大学物理实验

主　编　吴福根　周誉昌
副主编　何艳阳　宁　锌

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学物理实验

主　编　吴福根　周誉昌
副主编　何艳阳　宁　锌

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验 / 吴福根主编.—北京：高等教育出版社，2007.1
ISBN 978-7-04-020878-8

Ⅰ.大… Ⅱ.吴… Ⅲ.物理学—实验—高等学校—教材
Ⅳ.04-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 004053 号

策划编辑 孙振威 责任编辑 李瑞芳 封面设计 吴 昊 责任印制 蔡敏燕

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		021-56964871
邮政编码	100011	免费咨询	800-810-0598
总　　机	010-58581000	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	021-56965341		http://www.hep.com.cn
			http://www.hepsh.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
排　　版	南京理工出版信息技术有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	常熟市华通印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com

开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2007 年 1 月第 1 版
印　　张	12.75	印　　次	2007 年 1 月第 1 次
字　　数	292 000	定　　价	21.00 元

凡购买高等教育出版社图书，如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请在所购图书销售部门联系调换。

物料号　20878-00

前　　言

物理学是一门基础学科，它的发展已经改变并正在继续改变着整个世界。物理学又是一门实验科学，物理学的发展和创新无不与物理实验密切联系，并且都必须经受实验的检验。大学物理实验是理工科学生进入大学后较早学习到的一门实验课程，是实验技能训练的开端，它在培养严谨的科学态度和工作作风、提高实验技能以及加深对物理理论的理解等方面均起着十分重要的作用。

本书是根据教育部非物理专业物理教学指导委员会制定的物理实验课程教学基本要求的精神，并结合理工科大学的特色和要求，在使用多年的大学物理实验讲义的基础上，作了较为全面的修订、更新与补充而编写完成的。全书系统地介绍了大学物理实验课的任务与基本要求，测量误差与实验数据处理，大学物理实验的常用仪器及其相关知识，以及大学物理实验中常用的测量方法。全书按不同的层次编排了 23 个基础实验、综合实验和设计性实验，内容涉及力学、热学、光学、电磁学、声学以及近代物理等方面。本书采取由浅入深、循序渐进的方式编排实验内容，力求做到实验原理简明扼要、实验公式推导完整、实验方法清晰合理、数据处理规范准确。

本书由吴福根、周誉昌主编，何艳阳、宁锌副主编。参加编写的还有蒋力立、王敏、郭天葵、梁远博、张战士、裴文彦、颜莉、周莹、冯军勤、吕华、钟会林等。

在本书出版之际，编者要感谢多年来为广东工业大学“大学物理实验中心”建设以及实验讲义的编写付出了艰苦努力的各位领导和老师。同时，还要感谢广东工业大学物理与光电工程学院、教务处、设备处的大力支持。本书的编写也得到了广东省实验教学示范中心的资助，在此一并表示感谢。另外，一些兄弟院校的实验教材也为本书的编写提供了很好的借鉴，借此机会一并表示衷心的谢意。

由于编者水平所限，书中不足之处在所难免，恳请读者批评指正，以便再版时修正。

编　者

2007 年 1 月于广东工业大学

目　　录

绪　论

一、物理实验课程的性质、目的和任务

物理实验是对高等工科院校学生进行科学实验基本训练的一门独立设置的必修基础课程。是学生进入大学后受到系统实验方法和实验训练的开端，是工科类专业对学生进行科学实验训练的重要基础。物理实验是科学与技术的结合。物理是研究科学规律的，而实验是用技术手段来显示规律的。因此，要注意物理思想与物理方法的教育，要将科学素质与实验技能培养相结合。物理实验是综合运用知识的典范，力、热、声、光、电及现代技术都包含在物理实验中，这是任何其他课程不能代替的。物理实验是一门创造性思维的科学，物理实验将创造性思维与实践紧密结合起来。物理实验教学与物理理论教学具有同等重要的地位，两者既有深刻的内在联系，又有各自的任务和作用。

大学物理实验是在中学物理实验的基础上，按照循序渐进的原则，培养学生科学实验的素养（科学思维、科学态度、科学方法），理论联系实际和实事求是的科学作风，严肃认真的工作态度，主动研究的探索精神和遵守纪律、爱护公物的优良品德；学习物理实验的基本原理、基本规律、实验验证、实验方法、实验技能，使学生具有坚实的科学基础，培养学生综合应用知识的能力，熟悉常用实验仪器的使用方法，观察和分析物理现象，正确地记录数据和处理数据，撰写合格的实验报告，培养学生掌握新知识和新技术，培养学生的创造性思维、创新意识、创造能力。

实验前学生必须仔细阅读讲义，了解实验仪器，明确实验目的，理解实验原理和步骤，用专门的实验报告纸写好预习报告，并应包括以下内容。

1）实验名称

2）实验目的

3）实验仪器（包括型号、规格）

4）实验概述（包括实验原理、原理草图、实验电路图、主要公式，并注明各符号代表的物理量及其单位等）

5）拟好数据记录表格

实验中要了解仪器的型号规格、精度级别及使用方法，正确地调整仪器、连接线路。操作时要严格遵守操作规程和安全制度，记录数据必须实事求是，不准抄袭数据和实验报告，否则做零分处理。原始数据要用钢笔或签字笔书写，不得涂改。实验完毕，数据需交指导教师检查、审阅并签字认可。整理实验仪器，保持室内整洁。课后完成实验报告。一份完整的实验报告除包括完整预习报告外，还要在此基础上补充以下内容。

6）实验步骤

7）数据记录和数据处理

8）实验结果及问题讨论

9）教师签过字的实验原始数据记录纸(附在实验报告末)

二、误差、不确定度、有效数字和数据处理

(一) 前言

物理学即为自然及发展规律，现在指物质运动的最一般的规律及物质基本结构的科学。物理学从本质上说是一门实验科学，尽管物理学本身可以在一定限度内从理论上用逻辑推理的方法获得新的理论，但最终都要依靠实验提供精确的材料来验证。物理学领域内的所有成果都是理论和实验密切结合的结晶。

从1901年第一届当代最著名的诺贝尔物理学奖金至今100多年已有160名左右获奖者，其中因实验物理学方面的伟大发现或发明而获奖的就有三分之二以上。例如1901年首届诺贝尔物理学奖金获得者伦琴、1902年的塞曼、1903年的贝可勒尔和居里夫妇等。这些实验方面的发现已被公认为是物理学发展中的最伟大的成就，可见实验物理在物理学发展中的地位是多么重要。

1. 实验物理学和实验方法的分类

实验物理学和实验方法从不同的角度有不同的分类：

1）天然实验和模拟实验：

① 天然实验

利用天然物理现象进行研究的实验叫做天然实验。例如，在宇宙射线中发现正电子、μ介子、π介子、κ介子，等等。

② 模拟实验

人为地创造出一种条件，按照预定计划，以确定顺序重现一系列物理过程或物理现象，叫做模拟实验。例如伽利略斜面实验。

2）定性实验、定量实验：

① 定性实验

定性实验研究的重点问题不需要做量的测定，而是判断某些物理现象是否存在及其特性，目的在于弄清楚物理现象的成因或规律。例如劳厄(M. V. Laue)1912年让X射线通过晶体，发生衍射，定性地提出晶体内原子间的间距与X射线的波长属于同一数量级。

② 定量实验

定量实验是指在实验中对研究的问题需要做出精确的测定，确定物理现象各种具体参数、各现象之间具体的数量关系，以及通过数量来表明某些规律。例如，卡文迪许和库仑通过定量实验，于1785年总结出库仑定律。关于库仑定律的定量实验研究迄今仍未停止，但其测量精度越来越高，若以$\frac{1}{r^{2+\delta}}$来表示其平方反比规律(δ为指数偏差，r为两点电荷之间的距离)，1971年测量结果为$\delta < 2.7 \times 10^{-16}$，平方反比关系已精确到小数点后第十六位。

此外，实验方法还有数量级估计法、量纲分析法、比较法、积累放大法、转换测量法、模拟法、归纳法、干涉法、计算机虚拟法、列表法、图解法、逐差法、最小二乘法等等。

2. 测量

要进行定量实验，就离不开测量。同样，物理实验也离不开测量。所谓测量，就是把待测的物理量与一个被选作标准的同类物理量进行比较，以确定它是标准量的多少倍。这个标准量称为该物理量的单位，这个倍数称为该量的数值，一个物理量由数值和单位组成，例如 2.3 cm、24.6 ℃等。

测量是人类认识物质世界和改造物质世界的重要手段之一。通过测量，人们对客观事物获得了数量上的概念，做到了"胸中有数"，建立起了各种定理和定律，因此测量可以说是用来打开自然科学中"未知"宝库的一把钥匙。甚至有人说："没有测量就没有科学"。测量分直接测量和间接测量，直接测量又分单次测量和多次测量。凡是能从量具、仪器的刻度直接读得待测量物大小的测量，称为直接测量。例如用米尺量度物体的长度，用天平称衡物体的质量等。大多数物理量都没有直读仪器，都需要进行间接测量。所谓间接测量，就是先经过直接测量得到一些量值，再经过一定的数学计算才能得出结果的测量。例如用单摆测自由落体的重力加速度 g，根据公式 $g = 4\pi^2 \dfrac{L}{T^2}$，先要测出直接测量量——摆长 L 和周期 T，再由公式才能计算得到间接测量量 g。当两个直接测量量摆长 L 和周期 T 是多次测得的结果时，那么公式为

$$\bar{g} = 4\pi^2 \frac{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L_i}{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i^2} = 4\pi^2 \frac{\overline{L}}{\overline{T^2}}$$

3. 误差

测量技术的水平，测量结果的可靠性，测量工作的价值全在于精确度，也就是测量误差的大小。

误差公理：实验结果都具有误差，误差自始至终存在于一切科学实验的过程中，而且贯穿于整个测量过程的始终。误差的存在是绝对的，误差的大小则是相对的。

研究误差的理论就叫做误差理论。误差之所以上升到理论来研究，是因为误差常常会歪曲客观现象，使精确度降低，而测量的精确度不仅对工程技术和工业产品的质量起着监督和保证的作用，而且往往还是工程成败、产品优废的一项决定性因素。所以，必须分析实验测量时产生误差的原因和性质，正确处理数据，以消除、抵消和减少误差。误差理论可以帮助人们正确地组织实验和测量，合理地设计仪器，选定仪器及选定测量方法，使能以最经济的方式获得最有效的结果。测量精度的提高，以及对测量误差的深入研究，往往也成为科学新发现和带根本性的技术革新的前导。今天，对一个国家的科学技术和现代化生产来说，测量技术水平是衡量其进步程度的重要标志之一。

在实验测量与计算中，因仪器分辨力的限制，得到的数据是近似值，而像 π、e、$\sqrt{2}$这样的无理数，计算时也只能用近似值表示，这些近似值的正确取值与否，对保证质量和减少人力、物力的消耗有极为密切的关系。

（二）误差的来源和分类

从不同的角度误差可以有不同的分类。按其来源和性质可分为以下三类。

1. 系统误差(固定误差)

定义:在同一条件下多次测量同一量时误差的绝对值和符号保持恒定,或其值总以某一确定规律偏离真值,称为系统误差。

产生系统误差的原因有:仪器本身的缺陷、理论公式和测量方法的近似性、环境的改变和个人存在的不良测量习惯等。具体系统误差按下述各方面还可分为:

(1) 变化与否

1) 恒定系统误差:恒正、恒负

2) 可变系统误差:线性、周期性、复杂规律

(2) 掌握程度

1) 已定系统误差

2) 未定系统误差

3) 定向系统误差

4) 定值系统误差

(3) 来源

1) 工具误差

2) 装置误差

3) 人身误差

4) 外界误差

5) 方法误差

实验条件一经确定,系统误差客观上便是一个恒定值,而不能通过多次测量的平均值来减小或消除。但如果能找出系统误差的原因,就能采用适当的方法来减小或消除它的影响,或对结果进行修正。实验时要注意消除系统误差:从直接测量值到运算过程值到最后结果,逐级消除系统误差。

消除系统误差称为修正,是重要的实验技术。直接测量值的修正常用于电表和螺旋测微器的零点校正、电表刻度校正、交换法消除电桥 1∶1 挡和天平的不等臂误差、双游标消除分光计的偏心差等。

2. 偶然误差(随机误差)

定义:在实际相同的实验条件下,即使每次都消除了系统误差(假定已全部消除),多次测量同一量时,每次测量值还是不可能一样,误差的绝对值的变化时大时小,符号时正时负,具有偶然性而没有确定的规律,也不可以预定,但具有抵偿性的误差。

这种误差主要是由于各种未知的偶然因素对实验者、仪器、被测物理量的影响而产生的。理论和实验都表明,当测量次数足够大时,偶然误差服从统计规律,具有以下的特点:

① 单峰性:绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大。

② 有界性:绝对值很大的误差出现的概率趋零。

③ 对称性:绝对值相等的正负误差出现的概率相等。

④ 抵偿性:由于随机误差在各项测量中的单个无规性,导致了它们的和有正负相消的机会,随着次数的增加,偶然误差的算术平均值随测量次数的增加而趋于零:

$$\overline{\Delta x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i}{n}=0$$

因此，多次测量的平均值的随机误差比单个测量的随机误差小，增加测量次数可以减小偶然误差。

必须注意，误差的性质是可以在一定的条件下相互转化的，如尺子的分划误差，对于制造尺子来说是随机误差，但将它作为基准尺检定成批尺子时，该分划误差使得成批测量结果始终长些或短些，这就成为系统误差。各分划线的误差大小正负不一样，如果均匀地用尺子的各个不同位置测量一定的长度，则误差时大时小、时正时负，随机化了。在实际的科学实验中，人们常利用这些特点，以减小实验结果的误差。如：当实验条件稳定且系统误差可掌握时就尽量保持在相同条件下做实验，以便修正系统误差；当系统误差未能掌握时，就可以均匀改变物理条件（如尺子的位置）使系统误差随机化，以便得到抵偿部分误差后的实验结果。

3. 过失误差（粗差）

定义：明显歪曲测量结果的误差。

含有过失误差的测量值称为坏值或异常值，正确的结果不应包含过失误差，即所有的坏值都要剔除。

下面讨论偶然误差的估算方法。

（三）基本概念

1. 真值

定义：在某一时刻和位置或状态下某量的效应体现出的客观值或实际值。

测量的目的就是力图得到真值。

（1）绝对真值——永远不可知

通过有限的实验手段是不能得到真值的，测量值总是真值的近似值，真值只存在于纯理论之中。根据误差公理，要想知道真值，就必须测量它，而测量它又需要某种参考作为标准，这样就陷入了无穷的循环之中，因此绝对真值是不可知的。但是，随着人类认识运动的推移和发展，可以无限地逐渐逼近它。

（2）理论真值——仅存在于纯理论之中

由于绝对真值不可知，可从理论中定义一些真值，这样的真值叫做理论真值。如：平面三角形三个内角之和恒为 180°，这样的参考标准实际上是不存在的，它只存在于纯理论之中，因为无论用多精密的仪器、多科学的手段，其测量的结果都不会正好等于 180°，而只能无限靠近它。此外，还有理论设计值和理论公式表达值等。

（3）指定真值——国际计量大会的决议

由于绝对真值不可知，理论真值又仅存在于纯理论之中，所以一般由国家设立各种尽可能维持不变的实验基准和标器，指定以它们的数值作为参考标准。

一百多年来，一般采用国际计量大会确定的关于 7 个基本物理量的单位的标准定义：

1）长度的单位：m（米）

1889 年，1 m 等于保存在巴黎附近色夫尔国际计量局铂铱合金米尺上两条刻线间在 0 ℃时的距离。

1960 年，1 m 等于氪 86 原子的 $2p_{10}$ 能级和 $2d_5$ 能级之间跃迁所对应的辐射在真空中

的 1 650 763.73 个波长的长度。

1973 年，又规定氦氖激光器的辐射波长作为长度副基准。

1983 年，第 17 届国际计量大会正式规定以光在真空中 1/299 792 458 s 的时间间隔内所经过的距离作为米的新定义，这个定义把真空中光速值 299 792 458 m/s 作为一个不带误差的基本物理常数来使用。

2）质量的单位：kg（千克）

铂铱合金的国际千克原器的质量。

3）时间的单位：s（秒）

铯 133 原子基态的两个超精细能级之间跃迁的辐射周期的 9 192 631 770 倍的持续时间。

4）电流强度的单位：A（安培）

恒定电流在真空内流过相距 1 m 的两根无限长且圆截面极小的平行直导线时，在两导线之间 1 m 长度上产生的力等于 2×10^{-7} N。

5）热力学温度的单位：K（开尔文）

水三相点热力学温度的 1/273.16。

6）发光强度的单位：C（坎得拉）

在 101 325 Pa 压力下，处于铂凝固温度的黑体 1/600 000 m^2 表面在垂直方向上的发光强度。

7）物质量的单位：mol（摩尔）

是物系的物质的量，该物系中所包含的结构粒子数与 0.012 kg 碳 12 的原子数目相等。

凡满足以上条件复现出的量值都是真值。

（4）标准器相对真值——准真值

高级标准器的误差与低一级标准器或普通仪器的误差相比为其 1/5（或 1/3～1/20）时，则可以认为前者是后者的相对真值。

2. 近真值

（1）算术平均值

由于测量误差的存在，在测量中真值是不知道的。对某一物理量进行多次测量，每次测量的结果有可能比真值偏大，也有可能偏小。统计理论可以证明，在条件不变的情况下进行多次测量时，算术平均值便接近真值。

设测量值为 x_1，x_2，…，x_n，其算术平均值定义为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{0-1}$$

$\bar{x}$ 为该物理量的最佳值，人们就以 $\bar{x}$ 作为测量结果的中间值。

$\bar{x}$ 偏离真值多大呢？也就是说最佳的误差多大？下面介绍常用的估算 $\bar{x}$ 绝对误差的两种方法。

（2）绝对误差

任何物理量在一定条件下都客观存在着一个惟一确定的值，这个值称为真值。由于实验条件、测量方法、测量仪器和测量自身判断等原因，所测得的值与真值之间总存在一定的差，这个差称为测量值的误差，定义为

$$\Delta x = x - x' \tag{0-2}$$

式中，x'为真值，x 为测量值，Δx 为测量误差。

(3) 偏差 d

定义：
$$d = |x_i - \bar{x}|$$

(4) 绝对误差的算术平均值

某次测量值 x_i 与算术平均值 $\bar{x}$ 之差的绝对值叫做该次测量值的绝对误差，即

$$\Delta x_i = |x_i - \bar{x}|$$

把各次测量的绝对误差求算术平均值，即

$$\overline{\Delta x} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i \tag{0-3}$$

式中，n 为测量次数，Δx_i 为第 i 次测量的绝对误差。

将式(0-2)代入式(0-3)得

$$\overline{\Delta x} = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - x'}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i - x' = \bar{x} - x' \tag{0-4}$$

根据随机误差的抵偿性，将式(0-4)两边对 n 取极限：

$$\lim_{n\to\infty}\overline{\Delta x} = \lim_{n\to\infty}\bar{x} - \lim_{n\to\infty}x' = 0$$

得

$$\bar{x} = x'$$

可见，只有当测量次数 n 趋于∞时，算术平均值才等于真值，从而反证得绝对真值是不可知的。习惯上绝对误差$\overline{\Delta x}$也叫做平均绝对偏差 d，并作为最大误差。即

$$d = |\overline{\Delta x}| = |x - \bar{x}|$$

测量结果可表示为

$$x = \bar{x} \pm \overline{\Delta x} \tag{0-5}$$

最佳值的误差以平均值的算术平均绝对偏差表示，这种方式比较简单。但它的缺点是无法表示出各次测量值之间彼此符合的情况。因为，在一列测量值中偏差彼此接近的情况与另一组测量中偏差有大、中、小的情况所得平均值可能相同。

(5) 标准偏差

测量值的标准偏差的定义为：各测量值误差的平方和平均值的平方根，即

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x')^2}{n}}\ (n\to\infty) \tag{0-6}$$

式中，x'为真值。

实际上因实验条件和测量次数的限制，真值是得不到的，因此从式(0-6)不能直接求出 σ，且真值 x'由算术平均值 $\bar{x}$ 来代替。可以证明：n 次测量中某一次测量的标准偏差为

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (n\text{ 有限}) \tag{0-7}$$

n 次测量的算术平均值 $\bar{x}$ 的标准偏差为

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{0-8}$$

实验中以式(0-8)用得最多、最普遍。用标准偏差表示的测量结果为

$$x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}} \tag{0-9}$$

标准偏差一般在 $n>5$ 时才能更真实地反映客观规律。在同样条件下

$$\Delta\bar{x} > \sigma_{\bar{x}}$$

(6) 正态分布

以 $P(x)$ 分布密度为纵坐标，x 为横坐标，标准正态分布如图 0-1 所示。标准偏差是对一组测量数据可靠性的估计，根据高斯误差理论可以证明，任一测量值的误差，落在[$-\sigma$, σ]置信区间的置信概率为 68.3%。标准偏差 σ 小，占此组测量数据中的 68.3%的数据在小范围[$x-\sigma$, $x+\sigma$]出现，因此这组数据可靠性就大；反之测量不大可靠。还可以证明，任一测量值的误差落在[-2σ, 2σ]置信区间的置信概率为 95.5%。落在[-3σ, 3σ]置信区间的置信概率为 99.7%。因此，一般将 2σ 称为界限误差。测量列中当某一测量值与平均值之偏差的绝对值大于 2σ 时，应将其当做过失数据而舍去。

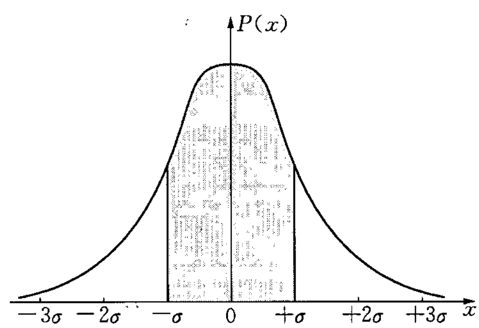


图 0-1

例 1 已知某一物体的长度经 16 次测量，其值分别为 $x_1 = 1.99$ cm, $x_2 = 2.02$ cm, $x_3 = 2.01$ cm, $x_4 = 1.97$ cm, $x_5 = 1.96$ cm, $x_6 = 2.04$ cm, $x_7 = 2.01$ cm, $x_8 = 2.02$ cm, $x_9 = 1.99$ cm, $x_{10} = 1.98$ cm, $x_{11} = 1.99$ cm, $x_{12} = 2.03$ cm, $x_{13} = 2.01$ cm, $x_{14} = 1.98$ cm, $x_{15} = 2.10$ cm, $x_{16} = 1.90$ cm，求长度的算术平均值和标准偏差。

解：由式(0-1)求 16 次测量的长度的算术平均值为

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}\Delta x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{16}}{16} \approx 2.00\text{ cm}$$

由式(0-7)求 16 次测量中某一次测量的标准偏差为

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{16}(x_i - \bar{x})^2}{16-1}}$$
$$= \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_{16} - \bar{x})^2}{16-1}} \approx 0.043\text{ cm}$$

所以 $$2\sigma \approx 0.086\ \text{cm}$$

则 $$|x_1-\bar{x}|=|1.99-2.00|=0.01\ \text{cm}<2\sigma_x\approx 0.086\ \text{cm}$$

$$|x_2-\bar{x}|=|2.02-2.00|=0.02\ \text{cm}<2\sigma_x\approx 0.086\ \text{cm}$$

……………………

$$|x_{14}-\bar{x}|=|1.98-2.00|=0.02\ \text{cm}<2\sigma_x\approx 0.086\ \text{cm}$$

均小于 2σ

而 $$|x_{15}-\bar{x}|=|2.10-2.00|=0.10\ \text{cm}>2\sigma_x\approx 0.086\ \text{cm}$$

$$|x_{16}-\bar{x}|=|1.90-2.00|=0.10\ \text{cm}>2\sigma_x\approx 0.086\ \text{cm}$$

所以将 x_{15} 和 x_{16} 作为过失误差除掉。再重复上述步骤。

由式(0-1)求 14 次测量的长度的算术平均值为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\frac{1}{14}\sum_{i=1}^{14}\Delta x_i=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{14}}{14}\approx 2.00\ \text{cm}$$

由式(0-7)求 14 次测量中某一次测量的标准偏差为

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{14}(x_i-\bar{x})^2}{14-1}}$$

$$=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_{14}-\bar{x})^2}{14-1}}\approx 0.024\ \text{cm}$$

所以 $$2\sigma\approx 0.048\ \text{cm}$$

而 $$|x_1-\bar{x}|=|1.99-2.00|=0.01\ \text{cm}<2\sigma_x\approx 0.048\ \text{cm}$$

$$|x_2-\bar{x}|=|2.02-2.00|=0.02\ \text{cm}<2\sigma_x\approx 0.048\ \text{cm}$$

……………………

$$|x_{14}-\bar{x}|=|1.98-2.00|=0.02\ \text{cm}<2\sigma_x\approx 0.048\ \text{cm}$$

均小于 2σ，由式(0-8)求 14 次测量的算术平均值 $\bar{x}$ 的标准偏差为

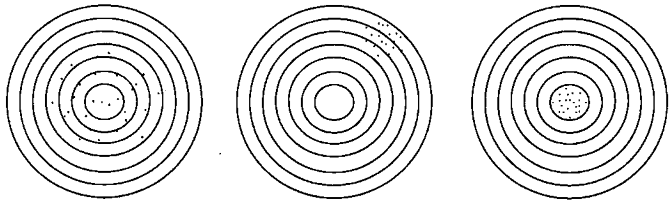
$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}=\frac{0.024}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{14}(x_i-\bar{x})^2}{14\times(14-1)}}\approx 0.006\ \text{cm}\approx 0.01\ \text{cm}$$

所以 $$x=\bar{x}\pm\sigma_{\bar{x}}=(2.00\pm 0.01)\ \text{cm}$$

(7) 精度

应该指出：把误差分为系统误差与随机误差是研究误差的需要。对于一个具体测量中出现的误差应是系统误差和偶然误差的综合。精度中包括精密度、准确度和精确度，测量的精密度高是指随机误差小、精密度低是指随机误差大；准确度高是指系统误差小、准确度低是指系统误差大；精确度的高低则是反映着系统误差和随机误差的总体效应。

以三个人打靶为例，A、B、C三人打靶的结果与系统误差、随机误差、精密度、准确度、精确度之间的关系如图 0-2 所示。



系统误差	小	大	小
随机误差	大	小	小
精密度	低	高	高
准确度	高	低	高
精确度	低	低	高

图 0-2

(8) 测量不确定度

当前，在严格的计量工作中，开始用“不确定度(uncertainty)”来表示测量误差可能出现的范围，详见附录 2。

3. 直接测量的结果及误差的估算

(1) 多次测量

详见近真值中(1)～(6)的内容。

(2) 单次测量的误差处理

实验中，有的测量受到环境条件的限制不可能进行多次(也有的实验不需要多次测量)，只能进行一次，即所谓单次测量。单次测量 $x_{测}$ 的误差属于未定系统误差，在精度要求不高的实验中。常取仪器最小分度“d”的一半或直接用仪器误差来表示最大误差，按随机误差处理。

$$x = x_{测} \pm \frac{d}{2} \tag{0-10}$$

或

$$x = x_{测} \pm \Delta_{仪} \tag{0-11}$$

式中，x 是 x' 的简写，在不致混淆时可以这样。

在精度要求较高的实验或计算间接测量的标准偏差时，个别量只进行了一次测量，这时就需要知道单次测量的标准偏差。根据统计理论可以证明单次测量的标准偏差为

$$\sigma=\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}} \tag{0-12}$$

当测量仪器级别较低时，如 0.5 级或更差的电表，校准后，最大误差减小一半，剩余的随机误差为

$$\sigma = \frac{\Delta_{仪}}{2\sqrt{3}} \tag{0-13}$$

式(0-11)、式(0-12)、式(0-13)中，$\Delta_{仪}$ 是仪器出厂鉴定书或仪器上标注的仪器误差。

所谓仪器误差是指在正确使用下，测量值和被测物理量之间可能产生的最大误差。如果没有注明，应根据仪器的级别按下式进行计算。即

$$\Delta_{仪}=量程\times不确定度等级(\%)$$

(3) 相对误差

为了全面评价一个测量结果的优劣，还需要看被测量量本身的大小。为此，要引入相对误差的概念。其定义为

$$E_{\overline{\Delta x}}=\frac{\overline{\Delta x}}{x}\times 100\% \text{ 或 } E_{\sigma_{\bar{x}}}=\frac{\sigma_{\bar{x}}}{x}\times 100\% \tag{0-14}$$

实验结果的好坏主要取决于相对误差。当被测量有公认理论值或标准值时，常把测量值与理论值或标准值进行比较，并用相对偏差来表示，正值代表偏大，负值代表偏小。

$$E_x=\frac{|测量值-理论值(或标准值)|}{理论值(或标准值)}\times 100\% \tag{0-15}$$

4. 间接测量的结果及误差的估算

间接测量的结果(即最佳值)，是把各直接测量的最佳值代入相应的函数式中计算而得的。

因为各直接测量存在误差，因此，间接测量也必然有误差。这种由直接测量值误差影响到间接测量值误差的现象称为误差的传递。下面简单介绍算术平均误差的传递和标准偏差的传递。

(1) 算术平均误差(最大不确定度)的传递

设间接测量量 N 与各直接测量量 $x, y, z, \cdots$ 的最佳值之间有下列函数关系。

$$N=f(x, y, z, \cdots) \tag{0-16}$$

各直接测量值为

$$x=\bar{x}\pm\overline{\Delta x},\ y=\bar{y}\pm\overline{\Delta y},\ z=\bar{z}\pm\overline{\Delta z},\ \cdots$$

则 N 的测量结果应表示为

$$N=\overline{N}\pm\overline{\Delta N}=f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \cdots)\pm\overline{\Delta N}$$

式中，N 是把各直接测量最佳值 $x, y, z, \cdots$ 代入式(0-15)而得到，$\overline{\Delta N}$的计算式子导出如下。

对式(0-16)全微分，得

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\cdots$$

把变量 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z, \cdots$ 视为最大误差，记作$\overline{\Delta x}, \overline{\Delta y}, \overline{\Delta z}, \cdots$，考虑最不利的情况，取各项的绝对值，有

$$\overline{\Delta N}=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\overline{\Delta x}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\overline{\Delta y}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\overline{\Delta z}\right|+\cdots \tag{0-17}$$

式中考虑了误差互相加强的情况。

为了计算间接测量的相对误差，可对式(0-16)取对数后，再求全微分，有