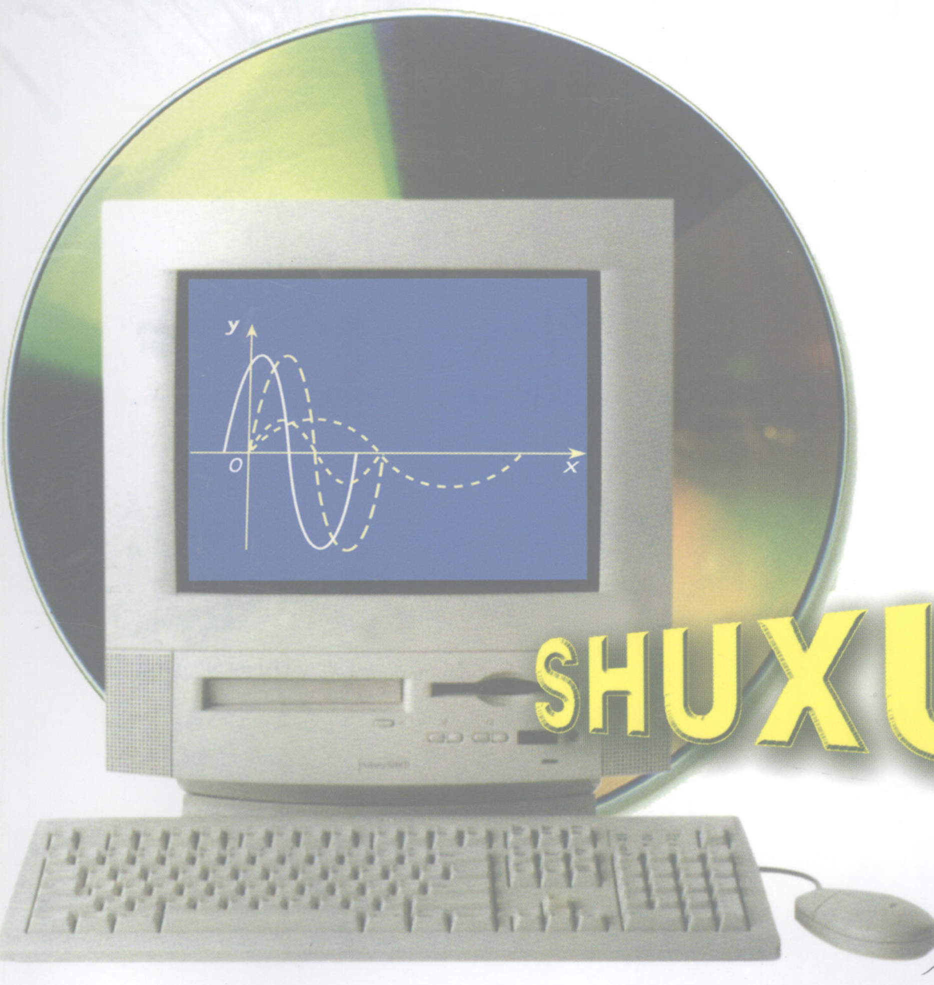
经全国中小学教材审定委员会
2002年审查通过

全日制普通高级中学教科书（必修）

数学

第一册（下）

人民教育出版社中学数学室 编著



SHUXUE

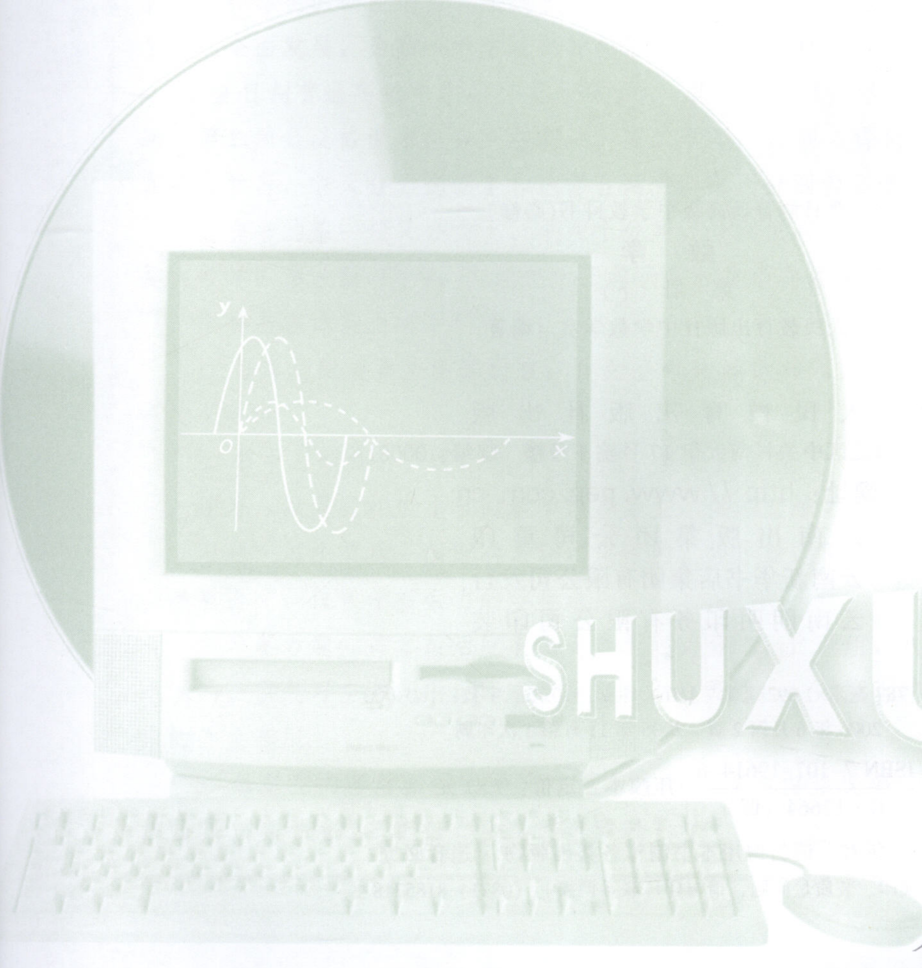
人民教育出版社

全日制普通高级中学教科书（必修）

数学

第一册（下）

人民教育出版社中学数学室 编著



SHUXUE

人民教育出版社

全日制普通高级中学教科书(必修)
数　学
第一册（下）
人民教育出版社中学数学室　编著
*
人民教育出版社出版
(北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼　邮编:100081)
网址：http://www.pep.com.cn
云南出版集团公司重印
云南新华书店集团有限公司发行
云南朗明印务有限公司印装
*
开本：787毫米×1 092毫米　1/16　印张：10.75　字数：180 000
2006年6月第2版　2006年11月第1次印刷
ISBN 7-107-19614-6
G·12664（课）　压膜本　定价：7.81元

说　明

《全日制普通高级中学教科书·数学》是根据教育部2002年颁布的《全日制普通高级中学课程计划》和《全日制普通高级中学数学教学大纲》，在《全日制普通高级中学教科书（试验修订本）·数学》的基础上进行修订的．此次修订的指导思想是：遵循“教育要面向现代化，面向世界，面向未来”的战略思想，贯彻教育必须为社会主义现代化建设服务，必须与生产劳动相结合，培养德、智、体、美全面发展的社会主义事业的建设者和接班人的方针，以全面推进素质教育为宗旨，全面提高普通高中教育质量．

普通高中教育，是与九年义务教育相衔接的高一层次的基础教育．高中教材的编写，旨在进一步提高学生的思想道德品质、文化科学知识、审美情趣和身体心理素质，培养学生的创新精神、实践能力、终身学习的能力和适应社会生活的能力，促进学生的全面发展，为高一级学校和社会输送素质良好的合格的毕业生．

《全日制普通高级中学教科书·数学》（以下简称《数学》）包括三册，其中第一册、第二册是必修课本，分别在高一、高二学习，每周4课时；第三册是选修课本，在高三学习，它又分为选修Ⅰ和选修Ⅱ两种，每周分别为2课时和4课时．

这套书的第一册又分为上、下两个分册，分别供高一上、下两个学期使用．本书是《数学》第一册（下），内容包括三角函数和平面向量两章．

全套书在体例上有下列特点：

1．每章均配有章头图和引言，作为全章内容的导入，使学生初步了解学习这一章的必要性．

2．书中习题共分三类：练习、习题、复习参考题．

练习　以复习相应小节的教学内容为主，供课堂练习用．

习题　每小节后一般配有习题，供课内、外作业选用，少数标有*号的题在难度上略有提高，仅供学有余力的学生选用．

复习参考题　每章最后配有复习参考题，分A、B两组，A组题是属于基本要求范围的，供复习全章使用；B组题带有一定的灵活性，难度上略有提高，仅供学有余力的学生选用．

3．每章在内容后面均安排有小结与复习，包括内容提要、学习要求和需要注意的问题、参考例题三部分，供复习全章时参考．

4. 每章附有一至两篇不作教学要求的阅读材料，供学生课外阅读，借以扩大知识面、激发学习兴趣、培养应用数学的意识.

本套书由人民教育出版社中学数学室编写，其中《数学》第一册（下）原试验本由饶汉昌、方明一主持编写，参加编写的有蔡上鹤、康合太等，责任编辑为薛彬，审稿为饶汉昌.

《数学》第一册（下）原试验本在编写过程中蒙孔令颐、吴之季、烟学敏、蒋佩锦、戴佳珉等同志提出宝贵意见，在此表示衷心感谢.

参加本次修订的有蔡上鹤、田载今等，责任编辑为薛彬、张劲松.

本书经教育部中小学教材审定委员会2002年审查通过.

人民教育出版社中学数学室

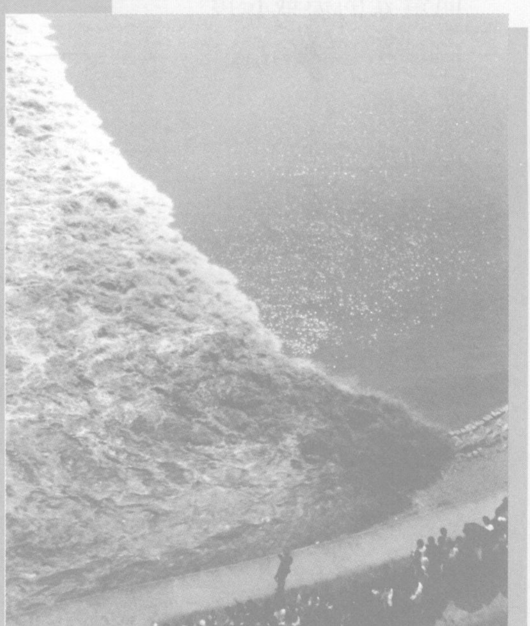
2003年9月

目　录

本书部分数学符号

$\sin x$	x 的正弦
$\cos x$	x 的余弦
$\tan x$	x 的正切
$\cot x$	x 的余切
$\sin^2 x$	$\sin x$ 的平方
$\arcsin x$	x 的反正弦
$\arccos x$	x 的反余弦
$\arctan x$	x 的反正切
$\boldsymbol{a}$	向量 $\boldsymbol{a}$
$\overrightarrow{AB}$	向量 $\overrightarrow{AB}$
$\|\boldsymbol{a}\|$	向量 $\boldsymbol{a}$ 的模或长度
$\|\overrightarrow{AB}\|$	向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模或长度
$\mathbf{0}$	零向量
$\boldsymbol{e}$	单位向量
$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$	平面直角坐标系中 x 轴，y 轴方向的单位向量
$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行（共线）
$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 垂直
$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和
$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差
$\lambda\boldsymbol{a}$	实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积

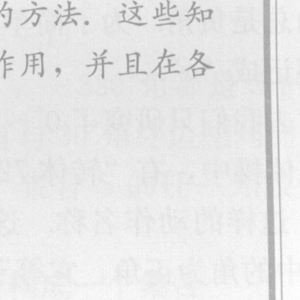
第四章 三角函数



在我们周围运动着的物质世界里，存在着许多周期性的现象．例如，左图显示的我国杭州附近的钱江潮汐，就是自然界中发生的一种周期性现象．

在物理学中，科学家经常研究周期性运动，在这样的运动中，每间隔相同的时间，运动物体的轨迹完全相同．例如，车轮上某点的运动、风车扇叶上某点的运动、用绳吊着的小球的自由摆动、弹簧的简谐振动，等等．这类周期运动，可以用数学工具来描述．三角函数就是描述周期运动的数学模型，它具有良好的性质，因而被广泛地应用到方方面面．

在这一章里，我们将用集合与函数的知识系统地研究任意角的三角函数，掌握一些基本的三角关系式和三角式的变形方法，并在此基础上了解三角函数的图象和性质．此外，我们还要学习已知三角函数值求角的方法．这些知识在今后的学习和研究中起着十分重要的作用，并且在各门科学技术中有着广泛的应用．



一　任意角的三角函数

4.1　角的概念的推广

我们知道，角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形．在图 4-1 中，一条射线的端点是 O，它从起始位置 OA 按逆时针方向旋转到终止位置 OB，形成了一个角 α，点 O 是角的顶点，射线 OA、OB 分别是角 α 的始边、终边．

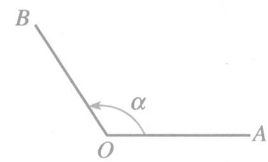


图 4-1

我们规定，按逆时针方向旋转形成的角叫做**正角**，按顺时针方向旋转形成的角叫做**负角**．图 4-1 中的角 α 是一个正角，钟表的时针或分针在旋转时所形成的角总是负角．为了简单起见，在不引起混淆的前提下，“角 α”或“$\angle\alpha$”可以简记成“α”．

过去我们只研究了 $0^\circ \sim 360^\circ$范围的角，但在生活中还会遇到其他的角．例如，在体操中，有“转体 720°”（即“转体 2 周”），“转体 1 080°”（即“转体 3 周”）这样的动作名称．这就是说，角度可以不限于 $0^\circ \sim 360^\circ$范围．又如，图 4-2 中的角为正角，它等于 750°；图 4-3 中，正角 $\alpha=210^\circ$，负角 $\beta=-150^\circ$，$\gamma=-660^\circ$．

如果一条射线没有作任何旋转，我们称它形成了一个**零角**．也就是说，零角的始边与终边重合．如果 α 是零角，那么 $\alpha=0^\circ$．

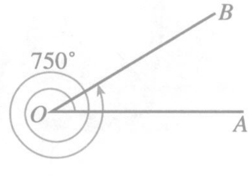


图 4-2

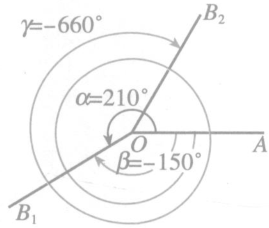


图 4-3

角的概念经过这样的推广以后，就应该包括正角、负角和零角.

今后我们常在直角坐标系内讨论角，为此使角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合. 那么，角的终边（除端点外）在第几象限，我们就说这个角是第几象限角. 例如，图 4-4（1）中的 30°，390°，−330°角，都是第一象限角；图 4-4（2）中的 300°，−60°角，都是第四象限角；585°角是第三象限角. 如果角的终边在坐标轴上，就认为这个角不属于任一象限.

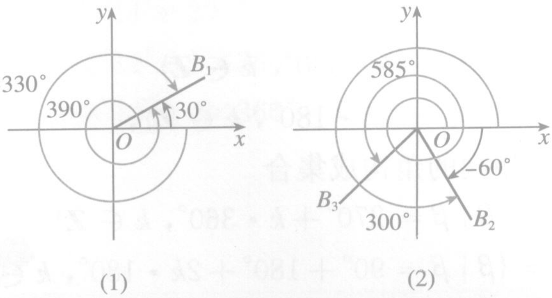


图 4-4

从图 4-4（1）中可以看出，390°，−330°角的终边都与 30°角的终边相同，并且这两个角都可以表示成 0°到 360°❶的角与 k 个（$k\in\mathbf{Z}$）周角的和，即

$$390°=30°+360°\text{（这里 }k=1\text{）},$$

$$-330°=30°-360°\text{（这里 }k=-1\text{）}.$$

设 $S=\{\beta\mid\beta=30°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$，则 390°，−330°角都是 S 的元素，30°角也是 S 的元素（此时 $k=0$）. 容易看出：所有与 30°角终边相同的角，连同 30°角自己在内，都是集合 S 的元素；反过来，集合 S 的任一元素显然与 30°角终边相同. 一般地，我们有：

所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合

$$S=\{\beta\mid\beta=\alpha+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\},$$

即任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

例 1 在 0°到 360°范围内，找出与下列各角终边相同的角，并判定它们是第几象限角.

（1）−120°；　　（2）640°；　　（3）−950°12′.

解：（1）−120°=240°−360°，

所以与−120°角终边相同的角是 240°角，它是第三象限角；

（2）640°=280°+360°，

❶ 本书中约定："0°到 360°"这一词语包含 0°，但不包含 360°.

所以与 $640°$ 角终边相同的角是 $280°$ 角，它是第四象限角；

(3) $-950°12' = 129°48' - 3 \times 360°$，

所以与 $-950°12'$ 角终边相同的角是 $129°48'$，它是第二象限角.

例 2 写出终边在 y 轴上的角的集合（用 $0°$ 到 $360°$ 的角表示）.

解：在 $0°$ 到 $360°$ 范围内，终边在 y 轴上的角有两个，即 $90°$，$270°$ 角（图 4-5）. 因此，所有与 $90°$ 角终边相同的角构成集合

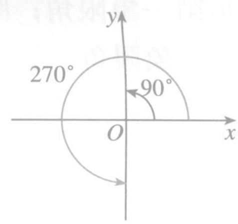


图 4-5

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \{\beta \mid \beta = 90° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbf{Z}\} \\
&= \{\beta \mid \beta = 90° + 2k \cdot 180°,\ k \in \mathbf{Z}\},
\end{aligned}
$$

而所有与 $270°$ 角终边相同的角构成集合

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \{\beta \mid \beta = 270° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbf{Z}\} \\
&= \{\beta \mid \beta = 90° + 180° + 2k \cdot 180°,\ k \in \mathbf{Z}\} \\
&= \{\beta \mid \beta = 90° + (2k+1)180°,\ k \in \mathbf{Z}\},
\end{aligned}
$$

于是，终边在 y 轴上的角的集合

$$
\begin{aligned}
S &= S_1 \cup S_2 \\
&= \{\beta \mid \beta = 90° + 2k \cdot 180°,\ k \in \mathbf{Z}\} \\
&\quad \cup \{\beta \mid \beta = 90° + (2k+1)180°,\ k \in \mathbf{Z}\} \\
&= \{\beta \mid \beta = 90° + 180° \text{ 的偶数倍}\} \\
&\quad \cup \{\beta \mid \beta = 90° + 180° \text{ 的奇数倍}\} \\
&= \{\beta \mid \beta = 90° + 180° \text{ 的整数倍}\} \\
&= \{\beta \mid \beta = 90° + n \cdot 180°,\ n \in \mathbf{Z}\}.
\end{aligned}
$$

例 3 写出与下列各角终边相同的角的集合 S，并把 S 中适合不等式 $-360° \leqslant \beta < 720°$ 的元素 β 写出来：

(1) $60°$； (2) $-21°$； (3) $363°14'$.

解：(1) $S = \{\beta \mid \beta = 60° + k \cdot 360°, k \in \mathbf{Z}\}$.

S 中适合 $-360° \leqslant \beta < 720°$ 的元素是

$$
\begin{aligned}
&60° - 1 \times 360° = -300°, \\
&60° + 0 \times 360° = 60°, \\
&60° + 1 \times 360° = 420°.
\end{aligned}
$$

(2) $-21°$ 不是 $0°$ 到 $360°$ 的角，但仍可用上述方法来构成与 $-21°$ 角终边相同的角的集合，即

$$S = \{\beta \mid \beta = -21° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

S 中适合 $-360° \leqslant \beta < 720°$ 的元素是

$$-21° + 0 \times 360° = -21°,$$
$$-21° + 1 \times 360° = 339°,$$
$$-21° + 2 \times 360° = 699°.$$

(3) $S = \{\beta \mid \beta = 363°14' + k \cdot 360°,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

S 中适合 $-360° \leqslant \beta < 720°$ 的元素是

$$363°14' - 2 \times 360° = -356°46',$$
$$363°14' - 1 \times 360° = 3°14',$$
$$363°14' + 0 \times 360° = 363°14'.$$

练 习

1. (口答) 锐角是第几象限角? 第一象限角一定是锐角吗? 再分别就直角、钝角来回答这两个问题.

2. (口答) 今天是星期三, 那么 $7k(k \in \mathbf{Z})$ 天后的那一天是星期几? $7k(k \in \mathbf{Z})$ 天前的那一天是星期几? 100 天后的那一天是星期几?

3. 已知角的顶点与直角坐标系的原点重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 作出下列各角, 并指出它们是哪个象限的角:

(1) $420°$; (2) $-75°$; (3) $855°$; (4) $-510°$.

4. 在 $0°$ 到 $360°$ 范围内, 找出与下列各角终边相同的角, 并指出它们是哪个象限的角:

(1) $-54°18'$; (2) $395°8'$; (3) $-1\,190°30'$; (4) $1\,563°$.

5. 写出与下列各角终边相同的角的集合, 并把集合中适合不等式 $-720° \leqslant \beta < 360°$ 的元素 β 写出来:

(1) $45°$; (2) $-30°$; (3) $1\,303°18'$; (4) $-225°$.

习题 4.1

1. 在 $0°$ 到 $360°$ 范围内，找出与下列各角终边相同的角，并指出它们是哪个象限的角：

(1) $-265°$；　(2) $1\,185°14'$；　(3) $-1\,000°$；　(4) $-843°10'$；

(5) $-15°$；　(6) $3\,900°$；　(7) $560°24'$；　(8) $2\,903°15'$.

2. 写出终边在 x 轴上的角的集合（用 $0°$ 到 $360°$ 的角表示）.

3. 写出与下列各角终边相同的角的集合，并把集合中适合不等式 $-360°\leqslant\gamma<360°$ 的元素 γ 写出来：

(1) $60°$；　(2) $-75°$；　(3) $-824°30'$；　(4) $475°$；

(5) $90°$；　(6) $270°$；　(7) $180°$；　(8) $0°$.

4. 分别写出第一、二、三、四象限角的集合.

5. 选择题：

(1) 已知 α 是锐角，那么 2α 是（　　）

(A) 第一象限角.　(B) 第二象限角.

(C) 小于 $180°$ 的正角.　(D) 不大于直角的正角.

(2) 已知 α 是钝角，那么 $\frac{\alpha}{2}$ 是（　　）

(A) 第一象限角.　(B) 第二象限角.

(C) 第一与第二象限角.　(D) 不小于直角的正角.

4.2 弧度制

我们在初中几何里学习过角的度量，规定周角的 $\frac{1}{360}$ 为 1 度的角. 这种用度作为单位来度量角的单位制叫做**角度制**. 下面再介绍在数学和其他科学中常用的另一种度量角的单位制——弧度制，它的单位符号是 rad，读作弧度.

我们把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 **弧度的角**，即用弧度制度量时，这样的圆心角等于 1 rad. 如图 4-6，弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长等于半径 r，$\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角 $\angle AOB$ 就是 1 弧度的角. 在图 4-7 中，圆心角 $\angle AOC$ 所对的弧 $\overset{\frown}{AC}$ 的长 $l=2r$，那么 $\angle AOC$ 的弧度数就是

$$\frac{l}{r}=\frac{2r}{r}=2.$$

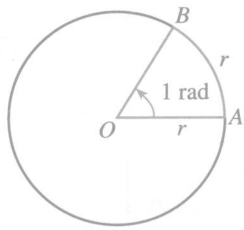


图 4-6

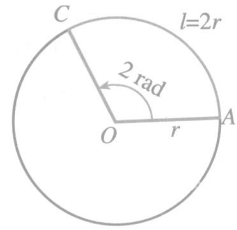


图 4-7

当圆心角为周角时，它所对的弧（即圆周）长 $l=2\pi r$，所以周角的弧度数是

$$\frac{l}{r}=\frac{2\pi r}{r}=2\pi.$$

由此可知，任一 0°到 360°的角的弧度数 $x=\frac{l}{r}$ 必然适合不等式 $0\leqslant x<2\pi$. 角的概念推广后，弧的概念也随之推广，任一正角的弧度数都是一个正数.

如果角 α 是一个负角，那么它的弧度数是一个负数；零角的弧度数是 0. 例如，当弧长 $l=4\pi r$ 且所对的圆心角表示负角时，这个圆心角的弧度数是

$$-\frac{l}{r}=-\frac{4\pi r}{r}=-4\pi.$$

一般地，可以得到：**正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是 0；角 α 的弧度数的绝对值**

$$|\alpha|=\frac{l}{r},$$

其中 l 是以角 α 作为圆心角时所对弧的长，r 是圆的半径.

这种以弧度作为单位来度量角的单位制，叫做**弧度制**.

用角度制和弧度制来度量零角，单位不同，但量数相同（都是 0）；用角度制和弧度制度量任一非零角，单位不同，量数也不同. 下面讨论角度与弧度的换算方法.

1. 把角度换成弧度

因为周角的弧度数是 2π，而在角度制下它是 360°，所以

$$360°=2\pi\ \text{rad},$$
$$180°=\pi\ \text{rad},$$
$$1°=\frac{\pi}{180}\ \text{rad}\approx 0.017\ 45\ \text{rad}.$$

2. 把弧度换成角度

把上面三个关系式中的前两个反过来写，就可以得到

$$2\pi\ \text{rad}=360°,$$
$$\pi\ \text{rad}=180°,$$
$$1\ \text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\approx 57.30°=57°18'.$$

例 1 把 67°30′化成弧度.

解：因为$67°30'=\left(67\,\frac{1}{2}\right)^{\circ}$，所以

$$67°30'=\frac{\pi}{180}\ \text{rad}\times 67\,\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\pi\ \text{rad}.$$

例 2 把$\frac{3}{5}\pi$ rad 化成度.

解：$\frac{3}{5}\pi\ \text{rad}=\frac{3}{5}\times 180°=108°$.

度数与弧度数的换算，可以利用科学计算器进行，也可以利用《中学数学用表》中的“度、分、秒化弧度表”和“弧度化度、分、秒表”来进行.

今后我们用弧度制表示角的时候，“弧度”二字或“rad”通常略去不写，而只写这个角所对应的弧度数. 例如，角$\alpha=2$就表示 α 是2 rad的角，$\sin\frac{\pi}{3}$就表示$\frac{\pi}{3}$ rad 的角的正弦，即$\sin\frac{\pi}{3}=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

下面是一些特殊角的度数与弧度数的对应表：

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

根据公式$|\alpha|=\frac{l}{r}$，可以得到

$$l=|\alpha|r,$$

这就是说，**弧长等于弧所对的圆心角（的弧度数）的绝对值与半径的积**. 这一弧长公式比采用角度制时的相应公式$\left(l=\frac{n\pi r}{180}\right)$简单.

例 3 利用弧度制证明扇形面积公式$S=\frac{1}{2}lR$，其中 l 是扇形的弧长，R