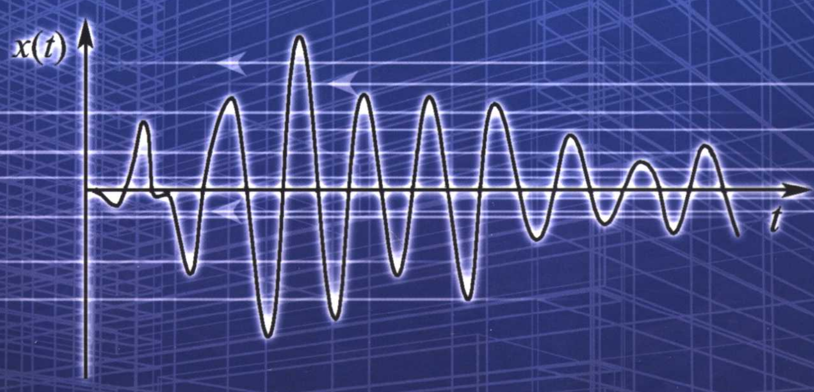
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等学校理工科力学类规划教材

结构动力学基础

FUNDAMENTALS OF STRUCTURAL DYNAMICS

张亚辉　林家浩　编著



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
高等学校理工科力学类规划教材

结构动力学基础

FUNDAMENTALS OF STRUCTURAL DYNAMICS

编著 张亚辉 林家浩
主审 李宏男

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

结构动力学基础/ 张亚辉,林家浩编著. —大连:大连理工大学出版社,2007.5
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
ISBN 978-7-5611-3570-9

Ⅰ.结… Ⅱ.①张…②林… Ⅲ.结构动力学—高等学校—教材 Ⅳ.O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 055550 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
电话:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:17 字数:380 千字
2007 年 5 月第 1 版 2007 年 5 月第 1 次印刷

责任编辑:梁 锋 范业婷 责任校对:宜 呈
封面设计:宋 蕾

ISBN 978-7-5611-3570-9 定 价:28.00 元

前言

近年来，随着工程建设的现代化程度越来越高，对许多复杂工程结构和高精尖机械产品的动态特性分析也提出了更高的要求；而结构动力分析理论和相关数值方法以及计算机技术的发展，又为解决结构动力学问题提供了强有力的手段。

对于我国高等教育中的工程力学专业来说，结构动力学是一门非常重要的基础课程。为了准确、全面地反映该学科领域内的理论方法及最新发展状况，本书作者结合多年的教学和科研工作，并吸取了结构动力学近期出现的一些重要成果编写了这本教材。本书不但注重结构动力学基本概念、理论和方法的介绍，更强调如何应用它们来解决实际的工程问题。本书已入选教育部普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

全书共分 7 章。第 1 章简单介绍结构动力学问题的研究内容及其与静力问题的主要区别。第 2 章较详细地介绍了单自由度系统的振动理论和主要求解方法，包括运动方程的建立和无阻尼系统及有阻尼系统自由振动，在简谐荷载、周期性荷载和任意荷载作用下动力响应的求解。第 3 章介绍多自由度系统振动方程的建立和一些重要求解方法，包括低阶广义特征值问题的简单解法，强迫振动问题的振型分解法和逐步积分法以及复振型方法等。第 4 章介绍连续系统的振动，主要介绍了杆、梁、板等简单弹性系统自由和强迫振动偏微分方程的基本求解方法。第 5 章介绍应用能量原理建立结构运动方程以及对运动方程的近似求解。第 6 章针对更为复杂的结构系统，介绍了有限元动力分析方法的要点，包括质量阵、刚度阵和阻尼阵的生成，大型广义特征值问题的有效解法，复杂问题的动态子结构方法等。第 7 章介绍了结构随机振动的入门知识，着重介绍平稳随机振动概念和方法。其中包括了由本书作者提出的高效精确算法——“虚拟激励法”。各章附有习题和答案，以便于读者自学。

本书的出版得到了大连理工大学教材出版基金的支持。钟万勰院士对本书的编写给予了许多鼓励与指导，杨春秋教授和王希诚教授对本书的编写给予了许多细节上的帮助；李宏男教授审阅了全书，并提出了许多宝贵的意见。作者在此向他们表示衷心的感谢。

本书可以作为工程力学及土木工程专业的本科生或研究生的教科书，也可以作为相关专业教师、研究工作者以及工程技术人员的学习参考书。

由于作者的水平有限，本书的缺点和不足在所难免，敬请相关专家学者指正，也请读者在使用中对需要完善和补充的地方提出切实的意见。大家有任何意见或建议，请通过以下方式与我们联系：

邮箱　jcjf@dutp.cn

电话　0411－8407962;84708947

张亚辉　林家浩

2007 年 3 月

于大连理工大学

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目 录

第1章

概　述

1.1　结构动力学的研究任务

工程结构的动力问题有两大类，一类是求结构的自振频率（固有频率）及相应的振型，另一类是求在任意动力荷载（例如冲击力、风、海浪或地震）作用下结构位置、变形或内力等随时间的变化规律[1]。

对于线性结构，其自振频率和振型只与结构自身的属性（如刚度、质量分布，约束条件等）有关，而与引起结构振动的原因无关，是结构本身所固有的属性。

例如，对于一个固定于地面的框架结构，如图 1-1(a)所示，在给定了结构尺寸和材料参数后，即可计算它的自振频率和振型。它的前 5 阶自振频率与自振周期列于表 1-1，前 5 阶振型示于图 1-1(b)～图 1-1(f)。

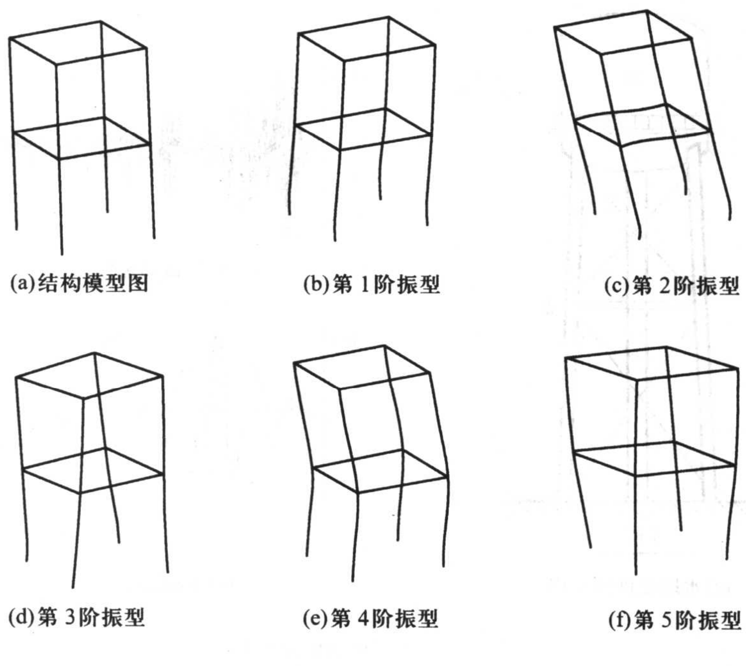


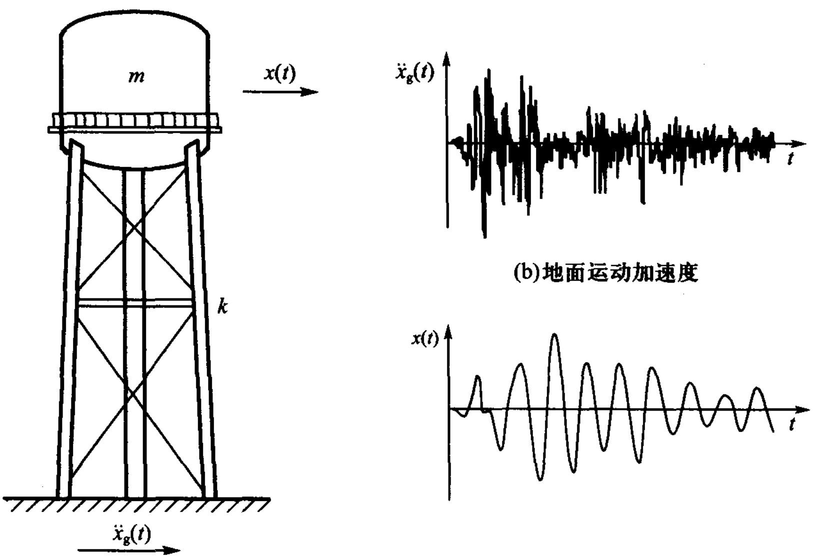
图 1-1　框架结构及其振型图

表 1-1　　框架结构自振频率与自振周期

阶数	自振频率/Hz	自振周期/s
1	0.966	1.035
2	1.255	0.767
3	1.395	0.717
4	2.870	0.348
5	3.126	0.320

动力荷载是指荷载的大小、方向或位置随时间变化的荷载。一般来说，工程中绝大多数荷载都是动力荷载。如果荷载随时间变化十分缓慢，以至于动力影响微乎其微，这时可以把荷载看做静力荷载。粗略地讲，如果一些力使结构以大约不超过其最低自振频率的$\frac{1}{3}$值作振动，通常就可以将此作为静力学问题处理[1]。在本书的后面章节将会看到，较之相同幅值的静力荷载，动力荷载作用下结构的最大响应(位移、应力及应变等)一般要大得多。

对结构进行动力分析的目的是要保证结构在使用期间，在可能发生的动力荷载作用下能够正常地工作，并确保其安全可靠。这就需要知道结构在任意动力荷载作用下随时间而变化的响应(包括位移、应变和应力等)。为此，就需要有一套有效的求解动力响应的方法。这也是本书的目的所在。例如，如图 1-2(a)所示水塔，受到地震作用，地面运动的加速度如图 1-2(b)所示。通过动力学分析，就可以计算出水塔顶端的位移随时间的变化(响应)情况，如图 1-2(c)所示。



(a)水塔受地震作用　(b)地面运动加速度　(c)水塔顶端位移

图 1-2　水塔地震响应分析

在工程技术领域中，振动现象比比皆是。例如，桥梁和建筑物在风或地震作用下的振动，海洋平台在风、浪、流及冰作用下的振动，车辆在不平路面上行驶时的振动，飞机和船舶在航行中的振动，机床和刀具在加工时的振动，各种动力机械的振动等。多数情况下，振动是有害的。例如，振动引起的噪声，会妨碍人们的身体健康；过大的振动会影响机床的加工精度，影响仪表的测量精度，造成控制系统失灵等；机械振动还会消耗能量，加剧构件的疲劳和磨损，从而缩短机器和结构物的使用寿命；强烈的振动会引起结构破坏，造成灾难性事故。但有时振动也可以为人类服务。例如，利用振动的规律进行打桩、捣固、筛选等。因此就需要研究振动的规律和特性以达到应用和控制的目的。

1.2 动力问题与静力问题的主要区别

动力问题在以下几个方面区别于静力问题：第一，动力问题具有随时间变化的性质。由于作用在结构上的荷载和结构的响应随时间而变化，动力问题不像静力问题那样具有不随时间而变化的单一的解。因此，动力分析要比静力分析更复杂且更消耗时间。第二，在动力问题中加速度起着很大的作用。加速度产生与之反向的所谓“惯性力”作用在结构上。例如，如图1-3(a)所示的悬臂梁在动力荷载 $F(t)$ 作用下发生振动时，梁中弯矩、剪力不仅要平衡外荷载 $F(t)$，而且要平衡振动中梁的加速度所引起的“惯性力”。但如果悬臂梁所承受的是静力荷载 F，如图1-3(b)所示，则其弯矩、剪力及挠度只取决于给定的静力荷载 F。一般来说，如果“惯性力”是结构内部弹性力所平衡的全部荷载中的一个重要部分，那么，就必须考虑问题的动力特性；反之，若荷载随时间变化十分缓慢，从而结构的振动也缓慢到致使“惯性力”小到可以忽略不计的程度，那么，即使荷载和响应可能随时间而变化，但对任何瞬时的分析，仍可用静力分析的方法来解决。正如前面所提到的，如果荷载使结构以大约不超过其最低自振频率的 $\frac{1}{3}$ 值作振动，那么，就可以将此作为静力学问题处理。

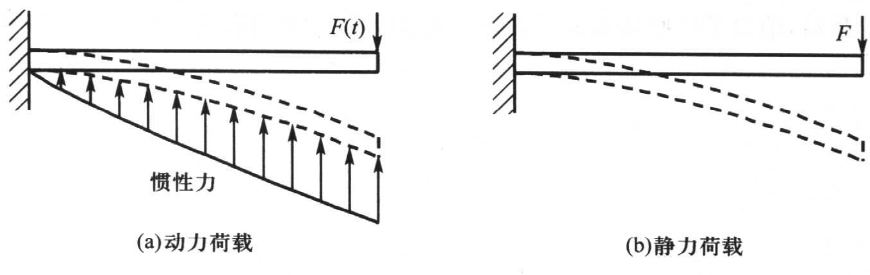


图1-3 悬臂梁受动力与静力荷载作用

另外，阻尼也是动力问题中需要考虑的重要因素。所有的结构在振动时都要耗费能量。当仅考虑结构的自振特性，或只研究结构在较小时段内的动力响应时，一般可以采用无阻尼分析。然而当阻尼很大，或阻尼虽小，但振动持续时间较长，或研究在共振区的性态时，分析中就必须包含阻尼的影响。结构振动过程中的阻尼力有不同的来源，例如，干的滑动面之间的摩擦、润滑面之间的摩擦、空气或液体的阻力、材料的不完全弹性引起的

内摩擦等。准确地模拟阻尼通常是困难的，因为有许多机理在结构中起作用。不过，如果只有一种形式的阻尼占优势，就有可能找到一种较合理的模型。

1.3 本书的内容与安排

本书系统叙述了结构动力学的基本概念、基本理论和分析方法。要求读者具备结构静力学、高等数学、数理方程以及线性代数等方面的基础知识。全书分为 7 章：

第 1 章简单介绍结构动力学问题的研究内容及其与静力问题的主要区别。

第 2 章较详细地介绍了单自由度系统的振动理论和各种求解方法。从单自由度系统运动方程的建立出发，分别按无阻尼系统和有阻尼系统研究其自由振动特点；讨论了在简谐荷载、周期性荷载和任意荷载作用下单自由度系统强迫振动的求解方法；介绍了动力方程求解的逐步积分法；讨论了由基础运动引起的强迫振动；简单介绍了一些基本的阻尼理论。

第 3 章建立了多自由度系统的振动方程和各种求解方法。首先详细讨论了两个自由度系统的振动特性，介绍了几种求解广义特征值问题的简单方法；然后讨论了多自由度系统振型的性质，介绍了求解多自由度系统强迫振动问题的振型分解法和逐步积分法；最后介绍了多自由度系统考虑阻尼的自由振动问题及强迫振动求解的复振型方法。

第 4 章为连续系统的振动，主要介绍了杆、梁、板等简单弹性系统振动的求解方法。

第 5 章介绍了应用能量原理建立结构运动方程以及近似求解结构动力学问题的几种方法。

在第 6 章里，对于更为复杂的结构系统，讨论了基于有限元法建立结构的刚度阵和质量阵的方法，介绍了求解大型广义特征值问题的子空间迭代法，以及由子结构动力特性综合分析得到整体结构动力特性的动态子结构方法。

第 7 章介绍了结构随机振动的基本概念，着重讨论了平稳随机振动的分析方法，介绍了高效的随机振动计算方法——“虚拟激励法”。

书的最后，给出了一些基础参考书和有关文献[2-22]，供读者进一步学习时参考。

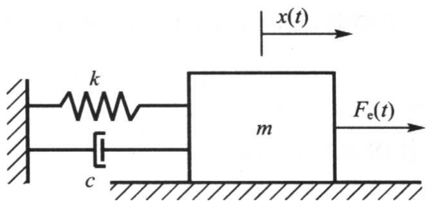
此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 2 章　单自由度系统的振动

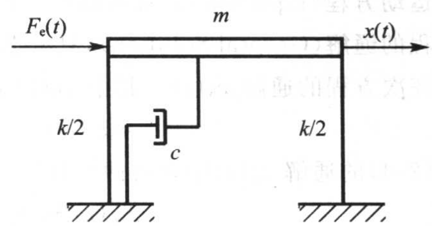
2.1 概　述

理解和掌握**单自由度**(Single Degree of Freedom，SDOF)系统的振动特性对初学者来说是至关重要的。一方面，单自由度系统可用于许多实际工程结构的初步设计和分析；另一方面，单自由度系统的一些重要概念、特性和研究方法，又是研究复杂结构系统振动问题的基础。

图 2-1 给出了两种典型的单自由度系统的力学模型。其中，如图 2-1(a)所示系统称为**弹簧-质量系统**(Spring-Mass System)，它由刚性质量块、弹簧和阻尼器组成，弹簧和阻尼器的质量与刚性质量块相比可以忽略，系统的位移完全由刚性质量块的位移 x 确定。如图 2-1(b)所示剪力框架结构，质量主要集中在刚度极大的梁上，柱子质量很小，并且可以按一定方式叠加到梁上。柱子的竖向位移和两端的转动都假定为零，系统的运动由梁的水平位移 x 给出。



(a) 弹簧-质量系统



(b) 剪力框架

图 2-1　典型的单自由度系统

以如图 2-1(a)所示的弹簧-质量系统为例，对单自由度系统进行受力分析。如图 2-2 所示，假定质量块偏离静平衡位置(虚线所示)的位移为 $x(t)$。此时共有 3 种力作用在质量块上：恢复力、阻尼力和外力。

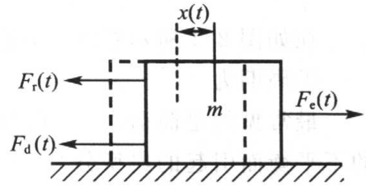


图 2-2　弹簧-质量系统受力分析

1. 恢复力(Restoring Force)

弹簧的变形产生的弹性力 $F_r=-kx(t)$。这个弹性力阻止质量块产生位移，作用方向是使质量块回到平衡

位置，即与 $x(t)$ 方向相反，故称恢复力。

2. 阻尼力（Damping Force）

系统振动时，总要受到材料内部的摩擦阻力，以及与介质间、各构件之间的摩擦。这种阻力的作用，称为**阻尼**（Damping）作用。目前国内外对阻尼机理的认识还不是很清楚。百余年来，人们提出了多种阻尼理论来解释结构的阻尼现象。这里采用**黏滞（或黏性）阻尼**（Viscous Damping）模型，这是目前应用最为广泛的一种阻尼模型。该模型假定质量振动时所受的阻尼作用与其运动速度成正比。若以 c 表示**阻尼系数**（Damping Coefficient），R 表示阻尼力，则

$$R=-c\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-c\dot{x}(t) \tag{2-1}$$

式(2-1)中的负号表示阻尼力与振动速度方向相反，在符号上加"·"号表示对时间的微商。c 的单位是牛·秒/米（N·s/m）。因此，如图 2-2 所示弹簧-质量系统的阻尼力 $F_d=-c\dot{x}(t)$。

3. 外力（External Force）

外部作用在质量块上的力 $F_e(t)$，一般情况下为时间的函数。

根据牛顿第二定律，可以导出下式

$$F=F_r+F_d+F_e=-kx(t)-c\dot{x}(t)+F_e(t)=m\ddot{x}(t) \tag{2-2}$$

将式(2-2)整理得

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=F_e(t) \tag{2-3}$$

式(2-3)即为单自由度系统的**动力平衡方程**（Dynamic Equilibrium Equation），通常称为**运动方程**（Equation of Motion）。这是一个二阶非齐次线性常微分方程。要求非齐次方程的**通解**（General Solution），只需求它的一个**特解**（Particular Solution）$x_p(t)$ 和它相应的齐次方程的通解 $x_h(t)$。其中 $x_h(t)$ 满足

$$m\ddot{x}_h(t)+c\dot{x}_h(t)+kx_h(t)=0 \tag{2-4}$$

方程(2-4)的通解 $x_h(t)$ 中含有两个待定常数。特解 $x_p(t)$ 满足

$$m\ddot{x}_p(t)+c\dot{x}_p(t)+kx_p(t)=F_e(t) \tag{2-5}$$

齐次方程的通解和非齐次方程的特解之和，就构成了非齐次方程的通解

$$x(t)=x_h(t)+x_p(t) \tag{2-6}$$

为确定通解中的两个待定常数，还需要两个**初始条件**（Initial Condition）。这两个初始条件通常为给定的初始位移 x_0 和初始速度 $\dot{x}_0$，即

$$x(0)=x_0,\quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0 \tag{2-7}$$

在如图 2-1 所示系统中，施加在质量块上的力 $F_e(t)$ 主要有 3 种类型：

①周期力

最常见的是简谐力，如 $F_e(t)=P_0\sin\theta t$ 或 $F_e(t)=C\theta^2\sin\theta t$，后者可描述由转动机械的不平衡而引起的典型分力。一个周期性的非简谐力可用**傅里叶**（Fourier）级数表示为一些简谐项的和。对于线性系统，总响应可由每一个简谐分量各自的响应叠加而得到。

②瞬变力或非周期性的力

通常这些力是突然地或在一个短时间内施加的。这种类型的力的两个简单例子，如图 2-3(a)和图 2-3(b)所示。

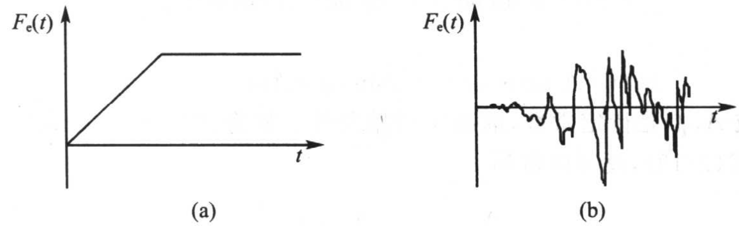


图 2-3　瞬变力

③随机力

这种力随时间变化的过程不能用已知的函数来确定，而只能用统计的方式描述。阵风力即是典型的随机力。

对于简谐激励(或周期性激励)，一般不重视初始条件的影响，只需求解结构的稳态响应。对于瞬变力或非周期性的激励，则往往需要考虑初始条件的影响而求解结构的瞬态响应。对于随机力，结构的响应只能统计地确定。

振动也可能由支座的强迫运动所激发。支座的强迫运动也可以是简谐的、瞬变的或随机的。比较典型的课题为地震、爆炸引起的结构振动，不平路面引起在其上行驶车辆的振动等。

2.2　自由振动

若系统不受外部的干扰(阻尼除外)作用，仅由初始条件(初位移和初速度)引起的振动，称为**自由振动**(Free Vibration)。反之，系统因持续地受到外部干扰作用而发生的振动，称为**强迫振动**(Forced Vibration)。

由于系统在自由振动中不受外力作用，由方程(2-5)可知响应的特解为 0。因此齐次方程通解 $x_h(t)$ 就是自由振动响应，式(2-4)就是自由振动方程，即

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0 \tag{2-8}$$

自由振动方程(2-8)考虑了阻尼的影响，称为**有阻尼自由振动**(Damped Free Vibration)。如不考虑阻尼影响，则称为**无阻尼自由振动**(Undamped Free Vibration)。

2.2.1　无阻尼自由振动

当不考虑阻尼作用时，自由振动方程(2-8)退化为

$$m\ddot{x}(t)+kx(t)=0 \tag{2-9}$$

若令

$$\omega^2=\frac{k}{m} \tag{2-10}$$

则方程(2-9)可改写为

$$\ddot{x}(t)+\omega^2 x(t)=0 \tag{2-11}$$

常微分方程(2-11)的通解很容易得到,可表示为

$$x(t)=A_1\sin\omega t+A_2\cos\omega t=A\sin(\omega t+\phi) \tag{2-12}$$

则

$$\dot{x}(t)=A_1\omega\cos\omega t-A_2\omega\sin\omega t=A\omega\cos(\omega t+\phi) \tag{2-13}$$

式中,A_1、A_2(或 A、ϕ)是待定常数,取决于初始条件。如将初始条件,即式(2-7),分别代入式(2-12)和式(2-13),就可以得到

$$A_1=\frac{\dot{x}_0}{\omega},\quad A_2=x_0 \tag{2-14}$$

则

$$x(t)=\frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t+x_0\cos\omega t \tag{2-15}$$

从式(2-12)或式(2-15)可以看出,当不考虑阻尼作用时,x 的值总是随着时间的增加周而复始地改变。这种振动称为**简谐(或谐和)振动**(Harmonic Vibration)。A 称为振动的**振幅**(Amplitude),$\omega t+\phi$ 称为**相角**(Phase Angle),ϕ 称为初相角($t=0$ 时的相角)。容易证明

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=\sqrt{\frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}+x_0^2},\quad \tan\phi=\frac{A_2}{A_1}=\frac{x_0\omega}{\dot{x}_0} \tag{2-16}$$

只要知道了 A_1、A_2,就容易求出 A 与 ϕ,反之亦然。式(2-15)表示的无阻尼自由振动如图 2-4 所示。

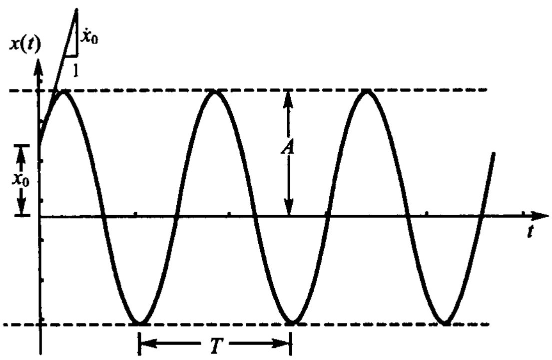


图 2-4 无阻尼自由振动曲线

简谐振动属于周期性振动。从式(2-12)不难看出,ω 是周期振动的**角频率**(Angular Frequency)或**圆频率**(Circular Frequency),称为单自由度系统的**无阻尼自振(或固有)频率**(Undamped Natural Frequency of Vibration)。单位为弧度/秒(rad/s)或 1/秒(1/s)。由式(2-10)知

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2-17}$$

工程上常用每秒内系统振动的次数来表示自振频率,也称**自振(或固有)频率**(Natural Frequency)，即

$$f=\frac{\omega}{2\pi} \tag{2-18}$$

其单位为周/秒(或赫兹、Hz)。区别于 f，ω 通常称为**自振(或固有)圆(或角)频率**(Natural Circular/Angular Frequency)。系统振动一次所需时间

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{f} \tag{2-19}$$

称为**自振(或固有)周期**(Natural Period of Vibration)，单位为秒(s)。

从上面的讨论可知，振幅 A 与初相角 ϕ 是由初始条件确定的；但自振频率 f(或 ω)和自振周期 T 则与初始条件无关，而仅取决于系统本身的刚度和质量。

由式(2-17)可知：当振动系统的质量 m 增加时，将引起自振频率的下降，而当刚度 k 增加时，将引起自振频率的增加。一切弹性振动系统都是这样。因此，在处理实际工程问题时，如果想提高某结构的自振频率，可以从两方面设法：或者提高结构的刚度(如增加约束，采用刚度大的构件等)；或者减小结构的重量(如改用轻质材料等)。

【例 2-1】 在图 2-1(a)中，假定质量块的质量 $m=1$ kg，如果用 $F=49$ N 的力沿 x 轴正向作用于物体上，弹簧获得静伸长 $\Delta=1$ cm。当 $t=0$ 时，将拉力卸掉。试计算 $t>0$ 时质量块的运动规律。

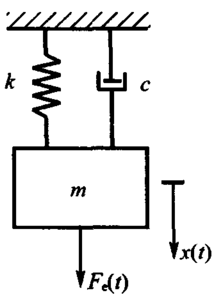
解 $t>0$ 时质量块的运动规律是无阻尼自由振动。不难判断质量块的初始位移为 $x_0=\Delta=1\text{ cm}=0.01\text{ m}$，初始速度为 $\dot{x}_0=0$。由式(2-17)得到

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{F}{m\Delta}}=\sqrt{\frac{49}{0.01}}=70\ \text{s}^{-1} \tag{①}$$

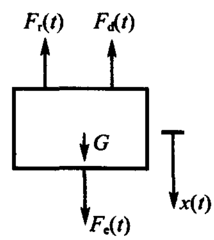
从而，由式(2-15)可知质量块的运动规律为

$$x=x_0\cos\omega t=0.01\cos 70t\quad(\text{m}) \tag{②}$$

考虑如图 2-5(a)所示悬挂质量系统(不考虑弹簧的质量)，它可看做是如图 2-1(a)所示系统旋转了 90°。假定质量块在重力 G 作用下的静伸长为 x_{st}。如果质量块偏离静平衡位置的位移为 x，此时作用在质量块上的力如图 2-5(b)所示。仿照方程(2-3)的推导，系统的动力平衡方程可以写做



(a)悬挂的质量块



(b)受力分析

图 2-5　悬挂的质量块的振动

$$m\ddot{\tilde{x}}(t)+c\dot{\tilde{x}}(t)+k\tilde{x}(t)=F_e(t)+G \tag{2-20}$$

其中

$$\tilde{x}(t)=x(t)+x_{st} \tag{2-21}$$

为质量块的绝对位移。注意到

$$G=kx_{st} \tag{2-22}$$

将式(2-22)和式(2-21)代入方程(2-20)，同时注意到 x_{st} 是不随时间变化的，则方程(2-20)可化为

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=F_e(t) \tag{2-23}$$

这说明相对于振动系统静平衡位置写出的运动方程不受重力影响。因此，在本书以后的讨论中，动力响应一般以静平衡位置作为基准。求总的位移、内力响应时，只要把动力分析的结果与相应的静力结果相加即可。

对于如图 2-5(a)所示的悬挂质量系统，可以推得其自振频率的另一种表达方式。由式(2-17)可知

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{kg}{G}}=\sqrt{\frac{kg}{kx_{st}}}=\sqrt{\frac{g}{x_{st}}} \tag{2-24}$$

虽然我们并不知道重物的质量 m 是多少，也不知道弹簧的刚度 k 是多少，但很容易根据式(2-24)由其静伸长求出系统的自振频率。

【例 2-2】 考虑如图 2-6 所示弹簧摆，摆锤为一质量为 m 的小球，摆杆长为 l，其质量可以忽略不计，在距铰链 O 为 a 的摆杆两侧各安置一刚性系数为 k 的弹簧。试建立系统的自由振动方程，并求系统的固有频率。

解 首先分析摆在振动时的受力情况。当摆偏离一个小角度 φ 时，两侧的弹簧力 $F_r=-2ka\sin\varphi$；重力在切线方向上的分力 $P_t=-mg\sin\varphi$；当 φ 很小时，$\sin\varphi\approx\varphi$，则 $F_r=-2ka\varphi$，$P_t=-mg\varphi$。利用刚体转动微分方程可建立系统的振动方程

$$ml^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-2ka^2\varphi-mgl\varphi \qquad ①$$

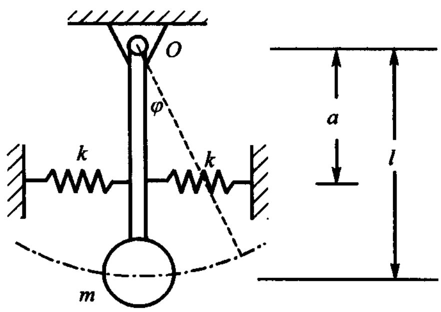


图 2-6 弹簧摆的振动

整理得

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\left(\frac{2ka^2}{ml^2}+\frac{g}{l}\right)\varphi=0 \qquad ②$$

从中得到系统的固有频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{2ka^2}{ml^2}+\frac{g}{l}} \qquad ③$$

【例 2-3】 如图 2-7(a)所示一简支梁，长度为 L，抗弯刚度为 EJ，在梁的中部有一质量为 m 的质量块。假设梁的质量非常小，与质量块的质量相比可忽略不计。试求此梁的固有频率。

解 当梁的自重忽略不计时，这个振动系统可等效为一个单自由度弹簧-质量系统，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com