE$ 的外心. 因为

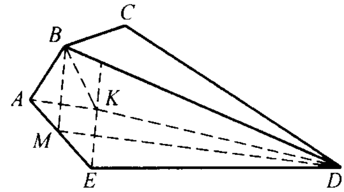


图 20

$$\angle MBD = \angle MBK + \angle KBD = \frac{1}{2}\angle ABK + \frac{1}{2}\angle KBC = \frac{1}{2}\angle ABC$$

$$\angle MDB = \frac{1}{2}\angle CDE$$

则$\angle MBD + \angle MDB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle CDE) = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$