普通高等教育"十一五"国家级规划教材

HIGHER MATHEMATICS

高等数学

下册

◇ 盛祥耀

高等教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高 等 数 学

下册

盛祥耀

高等教育出版社

内容提要

本书是总结作者多年的教学经验，结合目前普通高等院校的教学现状，依据新的课程教学基本要求编写的。

与传统教材相比，本书要求适度、篇幅适度、各种概念理论和计算处理适度。主要特色有：对极限定义的处理独树一帜，既调整了对极限的理论过高要求，又保持了极限定义的论证性功能；淡化了抽象理论，加强了直观应用；简化了分部积分法的程式，突出了方法的本质；删去了除微分外的各种近似计算。

本书分上、下两册，下册包括多元函数微积分、重积分曲线与曲面积分、无穷级数等几部分，适合培养应用型人才的高等院校作为非数学专业教材使用，高职高专院校也可采用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/盛祥耀编. —北京：高等教育出版社，2007.5

ISBN 978-7-04-021796-4

Ⅰ.高… Ⅱ.盛… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 051618 号

策划编辑 王 强 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 张申申 **责任绘图** 朱 静
版式设计 张 岚 **责任校对** 金 辉 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010 - 58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010 - 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京新丰印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开 本	787 × 960 1/16	**版 次**	2007 年 5 月第 1 版
印 张	11.25	**印 次**	2007 年 5 月第 1 次印刷
字 数	200 000	**定 价**	12.40 元

物料号 21796–00

目　录

第八章　空间解析几何　向量代数 8

§1　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

在空间作三条相互垂直且相交于一点的数轴(一般讲它们的单位长度相同),其交点是这些数轴的原点,记作 O. 这三条数轴分别叫做 x 轴、y 轴和 z 轴. 一般是将 x 轴和 y 轴放置在水平面上,z 轴垂直于水平面. 它们的方向规定如下:从面对正 z 轴看,x 轴的正方向以逆时针方向转 $\frac{\pi}{2}$ 时,正好是 y 轴的正方向,这种放置法称为右手系统. 右手系统可形象地用右手表示,当我们右手的食指、中指、大拇指相互垂直时,若食指指向 x 轴的正方向,中指指向 y 轴的正方向,那么大拇指就指向 z 轴的正方向. 这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系,也称笛卡儿[①]坐标系. 交点 O 称为坐标原点. 每两轴所确定的平面称为坐标平面,简称坐标面. 具体讲,x 轴与 y 轴所确定的坐标面称为 xy 坐标面. 类似地有 yz 坐标面、zx 坐标面. 这些坐标面把空间分为八个部分,每一部分称为一个卦限(图 8-1). 如在 $x\geqslant0, y\geqslant0, z\geqslant0$ 的部分称为第一卦限.

我们来建立点与有序数组的对应关系.

设 P 为空间的任意一点,如图 8-2. 过点 P 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面. 依次得 x, y, z 轴上的三个垂足 M, N, R. 设 x, y, z 分别是 M, N, R 点在数轴上的坐标. 这样,空间内任一点 P 就确定了唯一的一组有序的数组 x, y 和 z,用 (x, y, z) 表示. (x, y, z) 称为点 P 的坐标,而 x, y 和 z 分别称为 x 坐标,y 坐标和 z 坐标.

---

① 笛卡儿(Descartes René,1596—1650)是法国数学家、哲学家、物理学家、生理学家,是欧洲近代哲学的主要开拓者之一,他主张抛弃中世纪以来的神学世界观,因而受到教会的迫害. 他的著作也被列入禁书. 笛卡儿对数学的最大贡献是创立了解析几何学. 完成了数学史上划时代的变革. 1649 年冬瑞典女王邀请笛卡儿为她讲哲学,每周三次,这对身体本来不太好的笛卡儿来说太不适应了. 冬天还未过去,他就死于肺炎. 教会对他的死反应十分冷淡. 18 年后法国政府才将其骨灰移入圣日耳曼圣心堂中,墓碑上刻着"笛卡儿,欧洲文艺复兴以来,第一个为争取并保证理性权利的人."

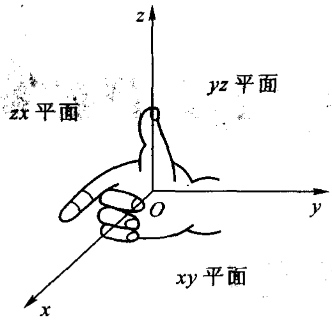

图 8－1

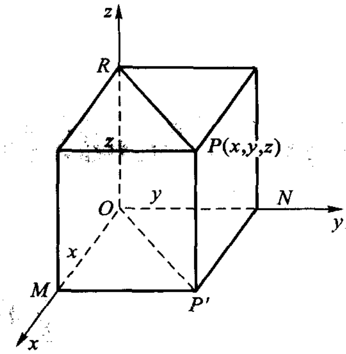

图 8－2

反之，任给出一组有序数组 x,y 和 z，它们分别在 x 轴、y 轴和 z 轴上对应的点为 M,N 和 R. 过 M,N 和 R 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面，这三个平面交于 P. 这样一组有序数组就确定了空间内唯一的一个点 P. 而 x,y 和 z 恰好是点 P 的坐标. 根据上面的法则，我们建立了空间一点与一组有序数 x,y,z 之间的一一对应关系，并用 $P(x,y,z)$ 表示点 P.

根据点的坐标的规定，可知点 $P_1(0,0,1)$ 在 z 轴上，点 $P_2(a,b,0)$ （a,b 为任何实数）在 xy 坐标面上. 而点 $P_3(a,0,c)$ 在 zx 坐标面上.

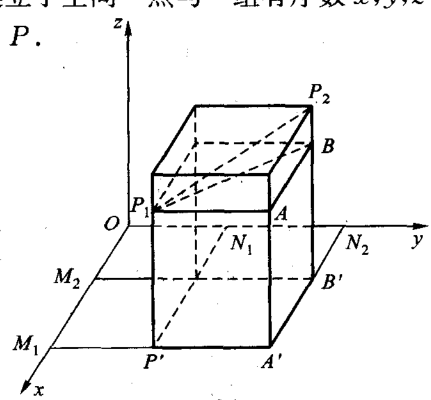

图 8－3

二、两点间的距离公式

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间内两个点. 由图 8－3 可以得到 P_1,P_2 之间的距离

$$|P_1P_2|^2=|P_1B|^2+|BP_2|^2(\triangle P_1BP_2 \text{ 是直角三角形}).$$

其中 $$|P_1B|^2=|P_1A|^2+|AB|^2(\triangle P_1AB \text{ 是直角三角形}).$$

因为 $$|P_1A|=|P'A'|=|N_1N_2|=|y_2-y_1|,$$

$$|AB|=|A'B'|=|M_1M_2|=|x_2-x_1|,$$

$$|BP_2|=|z_2-z_1|,$$

所以 P_1 与 P_2 之间的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例 求 $P_1(1,-1,0)$，$P_2(-1,2,3)$ 之间的距离.

解 $$|P_1P_2|=\sqrt{[(-1)-1]^2+[2-(-1)]^2+(3-0)^2}=\sqrt{22}.$$

习　题

1. 在 yz 坐标面上的点的坐标有什么特点?

2. 在 xy 坐标面上的点的坐标有什么特点?

3. 在 x 轴上的点的坐标有什么特点?

4. 自点 $P(a,b,c)$ 分别作各坐标面的垂线,写出各垂足的坐标.

5. 设点 P 在第一卦限上,OP方向与三个坐标轴的正方向成等角α(α不大于π弧度),且OP的长度为 l,试写出 P 的坐标.

6. 求点 $P(2,-1,0)$ 到各坐标轴的距离.

7. 求下列各对点之间的距离:

(1) $(2,3,1)$,$(2,7,4)$;

(2) $(4,-1,2)$,$(-1,3,4)$.

8. 在 xy 坐标面上找一点,使它的 x 坐标为 1,且与点$(1,-2,2)$和点$(2,-1,-4)$等距.

§2　曲面、曲线的方程

当点的坐标 x、y 和 z 之间无任何限制时,即当 x、y 和 z 可任意选取时,所得到的点充满整个空间;当点的坐标 x、y 和 z 之间满足某个关系时,在一般情况下,这些点构成一个曲面,该关系式就叫做曲面的方程;当点的坐标 x、y 和 z 之间满足两个关系式时,在一般情况下,这些点构成一条曲线,这两个联立关系式称为曲线的方程;当 x、y 和 z 之间满足三个关系式时,在一般情况下,确定了一个点. 以上简略地讲了曲面、曲线的方程的含义,下面我们确切地来介绍.

若曲面 S 上每一个点的坐标 x,y 和 z 满足方程

$$f(x,y,z)=0,$$

反之,满足这个方程的任一组解 x,y 和 z,它对应的点 (x,y,z) 都在这个曲面 S 上,则称方程 $f(x,y,z)=0$ 为曲面 S 的方程,曲面 S 为方程的图形.

下面,我们介绍一些常用的曲面的方程.

一、坐标面的方程　与坐标面平行的平面的方程

以 xy 坐标面为例,在该平面上任取一点,它的 z 坐标为 0,即 $z=0$;反之,满足方程 $z=0$ 的任一组解所对应的点 $(x,y,0)$ 都在 xy 坐标面上,所以 xy 坐标面的方程为

$$z=0.$$

类似地可得:yz 坐标面的方程为 $x=0$;zx 坐标面的方程为 $y=0$.

同样,方程 $z=a(a\neq 0)$ 是过点 $(0,0,a)$ 且平行于 xy 坐标面的平面的方程.

读者可以写出与 yz 坐标面、zx 坐标面平行的各平面的方程.

二、球心在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$、半径为 R 的球面的方程

设点 $P(x,y,z)$ 是球面上任一点. 利用两点之间的距离公式,则 x,y,z 满足方程

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

或

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \tag{1}$$

反之,方程(1)的解 x,y,z 所对应的点 (x,y,z) 必在球面上. 所以(1)式是球心在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为 R 的球面的方程,(1)式称为球面的标准方程.

当 $x_0=y_0=z_0=0$ 时,即球心在原点的球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

将(1)式展开得

$$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z-R^2+x_0^2+y_0^2+z_0^2=0.$$

所以,球面方程具有下列两个特点:

(1) 它是 x,y,z 之间的二次方程,且方程中缺 xy,yz,zx 项;

(2) x^2,y^2,z^2 的系数相同且不为零.

现在我们要问,满足上述两个特点的方程,它的图形是否为球面呢?下面举例说明.

例 1 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-z+3=0$ 是否表示球面?

解 把方程左端配方,得

$$(x-1)^2+(y+1)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-1-1-\frac{1}{4}+3=0,$$

即

$$(x-1)^2+(y+1)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}.$$

显然没有这样的实数 x,y,z 能使上式成立,因而原方程不代表任何图形.

此例说明,具有(1)和(2)两个特点的方程,其图形不一定是球面.

例 2 若方程 $x^2+y^2+z^2-4x+y=0$ 是球面,请找出球心及半径.

解 配方,得

$$(x-2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+z^2=4+\frac{1}{4},$$

即

$$(x-2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{17}{4}.$$

所以，所给方程为球面，球心为$\left(2,\frac{-1}{2},0\right)$，半径为$\frac{\sqrt{17}}{2}$.

三、柱面的方程

设有一条曲线 L 及一条定直线 l，过 L 上每一点作与 l 平行的直线，这些直线所形成的面称为柱面，L 称为柱面的准线，这些相互平行的直线称为柱面的母线(图 8−4). 我们只讨论准线在坐标面上，而母线垂直该坐标面的柱面. 这种柱面的方程应该有什么特点呢? 下面举例说明.

方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示什么曲面?

在 xy 坐标面上，方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示圆心在原点，半径为 R 的圆. 在空间直角坐标系中，方程缺 z，这意味着不论空间中点的 z 坐标怎样，凡 x 坐标和 y 坐标满足这方程的点，都在方程所表示的曲面 S 上；反之，凡是点的 x 坐标和 y 坐标不满足这个方程的，不论 z 坐标怎样，这些点都不在曲面 S 上，即点 (x,y,z) 在曲面 S 上的充要条件是点 $P'(x,y,0)$ 在圆 $x^2+y^2=R^2$ 上. 而 $P(x,y,z)$ 是在过点 $P'(x,y,0)$ 且平行于 z 轴的直线上，这就是说方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示的是由通过 xy 坐标面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 上每一点且平行于 z 轴(即垂直于 xy 坐标面)的直线所组成，即方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示柱面，该柱面称为圆柱面(图 8−5).

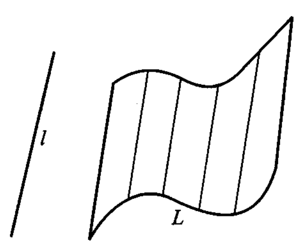

图 8−4

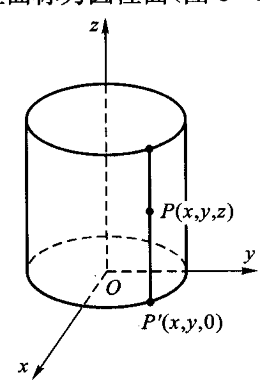

图 8−5

一般地，如果方程中缺 z，即 $f(x,y)=0$，类似于上面的讨论，可知它表示准线是在 xy 坐标面上的曲线 $f(x,y)=0$，母线平行于 z 轴的柱面. 而方程 $g(y,z)=0$，$h(x,z)=0$ 分别表示母线平行于 x 轴和 y 轴的柱面.

例 3 作方程 $y=x^2$ 的图形.

解 因方程缺 z，所以它表示母线平行于 z 轴，准线为 xy 坐标面上的抛物线的柱面. 该柱面称为抛物柱面(图 8−6).

例 4 方程 $y^2+\frac{z^2}{4}=1$ 表示什么曲面?

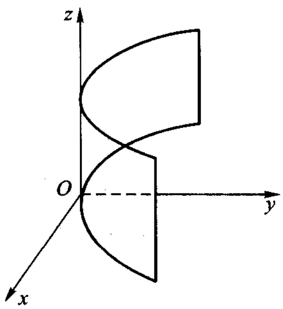

图 8-6

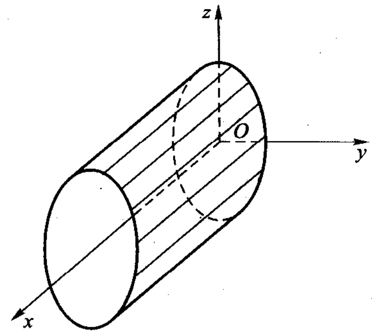

图 8-7

解　因方程中缺 x，所以它表示母线平行于 x 轴的柱面. 它的准线是 yz 坐标面上的椭圆. 所以叫椭圆柱面(图 8-7).

四、空间曲线的方程

空间曲线 L 可以看作是两个曲面的交线. 设这两个曲面的方程为

$$F(x,y,z)=0 \text{ 和 } \Phi(x,y,z)=0,$$

则这两个曲面交线上的点 $P(x,y,z)$ 同时满足这两个方程. 所以空间曲线 L 的方程可表示为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ \Phi(x,y,z)=0. \end{cases}$$

例 5　$\begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ z=a \end{cases}$ 表示什么曲线?

解　$x^2+y^2=R^2$ 表示圆柱面，它的母线平行于 z 轴，而 $z=a$ 表示平行 xy 坐标面的平面，因而它们的交线是圆. 所以

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ z=a \end{cases}$$

表示圆，这个圆在 $z=a$ 的平面上.

例 6　$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x^2+y^2=R^2 \end{cases}$ 表示什么曲线?

解　因为 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 表示球心在原点、半径为 R 的球面，而 $x^2+y^2=R^2$ 表示母线平行于 z 轴，半径为 R 的圆柱面. 它们的交线是圆(在 xy 坐标面上，圆心为原点)，把原方程组化为下列同解方程组(把第二个方程代入第一个方程中)

$$\begin{cases} z=0, \\ x^2+y^2=R^2. \end{cases}$$

这个形式更容易看出它表示在 xy 坐标面上圆心在原点、半径为 R 的圆.

由例 6 我们看到一条空间曲线的方程可以有不同形式的表示.

空间曲线的方程也可用参数方程表示,下面举例说明.

例 7 设圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 上有一质点,它一方面绕 z 轴以等角速度 ω 旋转,另一方面以等速 v_0 向 z 轴的正方向移动,开始时即 $t=0$ 时,质点在 $A(R,0,0)$ 处,求质点的运动方程.

解 设时间 t 时,质点在点 $M(x,y,z)$,见图 8-8,M' 是 M 在 xy 坐标面上的垂直投影,则

$$\angle AOM'=\varphi=\omega t,$$

$$x=|OM'|\cos\varphi=R\cos(\omega t),$$

$$y=|OM'|\sin\varphi=R\sin(\omega t),$$

$$z=|MM'|=v_0 t,$$

所以质点的运动方程为

$$\begin{cases}x=R\cos(\omega t),\\ y=R\sin(\omega t),\\ z=v_0 t.\end{cases}$$

此方程称为螺旋线的参数方程.

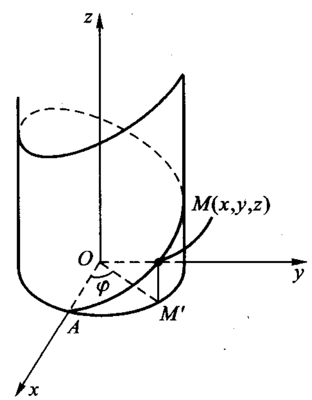

图 8-8

一般的,曲线的参数方程可表示为

$$\begin{cases}x=f(t),\\ y=g(t),\\ z=h(t).\end{cases}$$

五、常用的二次方程的图形

给定一个曲面的方程 $f(x,y,z)=0$,怎么知道它的图形呢?这比平面上由方程确定图形要复杂.它不能通过计算一系列个别点而知道其图形,可以用一系列互相平行的平面截割曲面,得到一系列的交线.由于平面是互相平行的,从而想像出其图形,这种方法叫做平行截割法.通常取互相平行的平面与坐标面平行.下面通过平行截割法介绍常用的一些曲面.

1. 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0\text{ 的常数})$$

用一组与 xy 坐标面平行的平面截割曲面.先用 xy 坐标面,截得曲线

$$\begin{cases}z=0,\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.\end{cases}$$

它是在 xy 坐标面上的椭圆.再用 $z=k$ 截割,

$$\begin{cases} z = k, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{c^2}. \end{cases}$$

当 $k^2 < c^2$，即 $-c < k < c$ 时，截出的是在平面 $z = k$ 上的椭圆．可以看出在此范围内 $|k|$ 越大，截出的椭圆的长短轴越短；当 $z = c$ 及 $z = -c$ 时，截得的是一个点；当 $k^2 > c^2$，即 $k < -c$ 或 $k > c$ 时，没有图形.

再用 $x = 0$ 与 $y = 0$ 去截，可以看到它的轮廓线的变化.

$$\begin{cases} x = 0, \\ \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} y = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \end{cases}$$

它们分别是在坐标面 yz 与 zx 上的椭圆.

根据以上的讨论，可作出其图形(图 8−9)，此曲面称为椭球面.

特别是，当 $a = b = c$ 时，方程化为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$，它是球心在原点，半径为 a 的球面方程.

2. 锥面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\left(或\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 或 -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0\right)$$

($a > 0, b > 0, c > 0$ 的常数).

用 $z = 0$ 截割，截得曲线

$$\begin{cases} z = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0, \end{cases}$$

表示一点(0,0,0). 用 $z = k$ 截割，截得曲线

$$\begin{cases} z = k, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k^2}{c^2}, \end{cases}$$

表示在平面 $z = k$ 上的椭圆，$|k|$ 越大，椭圆的长短轴越长.

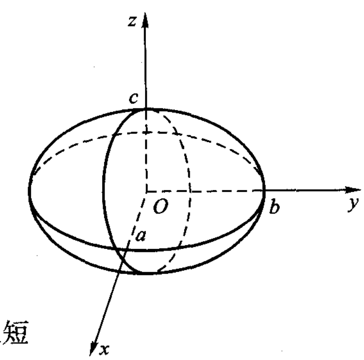

图 8−9

再来看轮廓线：

$$\begin{cases} x = 0, \\ \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} y = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x = 0, \\ \left(\dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c}\right) = 0, \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} y = 0, \\ \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = 0, \end{cases}$$

分别表示在 yz 与 zx 两个坐标面上相交于原点的两条直线．由此可作出其图形(图 8－10). 此曲面称为锥面. 同样可以画出其他两个方程的图形,它们也称为锥面.

3. 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z\left(\text{或}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=y\ \text{或}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=x\right)$$

$(a>0,b>0,c>0$ 的常数$)$.

用 $z=0$ 截割,截得曲线

$$\begin{cases}z=0,\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0,\end{cases}$$

表示原点. 用 $z=k>0$,截得曲线

$$\begin{cases}z=k,\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=k,\end{cases}$$

表示在平面 $z=k$ 上的椭圆, k 越大,椭圆的长短轴也越长;当 $k<0$ 时,没有图形.

再来看轮廓线

$$\begin{cases}x=0,\\ \dfrac{y^2}{b^2}=z\end{cases}\text{与}\begin{cases}y=0,\\ \dfrac{x^2}{a^2}=z,\end{cases}$$

它们分别表示在 yz , zx 两个坐标面上的抛物线(图 8－11). 此曲面称为椭圆抛物面．同样可以画出其他两个方程的图形,它们也称为椭圆抛物面.

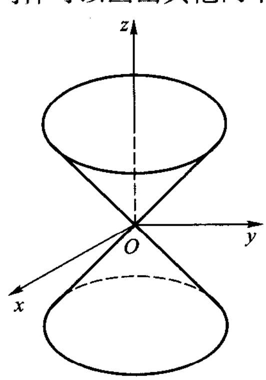

图 8－10

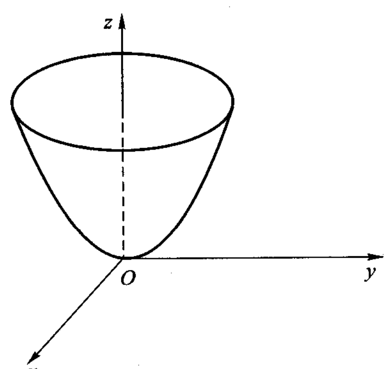

图 8－11

4. 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\left(\text{或}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ \text{或}-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right)$$

$(a>0,b>0,c>0$ 的常数$)$.

用 $z=0$ 截割，截得曲线

$$\begin{cases} z=0, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \end{cases}$$

表示在 xy 坐标面上的椭圆.

用 $z=k$，截得曲线

$$\begin{cases} z=k, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{k^2}{c^2} \end{cases}$$

表示在平面 $z=k$ 上的椭圆，可以看出 $|k|$ 越大，椭圆的长短轴越长.

再来看轮廓线.

$$\begin{cases} x=0, \\ \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} y=0, \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \end{cases}$$

它们分别表示在 yz 与 zx 两个坐标面上的双曲线(图 8-12). 此曲面称为单叶双曲面. 同样可以画出其他两个方程的图形，它们都称为单叶双曲面.

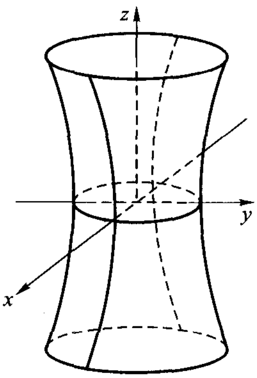

图 8-12

习　题

9. 问下列方程各表示什么曲面?

(1) $x=b$;　(2) $y=0$;　(3) $y=c$.

10. 求出下列方程所表示的球面的球心坐标与半径.

(1) $x^2+y^2+z^2+4x-2y+z+\dfrac{5}{4}=0$;

(2) $2x^2+2y^2+2z^2-x=0$.

问 11—16 题中的方程表示什么曲面，若是柱面指出其准线及母线.

11. $4x^2+y^2=1$.

12. $x^2+y^2=2x$.

13. $y^2=1$.

14. $x^2-z^2=1$.

15. $y^2=z+4$.

16. $x^2+y^2+z^2=0$.

问 17—24 题各表示什么曲线.

17. $\begin{cases} x=3, \\ y+2z^2=0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ y=1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2z, \\ x=0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^2+y^2=2x, \\ x=1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} z=3x^2, \\ y=1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} y=1, \\ z=1. \end{cases}$

23. $x^2+y^2=0$.

24. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ z^2+x^2=1. \end{cases}$

问 25—30 题各表示什么曲面.

25. $x^2+z^2=y^2$.

26. $x=y^2+z^2$.

27. $y=x^2+2z^2$.

28. $16x^2+9y^2+16z^2=144$.

29. $z=x^2+y^2+5$.

30. $x^2-y^2+z^2=9$.

§3 二、三阶行列式

为了后面几节的需要,在此介绍二、三阶行列式.

一、二阶行列式

设 a_1,b_1,a_2,b_2 为实数,我们将表达式 $a_1b_2-a_2b_1$ 用记号 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 表示,即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

称上述记号为二阶行列式, a_1,b_1,a_2,b_2 称为元素,横排称为行,竖排称为列.它的计算规则是:左上角与右下角元素的乘积减去右上角与左下角元素的乘积.

用二阶行列式可解二元一次方程组,设

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$$

则其解为

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}(a_1b_2-a_2b_1\neq 0).$$

证明略.

例 1 试计算二阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$.

解 $$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=2\times 5-4\times(-3)=22.$$

例 2 试解方程组 $\begin{cases} 2x-y=5, \\ 3x+7y=1. \end{cases}$

解 $$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}=\frac{5\times 7-1\times(-1)}{2\times 7-3\times(-1)}=\frac{36}{17},$$