全国硕士研究生入学考试考题排行榜系列丛书

出现频率最高的100种典型题型精解精练

数学三

- 研究常考题型是考试过关的捷径
- 实战预测试卷是加分致胜的法宝

汪志宏 彭宜青 王伦夫 编著

2009 考研必备

巧学、巧练、巧过关

清华大学出版社

全国硕士研究生入学考试考题排行榜系列丛书

出现频率最高的100种典型题型

精解精练——数学三

汪志宏 彭宜青 王伦夫 编著

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

考研作为一种选拔性水平考试，试题规范，规律性很强，不少题型反复出现，把这些反复出现的题型按考试出现频率整理归类，并提供解题思路，可以帮助考生节省宝贵的复习时间，提高应试效率，对考生迎考大有帮助。本书正是基于这一思路，由资深考研辅导老师精心编写而成。

全书共分 8 章，第 1~7 章归纳整理了最常考的 100 种典型题型，具体内容包括：一元函数微积分、无穷级数、微分方程与差分方程、多元函数微分与二重积分、线性代数、概率论及数理统计，第 8 章为全国硕士研究生入学考试数学三全真预测试题及其参考解答。每种题型分为三个板块：真题分析、题型点睛和即学即练。真题分析以历届考研真题为实例进行分析，旨在让读者彻底明白这类题型的解法；题型点睛浓缩了该题型的要点，并加以讲解与点评，便于读者理解与记忆；即学即练中作者设计了部分试题，让读者即学即练，即练即会，以达到举一反三的功效。本书附录给出了各章即学即练试题的详细解析与参考答案。

本书以广大考研读者为主要对象，帮助考生在短时间内获取较大收益，同时可作为考研辅导班的培训教材以及高等院校相关师生的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

出现频率最高的 100 种典型题型精解精练. 数学. 3/汪志宏，彭宜青，王伦夫编著. 一北京：清华大学出版社，2007.12

（全国硕士研究生入学考试考题排行榜系列丛书）

ISBN 978-7-302-16640-5

I.出…　II.①汪…②彭…③王…　III.高等数学—研究生—入学考试—解题　IV.G643-44.

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 200469 号

责任编辑： 丁庆翔
责任校对： 李玉茹
责任印制： 科　海
出版发行： 清华大学出版社　　**地　　址：** 北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编：** 100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机： 010-62770175　　**邮购热线：** 010-62786544
投稿咨询： 010-62772075　　**客户服务：** 010-62776969
印 装 者： 北京市艺辉印刷有限公司
经　　销： 全国新华书店
开　　本： 185×260　**印　　张：** 17.75　**字　　数：** 431 千字
版　　次： 2008 年 2 月第 1 版　　**印　　次：** 2008 年 2 月第 1 次印刷
印　　数： 1~5000
定　　价： 25.00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：82896445　　产品编号：027039-01

前　言

读考题排行榜　走成功捷径路

全国硕士研究生入学考试试题是广大工作在教学一线的骨干教师和参加命题的专家教授的智慧和劳动结晶，考试试题既反映了考试大纲对考生知识、能力等的要求，又蕴含着考研命题的基本原则和趋势，对于广大准备考研的考生而言，也是一笔宝贵财富。

为了给广大考生提供一套高效实用的试题导航标准应试教材，我们在广泛调研和充分论证的基础上，听取资深专家及众多考生的建议，组织编写了这套《全国硕士研究生入学考试考题排行榜系列丛书》，其目的是帮助考生在复习阶段，浓缩考试中出现频率最高的题型，“把书读薄”，以做到成竹在胸，引导考生在短时间内快速突破过关。

✦ 丛书书目

丛书第一批推出 8 本：

- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数学一
- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数学二
- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数学三
- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数学四
- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数据结构
- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——C 语言程序设计
- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——操作系统
- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——电路

✦ 关于本书

本书通过深入分析历年真题特点，归纳整理出了硕士研究生“数学三”入学考试常考的 100 种题型，并依据考试大纲的章节顺序，将这 100 种题型分成 7 章进行解析与点评，便于考生更快地了解和掌握复习的重点，发现命题的规律，明确复习方向，节省宝贵的复习时间。由于某些题型几乎是年年出现，所以本书可以令考生更高效地复习与掌握必考题型与知识点。这也正是本书的最大特色：省时、高效、高命中率。

书中将全国几十所重点高校近 10 年考研试卷中的同一题型试题，归纳整理成 100 种高频题型（即 TOP1~TOP100），对每种题型进行了详细分析并给出参考解答，便于考生复习该内容时可以了解：这种题型考过什么样的题目，常与哪些知识点联系起来出题，从哪个角度命题，等等。每种题型具体分为如下三个板块：

- 真题分析。以重点高校近 10 年的考研真题为实例，分析解题思路，实际就是进行破题，最终找出解题方法。分析以后给出详细的解答，旨在让考生掌握解题方法和技巧，以及这些方法技巧在每个具体问题中的灵活运用，彻底明白这类题型的解法。
- 题型点睛。浓缩该题型的要点，给出该题型的相关知识点和解题的一般方法或步骤，并加以讲解分析，便于考生理解与记忆。
- 即学即练。给出部分试题，让考生学过“真题分析”和“题型点睛”后就进行做题练习，以便更快更好地掌握所练题型的相关知识点和解题的一般方法或步骤，以达到举一反三、触类旁通的功效。

本书还提供了 3 套全国硕士研究生入学考试数学三全真预测试题并附有具体的参考解答，可以供考生在考前实战演练。为了让考生及时掌握自己的学习效果，书中最后还给出了“即学即练”中试题的具体解答，以便考生自查。

✦ 读者对象

本套丛书以全国硕士研究生入学考试考生为主要读者对象，特别适合希望在较短时间内取得较大收获的广大应试考生，也可作为相关考试培训班的培训教材，以及高校师生的教学参考书。

✦ 关于作者

丛书由一线教学及考试研究专家分工编写。作者均长期从事这方面的教学和研究工作，积累了丰富的经验，对研究生入学考试颇有研究（其中大多数编写者多年参加真题阅卷及相关培训与辅导工作）。本书由汪志宏、彭宜青和王伦夫执笔编写而成。另外，参与本丛书组织、指导、编写、审校和资料收集的人员有（以姓氏笔划为序）：石雪梅、刘志高、孙建东、余雪勇、吴蕾、张宏、李千目、李勇智、李海、杜松、杨帮华、汪胡青、罗玮、费宁、徐倩、袁堃、葛武滇等，在此对诸位作者付出的辛勤劳动表示衷心的感谢。

✦ 特别致谢

在此，首先对丛书所选用的参考文献的著作者，以及丛书所引用试题的出题教师和相关单位表示真诚的感谢。

✦ 互动交流

由于时间仓促，书中不妥之处，敬请广大读者批评指正。读者的进步，是我们最大的心愿。您如果发现书中有任何疑惑之处，请与我们交流。

作者的联系方式：iteditor@126.com。
出版社的联系方式：feedback@khp.com.cn

作者

2008 年 1 月

目　录

第 1 章　一元函数微积分

TOP1：求1^∞型数列极限

【真题分析】

【真题 1】（2002, 3 分）设常数$a\neq\frac{1}{2}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$______.

分析：极限是$\ln(1^\infty)$形式，所以要用特殊极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$转化形式求解.

解答：$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)}\right\}^{\frac{n}{n(1-2a)}}$，

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\frac{1}{1-2a}$.

【题型点睛】

1．利用重要极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$求$1^\infty$型数列未定式极限方法：

（1）将数列未定式化为　$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{[1+f(n)]^{\frac{1}{f(n)}}\right\}^{\varphi(n)}$（$n\to\infty$时，$f(n)\to0$，$\varphi(n)\to a$）;

（2）原极限等于e^a.

2．利用洛必达法则求1^∞型数列未定式极限的一般步骤：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

（1）将n换成x，有新的未定式$\lim\limits_{x\to\infty}\left\{[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}\right\}^{\varphi(x)}$；

（2）再取自然对数，化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式；

（3）求出新未定式的极限A；

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\left\{[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}\right\}^{\varphi(x)}=\mathrm{e}^A$，原极限等于$\mathrm{e}^A$.

【即学即练】

1.（1998, 3 分）设曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$ ______.

TOP2：求 $\frac{0}{0}$ 型极限

【真题分析】

【真题 1】（2002, 5 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$.

分析：直接利用洛必达法则求解.

解答：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\,\mathrm{d}t}{1-\cos x+x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\arctan(1+x^2)}{\sin x+\sin x+x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\arctan(1+x^2)}{\frac{2\sin x}{x}+\cos x}=\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}$$

【题型点睛】

1．求未定式 $\frac{0}{0}$ 型的极限可以利用洛必达法则，利用洛必达法则求该极限的一般步骤：

（1）判断未定式是否是 $\frac{0}{0}$ 型，若不是，化成该型；

（2）分子分母同时求导，适当化简再判断是否是 $\frac{0}{0}$ 型，若不是，化成该型；

（3）最后得出结果.

2．其他类型的未定式 $0\cdot\infty$、$\infty-\infty$ 型可利用变量代换、通分等方法直接化为 $\frac{0}{0}$ 型，再计算.

3．在利用洛必达法则求未定式 $\frac{0}{0}$ 型的极限时，有时同等价无穷小量结合起来，可大大简化运算．如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\mathrm{e}^x-1)\tan x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$.

4．特殊的可以利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=1$$

5．还可以采用消除零因子法解题，如

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0$$

采取消除零因子法求 $\frac{0}{0}$ 型极限，一般将 $f(x)$ 分子分母同时除以零因子，或 $\frac{1}{f(x)}$ 分子分母同时除以零因子，使得最终能用四则运算.

【即学即练】

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$.

TOP3：求 $\infty-\infty$ 型极限

【真题分析】

【真题 1】（2005, 8 分）求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)$.

分析： $\infty-\infty$ 型未定式一般先通分，再用洛必达法则求解.

解答： $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2+e^{-x}}{2}=\frac{3}{2}$$

【题型点睛】

1．计算 $\infty-\infty$ 型未定式的一般方法：

（1）通分，将 $\infty-\infty$ 型未定式直接化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型；

（2）利用洛必达法则计算出结果.

2．求 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限，也可采取消除无穷大因子法. 当 $x\to\infty$ 时，对于有理函数有如下结论（$a_0\neq 0, b_0\neq 0$）：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}0 & n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & n=m\\ \infty & n>m\end{cases}$$

如求

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+3x^2-1}{x^5+3x^4+x-2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+3x^2-1}{x^5+3x^4+x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{(3x^3+3x^2-1)}{x^5}}{\dfrac{(x^5+3x^4+x-2)}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{1}{x^5}}{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{2}{x^5}}$$

$$=\frac{0+0-0}{1+0+0-0}=0$$

【即学即练】

1．（2004, 8 分）求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

TOP4：求 $\infty\cdot0$ 型极限

【真题分析】

【真题 1】（2005, 4 分）极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$ ________.

分析：直接用无穷小量的等价代换进行计算即可.

解答：$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}x\dfrac{2x}{x^2+1}=2$.

【题型点睛】

计算 $\infty\cdot0$ 型未定式的一般方法：

1．将 $\infty\cdot0$ 型未定式直接化为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，或利用等价无穷小代换后再化为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型；

2．利用洛必达法则计算出结果.

【即学即练】

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$.

TOP5：函数性质（奇偶性、周期性、单调性、有界性）判定

【真题分析】

【真题1】（2005, 4分）以下四个命题中，正确的是

（A）若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

（B）若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

（C）若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

（D）若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

【　】

分析：利用中值定理证明若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

解答：若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，$x\in(0,1)$，不妨设 $x>\frac{1}{2}$，则 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},x\right]$ 上连续，在 $\left(\frac{1}{2},x\right)$ 内可导，则由拉格朗日中值定理，有 $f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)=f'(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)$，$\xi$ 在 $\left(\frac{1}{2},x\right)$ 之间.

$f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，所以存在 $M>0$，有 $|f'(x)|\leqslant M$. 所以

$$|f(x)|=\left|f\left(\frac{1}{2}\right)+f'(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+|f'(\xi)|\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+M$$

所以若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界. 故应选（C）.

【真题2】（2004, 4分）函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界.

（A）$(-1,0)$　　（B）$(0,1)$　　（C）$(1,2)$　　（D）$(2,3)$

【　】

分析：若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

解答：当 $x\neq 0,1,2$ 时，$f(x)$ 连续，而 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\dfrac{\sin 2}{4}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\dfrac{\sin 2}{4}$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to -3^-}f(x)=\dfrac{\sin 1}{2}$. 所以，函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有界，故选（A）.

【题型点睛】

1．函数的有界性

如果存在正数 M，使对任一 $x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界.其图形特点是，函数 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 的之间. 如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界. 函数 $f(x)$ 无界，就是说对任何 M，总存在 $x_1\in X$，使 $|f(x)|>M$.

注意：必须说明函数 $f(x)$ 是“在数集 X 上”是有界还是无界；若单纯说函数有界或无界，则指的是函数在它的定义域内是有界还是无界.

2．函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

3．函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则 $-x\in D$）. 如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

4．函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 l，使得对于任一 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期.

5．一般直接根据定义或性质解答这类题.

【即学即练】

1．（1999, 3 分）设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

（A）当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必为偶函数

（B）当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必为奇函数

（C）当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必为周期函数

（D）当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必为单调增函数

【　】

2．（2001, 3 分）设 $g(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，式中，$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2+1) & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{3}(x-1) & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 则 $g(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内

（A）无界　　　　（B）递减

（C）不连续　　　　　　　　　　　　　　（D）连续

【　】

TOP6：无穷小量性质相关题

【真题分析】

【真题 1】（2007, 4 分）当 $x \to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

（A）$1-e^{\sqrt{x}}$　　　　　　　　　　（B）$\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

（C）$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　　　　　　　（D）$1-\cos\sqrt{x}$

【　】

分析：利用等价无穷小量结论，当 $x \to 0$ 时，$\ln(1+x) \sim x$.

解答：当 $x \to 0^+$ 时，$\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}} = \ln(1+\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$，选（B）.

【题型点睛】

1．无穷小

（1）定义：如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷小.

因此可说，以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $x \to \infty$ 时的无穷小.

（2）注意：无穷小与极限过程有关，所以说一个函数是无穷小，必须指明自变量的趋向.如 $f(x)=x-1$ 是 $x \to 1$ 时的无穷小，但当 $x \to 2$ 时，$f(x)=x-1$ 就不再是无穷小；无穷小不是指某个绝对值很小的常数，绝对值很小的常数极限还是常数本身；“零”是可以作为无穷小的唯一的常数.

2．高阶无穷小

（1）如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，就说 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta = 0(\alpha)$.

（2）举例说明：若 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=0$.

3．同阶无穷小

（1）定义：如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c \neq 0$，就说 β 与 α 是同阶无穷小.

（2）举例说明：若 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=A \neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=0$.

4．等价无穷小量

（1）定义：如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，就说$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记为$\alpha\sim\beta$.

（2）等价代换定理：设α，α'，β，β'是同一极限过程中的无穷小，且满足$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，及$\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$存在或为无穷大，则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$.

也有，若在某变化过程下，$\alpha(x)\sim\overline{\alpha}(x)$，则$\lim f(x)\alpha(x)=\lim f(x)\overline{\alpha}(x)$.

（3）等价无穷小量在极限运算中占有重要地位，常见的等价无穷小量有：当$x\to 0$时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$等.

常见的等价无穷小可以推广：如当$\varphi(x)\to 0$时，有$\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)$，$\sqrt[n]{1+\varphi(x)}-1\sim\frac{\varphi(x)}{n}$，$1-\cos\varphi(x)\sim\frac{\varphi^2(x)}{2}$，$\ln(1+\varphi(x))\sim\varphi(x)$等.

5．利用无穷小的等价代换求两个无穷小的商的极限的一般步骤：

（1）分子或分母通过等价代换，将函数化简；
（2）求化简后函数的极限.

6．注意：等价代换可以对分子、分母同时进行 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$；也可只对分子或分母进行，即 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\beta'}$；也可以只对部分乘积因子进行；但对于加、减中的每一项不能分别作代换.

【即学即练】

1．（2007, 4分）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$________.

TOP7：数列极限存在的判定或证明或求解

【真题分析】

【真题1】（2006, 4分）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$________.

分析：利用“数列$\{x_n\}$的奇数项子列和其偶数项子列收敛于同一值，则数列$\{x_n\}$的极限就是该值”结论计算.