全国十二大考研辅导机构指定用书

金榜®考研数学系列

全国硕士研究生入学考试用书

数学全程预测100题

理工类

SHUXUE QUANCHENGYUCE 100TI (LIGONGLEI)

主编　李永乐

- 100题模拟　把握重点命题方向
- 60题经典　囊括基本解题技巧
- 100＋60>>160　真情回馈金榜读者

2008

新华出版社

全国十二大考研辅导机构指定〕

金榜®考研数学系列

全国硕士研究生入学考试用书

数学全程预测100题 理工类

SHUXUE QUANCHENGYUCE 100TI (LIGONGLEI)

主编　李永乐

编者：清 华 大 学　　刘庆华
北 京 大 学　　刘西垣
北 京 大 学　　李正元
清 华 大 学　　李永乐
北京交通大学　　赵达夫
东北财经大学　　龚兆仁
(按姓氏笔画排序)

新 华 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据
数学全程预测100题:理工类/李永乐主编
北京:新华出版社,2007.8
全国硕士研究生入学考试用书
ISBN 978-7-5011-8060-8
Ⅰ.数… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-习题 Ⅳ.013-44
中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第128638号

敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,请读者注意识别。

数学全程预测100题(理工类)

责任编辑:白云覃
装帧设计:金榜图文设计室
出版发行:新华出版社
网　　址:http://www.xinhuapub.com
地　　址:北京石景山区京原路8号
邮　　编:100040
经　　销:新华书店
印　　刷:北京云浩印刷有限责任公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:13.75
字　　数:326千字
版　　次:2007年9月第1版
印　　次:2007年9月第1次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5011-8060-8
定　　价:20.00元

本社购书热线:(010)63077122　中国新闻书店电话:(010)63072012
图书如有印装质量问题,请与印刷厂联系调换　电话:(010)82570560

前　　言

本书是理工类硕士研究生入学考试强化训练阶段的复习用书。本书是针对考生在前一个阶段，对考研数学的常见题型、方法复习基础上设计的重要解答题。它是“基础过关 660 题”的姐妹篇。旨在对考生在考前进行系统综合训练，以期巩固、提高复习成果，帮助考生查漏补缺进而吃透考试要求，增强应试能力，提高考试成绩。

我们在认真研究历年试题的基础上，对考试的重点、难点以及对考生常出的错误加以剖析和归纳整理，用抓住基础突出重点的方法，设计出不同解题思路层次的试题整合成书。本书**解答**——有思路、方法步骤清晰详细、规范的解题过程；**评注**——该题所考查的知识点(或命题意图)，解题思路归纳总结和延伸，常见错误和注意事项。同时，在解题过程中，力求一题多解，注意扩展考生视野和思路。

数学离不开计算，考研也非常重视对计算能力的考查。因此，考生复习时要注意提高运算能力，要提高计算的准确性，不仅要动脑而且要动手，不能华而不实，眼高手低，丢三落四，犯“低级”错误。

研究生考试科目从 2003 年调整之后，数学科的权重在原有基础上增加了 50%，因此数学成绩对总分将有更大的影响，数学科的地位愈显重要，同时由于数学科本身的特点，考生的数学成绩历年来差别较大，这说明数学科的考试选拔性质更突出。因此，希望考生们要根据考试大纲认真踏实全面系统地复习，心态要平和，戒浮躁，要循序渐进，不断积累步步提高，面对激烈的竞争，望有志者抓紧抓细抓早。

同学们在使用本书时，最好能先自己动手想与算，不要急于看解答，评注中的一些题外话亦值得细心揣摩。

本书也可供大专院校的学生在学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计时参考。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者
2007 年 9 月

目　　录

高等数学

1 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内可导，且 $f(0)=1$，$f'(0)=2$. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{n}{1-f\left(\frac{1}{n}\right)}}.$$

2 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x-(\tan x)f(x)}{x^3}=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6-f(x)}{x^2}$.

3 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$.

4 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1>0$，$x_n=\sqrt{5+4x_{n-1}}\,(n=2,3,4,\cdots)$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

5 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}, & x<0,\\[2mm] \dfrac{x(x+1)}{x^2-1}, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的间断点，并判断其类型.

6 已知 $f(x)=3x^2+ax^{-3}\,(a>0)$，若 $x>0$ 时，总有 $f(x)\geqslant 45$ 成立，试求 a 的取值范围.

注：1～6 题答案见 39～44 页

7 证明:$x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1(n>1)$,在$(0,1)$内必有唯一实根 x_n,并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

8 设函数 $f(x)$ 在$(a,+\infty)$内有二阶导数,且 $f(a+1)=0$, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=0$. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 求证:在$(a,+\infty)$内至少存在一点 ξ,使 $f''(\xi)=0$.

9 设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续,且 $f(x)\geqslant 0$,$f(1)=0$,求证:存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x$.

10 设函数 $F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,$f(0)=0$,又 $f'(0)$ 存在且 $f'(0)=1$. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}$.

11 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$ 求证:

(Ⅰ)$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上具有二阶连续导数;

(Ⅱ)$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调增加;

(Ⅲ)$y=f(x)$ 的图像是$(-\infty,+\infty)$上的凹弧.

12 证明不等式$\dfrac{2x}{x+2}<\ln(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$对任何 $x>0$ 成立.

13 求证:当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时,$x^2\cos x<\sin^2 x$.

注:7 ~ 13 题答案见 44 ~ 50 页

14 设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 0$. 求证：存在满足 $0 < \xi < \eta < 1$ 的 ξ,η 使得 $f(\xi) = f(\eta) = 0$.

15 设函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + 2x$，求常数 a,b,c 使得 $f(x)$ 在 $x = -2$ 取得极值，且 $x = c$ 是 $f(x)$ 的驻点而不是 $f(x)$ 的极值点.

16 证明：当 $x > 0, a > 0$ 时，$\mathrm{e}^{-x}(x^2 - 2ax + 1) < 1$.

17 证明：$\left(\ln \frac{1+x}{x} - \frac{1}{1+x}\right)^2 < \frac{1}{x(1+x)^2} \quad (x > 0)$.

18 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且 $f(a) = 0, f(b) > 0$，又知它在 $x = a$ 处的一阶右导数 $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$.

求证：(Ⅰ) 在(a,b)内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi) = 0$.

(Ⅱ) 在(a,b)内至少存在一点 η，使 $f''(\eta) > 0$.

19 设函数 $f(x)$ 在区间$(a, +\infty)$内可导(其中 $a > 0$ 常数)，且 $\lim\limits_{x \to +\infty}[2f(x) + f'(x)] = 1$.

求证：(Ⅰ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{2x} f(x) = +\infty$.

(Ⅱ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

注：14 ～ 19 题答案见 51 ～ 54 页

20 设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，又对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x+y)=f(x)e^{y}+f(y)e^{x}$.

(Ⅰ) 证明:若 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续;

(Ⅱ) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导;

(Ⅲ) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导,求 $f(x)$ 的表达式.

21 设 $f(x)$ 为非负连续函数且 $f(x)\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\sin^4 x$,求 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的平均值.

22 计算 $I=\int_1^2\left(\frac{1}{x\ln^2 x}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x$.

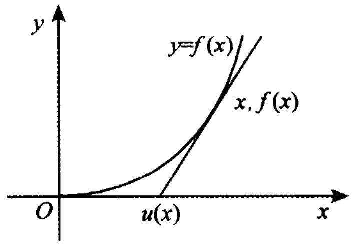
23 设 $f(x)+\sin^4 x=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)\mathrm{d}x$,求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

24 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2\sin\frac{x}{t}\left[g\left(2x+\frac{1}{t}\right)-g(2x)\right]$,$g(x)$ 的一个原函数为 $\ln(x+1)$,计算定积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

25 求证:方程 $\ln x=\frac{x}{e}-\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 内只有两个不同的实根.

注:20 ～ 25 题答案见 55 ～ 59 页

26 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上具有二阶连续导数，且 $f(0)=f'(0)=0, f''(x)>0$. 如图9－1所示，若对任意的 $x>0$，用函数 $u(x)$ 表示曲线在切点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.



9-1

（Ⅰ）写出函数 $u(x)$ 的表达式，并求 $\lim\limits_{x\to 0^+}u(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0^+}u'(x)$；

（Ⅱ）求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{u(x)}f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$.

27 （Ⅰ）求证：若 $f(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的连续偶函数，则 $\int_{-a}^{a}\dfrac{f(x)\mathrm{d}x}{1+e^x}=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$；

（Ⅱ）计算定积分 $\int_{-1}^{1}\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+e^x)(1+x^2)}$.

28 求 $I_n=\int_0^1(\arcsin x)^n\mathrm{d}x, n=0,1,2\cdots$

29 计算反常积分：

（Ⅰ）$\int_0^{+\infty}\dfrac{(e^x-2)\mathrm{d}x}{e^{2x}+e^x+1}$；

（Ⅱ）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\tan x}+\dfrac{1}{\sqrt{\tan x}}\right)\mathrm{d}x$.

30 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的导函数，求证：

$$\max_{x\in[a,b]}\{|f(x)|\}\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

注：26 ～ 30 题答案见 60 ～ 64 页

31 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有连续导数,且存在常数 λ 使得 $h(x)=\lambda f(x)+f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加. 求证:

(Ⅰ) 对任何正数 $a<b$,存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\int_a^b h(x)e^{\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{h(\xi)}{\lambda}[e^{\lambda b}-e^{\lambda a}]$;

(Ⅱ) 设 $g(x)=f'(x)e^{\lambda x}$,则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

32 把由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $x+y\geqslant 2$ 确定的平面图形记为 D,求图形 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

33 已知抛物线通过 x 轴上的两点 $A(1,0)$,$B(3,0)$.

(Ⅰ) 求证:两坐标轴与该抛物线所围成的面积等于 x 轴与该抛物线所围成的面积;

(Ⅱ) 计算上述两个平面图形绕 x 轴旋转一周所产生的两个旋转体体积之比.

34 对于 $x\geqslant 0$,证明:$f(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t$($n$ 为自然数) 的最大值不超过 $\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

35 设 $f(x)$ 连续,$\psi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$,且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$($A$ 为常数),求 $\psi'(x)$,并讨论 $\psi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

注:31 ~ 35 **题答案见** 65 ~ 68 **页**

36 设函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=1$，且满足等式 $f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$.

（Ⅰ）求 $f'(x)$

（Ⅱ）证明：当 $x\geqslant 0$ 时，$\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

37 设 $f(x)$ 在$[0,1]$ 可导，且 $|f'(x)|\leqslant M$.

证明：$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2n}$，其中 $n\in N$.

38 设函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+(f'(x))^2=2\sin x$，试讨论 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可能取得极值或拐点，并说明理由.

39 （Ⅰ）求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$

（Ⅱ）证明函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上有界.

40 设函数 $y(x)$，满足

$$\begin{cases}y'(x)+3\int_0^x y'(t)\mathrm{d}t+2x\int_0^1 y(tx)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}=0\\ y(0)=1\end{cases}$$

试求此函数 $y(x)$.

41 设 $f'(x)=\arcsin(x-1)^2$ 及 $f(0)=0$，求$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

注：36～41 题答案见 70～74 页

42 设 $u=u(x,y)$ 有连续的二阶偏导数,且满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,u(x,2x)=x,u'_x(x,2x)=x^2,$$

求 $u''_{xx}(x,2x),u''_{xy}(x,2x),u''_{yy}(x,2x)$.

43 设 $y=y(x),z=z(x)$,由方程组

$$\begin{cases}z=f(x,y)g(x,y)\\F(x,y,z)=0\end{cases}$$

所确定,其中 f,g 具有连续的偏导数.试求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

44 设函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$ 上具有二阶连续导数,且 $u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ 当 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$ 时满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (*)$$

与 $f(1)=f'(1)=1$,求函数 $f(r)$ 的表达式.

45 设函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,且满足 $f(0,0)=1,f'_x(0,0)=2,f'_y(0,0)=-3$ 以及 $f''_{xx}(x,y)=y,f''_{xy}(x,y)=x+y,f''_{yy}(x,y)=x$,求函数 $f(x,y)$ 的表达式.

46 确定正数 A 的最小值与负数 B 的最大值,使得不等式

$$\frac{B}{xy}\leqslant\ln(x^2+y^2)\leqslant A(x^2+y^2)$$

在区域 $D=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$ 内成立.

注:42 ~ 46 题答案见 75 ~ 79 页

47 求椭圆 $5x^2+4xy+2y^2=6$ 上的点与坐标原点 $O(0,0)$ 距离的最大值与最小值.

48 计算二重积分 $\iint\limits_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$,其中积分区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,函数 $f(x,y)=z(\sqrt{x^2+y^2})$,且函数 $z(r)$ 当 $r\geqslant 0$ 时具有二阶连续导数,并满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}.$$

49 把积分次序为首先对 z 积分,其次对 y 积分,最后对 x 积分的累次积分

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

分别改写成积分次序为首先对 y 积分,其次对 z 积分,最后对 x 积分的累次积分与积分次序为首先对 x 积分,其次对 y 积分,最后对 z 积分的累次积分.

50 计算曲面积分

$$I(h)=\iint\limits_S \frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}},$$

其中曲面 S 的方程是 $x^2+y^2+z^2=R^2$,常数 $R>0,h>0$ 且 $h\neq R$.

51 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_S (x+y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中曲面块 S 是 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 满足 $z\leqslant 1$ 那一部分的内侧.

注:47 ～ 51 **题答案见** 80 ～ 85 **页**

52 计算曲线积分

$$I=\oint_{L}(y-z^{2})\mathrm{d}x+(z-x^{2})\mathrm{d}y+(x-y^{2})\mathrm{d}z,$$

其中 L 是半球面 $z=\sqrt{4-x^{2}-y^{2}}$ 与平面 $x+z=2$ 的交线,从 z 轴的正向往负向看去,L 的方向沿逆时针方向。

53 设 Ω 是由曲面 $z=8-x^{2}-y^{2}$ 与平面 $z=2x$ 围成的空间区域,求 Ω 的体积 V.

54 设 $f(x)$ 满足 $f(x)=x^{2}+x\int_{0}^{x^{2}}f(x^{2}-t)\mathrm{d}t+\iint\limits_{D}f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是以$(-1,-1)$,$(1,-1)$ 和$(1,1)$ 为顶点的三角形区域,且 $f(1)=0$,求$\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

55 设 $f(x)$ 是$[0,1]$ 上单调减的正值函数,证明:

$$\frac{\int_{0}^{1}xf^{2}(x)\mathrm{d}x}{\int_{0}^{1}xf(x)\mathrm{d}x}\leqslant\frac{\int_{0}^{1}f^{2}(x)\mathrm{d}x}{\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x}$$

56 设闭区域 $D:x^{2}+y^{2}\leqslant y,x\geqslant 0$. $f(x,y)$ 为 D 上的连续函数,且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^{2}-y^{2}}-\frac{8}{\pi}\iint\limits_{D}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

求 $f(x,y)$.

57 试证抛物面 $z=1+x^{2}+y^{2}$ 上任意点处的切平面与抛物面 $z=x^{2}+y^{2}$ 所围的立体的体积与切点坐标无关.

注:52 ~ 57 题答案见 86 ~ 93 页

58 计算$\iiint\limits_{\Omega} \left| \sqrt{x^2+y^2+z^2}-1 \right| \mathrm{d}V$,其中 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围成的立体.

59 曲线积分

$$I_1=\int_{AmB}(x+y)^2\mathrm{d}x-(x-y)^2\mathrm{d}y,$$

$$I_2=\int_{AnB}(x+y)^2\mathrm{d}x-(x-y)^2\mathrm{d}y,$$

其中 AmB 为连接点 $A(1,1)$,$B(2,6)$ 的直线段,AnB 为过 A,B 点及坐标原点的抛物线弧.

求 I_1-I_2.

60 计算曲线积分

$$\int_L \frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

其中 L 是以(1,0)为圆心,2为半径的圆的上半圆周,方向是沿逆时针方向.

61 计算曲线积分

$I=\int_L(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$,其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和柱面 $x^2+y^2=ax\ (a>0)$ 的交线位于 xOy 平面上方部分,从 z 轴上点 $(b,0,0)\ (b>a)$ 看去,L 的方向是顺时针的.

注:58 ~ 61 题答案见 94 ~ 97 页