高等院校教材

电路理论
学习与考研指导

马世豪 徐国洪 张 波 编著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书是教育部“十一五”国家级规划教材《电路原理》（马世豪，科学出版社）的配套用书。每章内容由四部分组成，即内容要点、目标要求、重点难点内容和习题详解。本书特点是，每章知识目标要求明确，重点突出，难点分明，叙述流畅，深入浅出，习题解答过程图文并茂，详尽易懂，有助于理解电路理论的基本概念、基本原理和基本方法，并能拓展思路，培养和提高学生分析、解决电路理论问题的能力及解题技巧。

书后附录为全国部分重点大学电路理论考研试题精选及详解，指导性强，覆盖面广。

本书适合于所有学习“电路理论”课程的本专科学生使用，对从事电路理论课程教学的教师以及准备报考研究生的读者亦具有参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

电路理论学习与考研指导/马世豪，徐国洪，张波编著．—北京：科学出版社，2007

ISBN 978-7-03-019920-1

Ⅰ．电…　Ⅱ．①马…　②徐…　③张…　Ⅲ．电路理论-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ．TM13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 138573 号

责任编辑：马长芳　潘继敏／责任校对：钟　洋

责任印制：张克忠／封面设计：陈　敬

科 学 出 版 社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2007 年 9 月第 一 版　开本：B5（720×1000）

2007 年 9 月第一次印刷　印张：24 1/4

印数：1—3 500　字数：482 000

定价：29.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

前　言

电路理论是电类专业一门非常重要的技术基础课。由于其自身毋庸置疑的基础性和重要性，学习电路理论已成为广大初学者的迫切愿望和要求。为了帮助初学者克服电路理论学习上的困难，掌握好电路理论的基本概念、基本原理和基本方法，我们特编写了《电路理论学习与考研指导》一书，以期成为初学者身边的“辅导教师”。

从知识内容体系上讲，本书是作者编著的高等教育“十一五”国家级规划教材《电路原理》（马世豪，科学出版社）的配套用书，全书内容次序及每章详解的习题与《电路原理》一书相一致。每章内容知识结构由四部分组成，即内容要点、目标要求、重点难点内容和习题详解。

本书特点是每章知识目标要求明确，重点突出，难点分明，叙述流畅，深入浅出，习题解答过程图文并茂，详尽易懂。有助于读者理解电路理论的基本概论、基本原理和基本方法，并能拓展思路，培养和提高学生分析、解决电路理论问题的能力及解题技巧。

书后附录为全国部分重点大学电路理论考研试题精选及详解，指导性强，覆盖面广。

本书适合于所有学习“电路理论”课程的本专科学生使用，对从事电路理论课程教学的教师以及准备报考研究生的读者亦具有一定的参考价值。

本书在编写过程中参考了许多近年来国内外出版的电路理论教材及相关的教学参考书，笔者对这些书的作者表示诚挚的谢意与敬意！

书中的疏漏与不当之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2007 年 1 月

于武昌桂子山

目　　录

第一章　静电场的基本规律

一、内容要点

1. 电场强度 $\boldsymbol{E}$

定义式
$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q_0}$$

2. 电势 U

定义式
$$U_p=\int_p^c \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \quad （c \text{ 为零电势参考点}）$$

3. 高斯定理

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} \quad （真空）$$

注意：$\sum q_i$ 为高斯面 S 包围的所有电荷的代数和。

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum q_0 \quad （介质）$$

注意：$\sum q_0$ 为高斯面 S 包围的自由电荷的代数和，$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}$。

4. 静电场的环流定理

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

5. 电场强度与电势梯度的关系

$$\boldsymbol{E}=-\nabla U=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

6. 导体的静电平衡条件

$\boldsymbol{E}_{内}=0$：导体是等势体，导体表面是等势面。

7. 电容器电容

定义式 $$C=\frac{q}{U_A-U_B}$$

串联电容 $$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}$$

并联电容 $$C=C_1+C_2+\cdots+C_n$$

8. 电极化强度 $\boldsymbol{P}$

定义式 $$\boldsymbol{P}=\frac{\sum \boldsymbol{P}_i}{\Delta V}$$ （$\boldsymbol{P}_i$ 为分子电矩）

在各向同性电介质中

$$\boldsymbol{P}=\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}$$

9. 静电场的能量

(1) 能量密度

$$\omega_e=\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{D^2}{2\varepsilon}$$

(2) 电场中的总能量(电场分布在体积为 V 的空间内)

$$W_e=\int_V\omega_e\mathrm{d}V=\int_V\frac{1}{2}\varepsilon E^2\mathrm{d}V$$

二、目标要求

(1) 理解描述静电场的两个物理量 $\boldsymbol{E}$ 和 U 的物理意义以及它们之间的相互关系；掌握场的叠加原理，从已知电荷的分布计算电场强度与电势的几种主要方法。

(2) 理解描述静电场性质的两个基本定理（高斯定理和环流定理）；熟练掌握用高斯定理计算场强的条件和方法。

(3) 理解静电场力做功的特点及电势能的概念，并能作一般的计算。

(4) 掌握导体的静电平衡条件及导体静电平衡时的性质。

(5) 掌握电容的概念以及计算电容的方法。

(6) 理解电能密度的概念，能计算电场中储存的电场能。

(7) 了解电介质的极化机理和 $\boldsymbol{P}$、σ'、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$ 之间的关系。

(8) 掌握有介质时的高斯定理并能计算具有对称性电场的场强 $\boldsymbol{E}$。

三、重点难点内容

1. 重点内容

(1) 电场强度和电势的概念以及它们的物理意义；电势和场强的积分关系；计算场强和电势的基本方法。

(2) 导体的静电平衡条件；导体静电平衡时的性质及其电荷分布；求解导体问题时的基本思路和方法；电容的概念以及计算典型形状电容器的电容；电能密度及电场能量的计算。

2. 难点内容

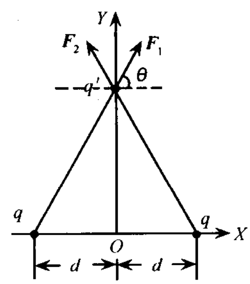
(1) 对电势能和电势概念的理解；对高斯定理意义的深刻理解以及应用高斯定理计算具有某种对称性分布的电场强度的方法。

(2) 有介质存在时的高斯定理的理解及应用；分析求解静电平衡时导体上的电荷分布。

四、习题详解

1-1 两个电量都是$+q$的点电荷，相距为$2d$，连线中点为O，今在它们连线的垂直平分线上放置另一个点电荷q'，q'与O相距为r。(1) 求q'所受的力；(2) q'放在哪一点时，所受的力最大？

解 (1) 取正交坐标系XOY，原点取在连线的中点O处，如解1-1a图所示，设q'所受两个点电荷q的作用力分别为



解 1-1a 图

$$\boldsymbol{F}_1=\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\ (d^2+y^2)}\ (\boldsymbol{i}\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta)$$

$$\boldsymbol{F}_2=\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\ (d^2+y^2)}\ (-\boldsymbol{i}\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta)$$

$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$分别为沿X轴、Y轴的单位矢量。由对称性可知q'所受的合力为沿Y轴方向。

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\left[\frac{qq'\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0\ (d^2+y^2)}+\frac{qq'\sin\theta}{2\pi\varepsilon_0\ (d^2+y^2)}\right]\boldsymbol{j}=\frac{qq'\sin\theta}{2\pi\varepsilon_0\ (d^2+y^2)}\boldsymbol{j}$$

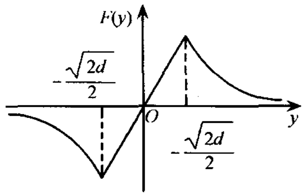
当q、q'同号时，$\boldsymbol{F}$沿y轴的正向；当q、q'异号时，$\boldsymbol{F}$沿y轴的负方向。

(2) $\boldsymbol{F}$的最大值应满足$\boldsymbol{F}$对y的一阶导数为零，即

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}=\frac{qq'}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(d^2+y^2)\ -3y^2}{(d^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}=0$$

可得

$$d^2+r^2-3r^2=0$$



解 1-1b 图

所以当 $r=\pm\frac{d}{\sqrt{2}}$时，q'所受的力在数值上为最大。此时 q'所受作用力为

$$F=\frac{qq'y}{2\pi\varepsilon_0\ (d^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

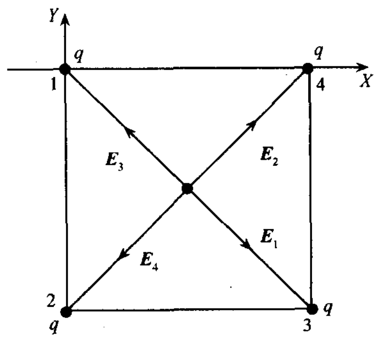
F（y）随 y 变化如解 1-1b 图所示。

1-2　在正方形的顶点上各放一电量相等的同性点电荷 q。

（1）证明在正方形中心的任意电量的点电荷所受的力为零；

（2）若在中心放一点电荷 Q，使顶点上每个电荷受到的合力恰为零，求 Q 和 q 的关系。

证明　（1）设正方形的边长为 a，且该正方形四个顶点上的电荷 q 均为正的，如解 1-2a 图所示，则中心的场强为四个电荷对中心的合场强，即



解 1-2a 图

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{E}_4$$

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\cdot\frac{a^2}{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\cdot\frac{a^2}{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{E}_3=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\cdot\frac{a^2}{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{E}_4=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\cdot\frac{a^2}{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})$$

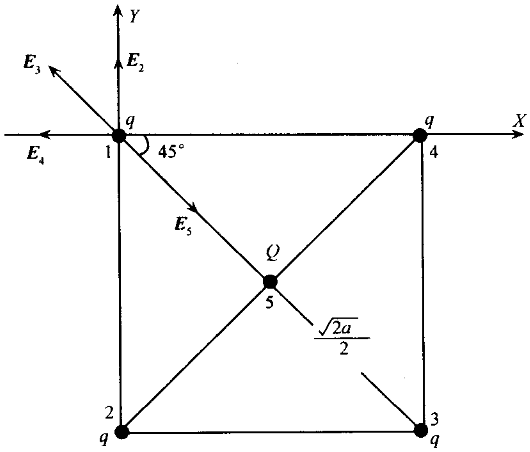
所以
$$\boldsymbol{E}=0$$

假设中心放置电量为 q'的点电荷，则所受的力 $\boldsymbol{F}=q'\boldsymbol{E}=0$。

（2）如解 1-2b 图所示，为使每个顶点上的电荷都达到平衡，每个电荷所受的合力都必须为零，则正方形的中心必须放置一个与 q 异号的电荷 $Q<0$。

考虑到对称性，我们只讨论顶点 1 的情况（其他三个顶点的情况相同）。

顶点 1 上电荷 q 达到平衡时，由叠加原理得



解 1-2b 图

$$\sum_{i=2}^{5}\boldsymbol{F}_i = q\boldsymbol{E} = q\sum_{i=2}^{5}\boldsymbol{E}_i = 0$$

即顶点 1 的合场强

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{E}_4+\boldsymbol{E}_5=0 \tag{1}$$

式（1）中 $\boldsymbol{E}_2$，$\boldsymbol{E}_3$，$\boldsymbol{E}_4$，$\boldsymbol{E}_5$ 分别为点电荷 2，3，4，5 在顶点 1 所产生的场强。把式（1）向 X、Y 轴分别投影，并代入点电荷场强公式

$$E_2=E_4=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

$$E_3=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}a)^2}$$

$$E_5=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}$$

得

$$-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}a)^2}\cos45°-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}+\frac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}\cos45°=0 \tag{2}$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}a)^2}\sin45°-\frac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}\sin45°=0 \tag{3}$$

解式（2），（3），可得

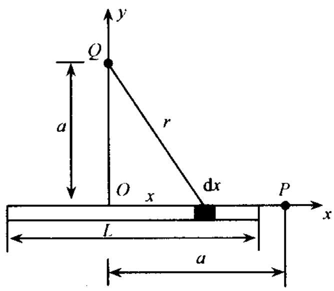
$$Q=-\frac{2\sqrt{2}+1}{4}q$$

1-3 若电量均匀地分布在长为 L 的细棒上，求证：

（1）在棒的延长线上，离棒中心为 a 处 P 点的场强为 $E=\frac{1}{\pi\varepsilon_0}\frac{q}{4a^2-L^2}$；

（2）在棒的垂直平分线上，离棒为 a 处 Q 点的场强为 $E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a\sqrt{L^2+4a^2}}$。

若棒为无限长时（即 $L\to\infty$），将结果与无限长带电直线的场强相比较。



解 1-3 图

证明 （1）以细棒的中点 O 为原点，坐标轴 Ox，Oy 如解 1-3 图所示。在带电细棒上任取一长为 $\mathrm{d}x$ 的线元，其电量 $\mathrm{d}q=\frac{q}{L}\mathrm{d}x$，它在 Ox 轴上离原点为 a 的点 P 处的场强大小为

$$\mathrm{d}E_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\frac{q}{L}\mathrm{d}x}{(a-x)^2}$$

由于细棒上所有电荷元在点 P 的场强方向均相同，所以带电细棒在 P 处总的场强大小为

$$\begin{aligned}E_P&=\int_L\mathrm{d}E_P=\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q\mathrm{d}x}{L(a-x)^2}\\&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{a-\frac{L}{2}}-\frac{1}{a+\frac{L}{2}}\right)\\&=\frac{1}{\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{4a^2-L^2}\end{aligned}$$

（2）图中电荷元在 y 轴上距原点为 a 的点 Q 处的场强为 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_Q$，它在坐标轴上的分量分别为 $\mathrm{d}E_x$ 和 $\mathrm{d}E_y$，由于电荷对 y 轴的对称性，细棒上所有电荷在 Q 点的场强的 x 轴分量之和为零。因而 Q 处的总场强 $\boldsymbol{E}_Q$ 应沿 y 轴方向，其大小为

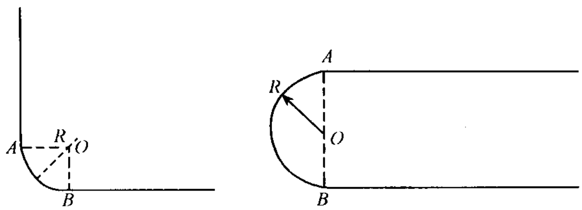
$$\begin{aligned}E_Q&=\int_L\mathrm{d}E_y=\int\mathrm{d}E_Q\sin\theta\\&=\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\frac{q}{L}\mathrm{d}x}{x^2+a^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}\\&=\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}\frac{aq}{4\pi\varepsilon_0 L}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}\cdot\frac{1}{\sqrt{L^2+4a^2}}\end{aligned}$$

当棒长 $L\to\infty$时，若棒上单位长度上的电荷恒定为 λ，则 Q 处的场强大小为

$$E_Q=\frac{\lambda L}{2\pi\varepsilon_0 a}\cdot\frac{1}{\sqrt{L^2+4a^2}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

此结果与无限长直导线在 Q 处的场强是相同的。

1-4　线电荷密度为 λ 的无限长均匀带电线，分别变成习题 1-4 图中（a）、（b）两种形状，若圆弧半径为 R，试求：习题 1-4 图（a）、（b）中 O 点的场强。



(a)　　(b)

习题 1-4 图

解　习题 1-4 图（a）用电场强度叠加原理求解。

将导线划分为 1，2，3 三部分，分别算出这三部分在 O 点产生的场强，整个导线在 O 点产生的场强就是这三部分的和。

以 O 点为原点建立直角坐标系，如解 1-4 a_1 图所示，1 部分在 O 点产生的场强

$$\mathrm{d}E_{1x}=\frac{\lambda\mathrm{d}y}{4\pi\varepsilon_0(y^2+R^2)}\cdot\frac{R}{\sqrt{y^2+R^2}}$$

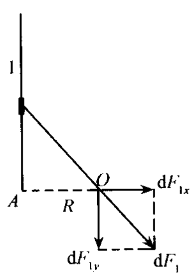
$$\mathrm{d}E_{1y}=\frac{\lambda\mathrm{d}y}{4\pi\varepsilon_0(y^2+R^2)}\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+R^2}}$$

$$E_{1x}=\int_0^\infty\mathrm{d}E_{1x}=\int_0^\infty\frac{R\lambda\mathrm{d}y}{4\pi\varepsilon_0(y^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\lambda}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 R}}$$

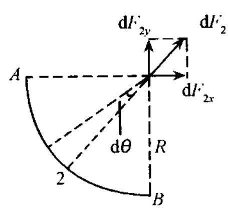
$$E_{1y}=\int_0^\infty\mathrm{d}E_{1y}=-\int_0^\infty\frac{y\lambda\mathrm{d}y}{4\pi\varepsilon_0(y^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\lambda}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 R}}$$

如解 1-4 a_2 图所示，2 部分在 O 点产生的场强

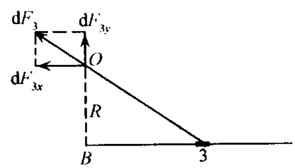
$$\mathrm{d}E_{2x}=\frac{\lambda R\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot\sin\theta$$



解 1-4 a_1 图



解 1-4 a_2 图



解 1-4 a_3 图

$$dE_{2y} = \frac{\lambda R\,d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot\cos\theta$$

$$E_{2x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dE_{2x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda R\,d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot\sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$E_{2y} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dE_{2y} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda R\,d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

如解 1-4 a_3 图所示，3 部分在 O 点产生的场强

$$dE_{3x} = -\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$dE_{3y} = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)}\cdot\frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$E_{3x} = \int_0^{\infty} dE_{3x} = -\int_0^{\infty}\frac{\lambda x\,dx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

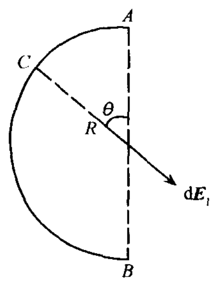
$$E_{3y} = \int_0^{\infty} dE_{3y} = \int_0^{\infty}\frac{\lambda R\,dx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

O 点的场强为 1，2，3 三部分场强的叠加

$$E_x = E_{1x}+E_{2x}+E_{3x} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$E_y = E_{1y}+E_{2y}+E_{3y} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

所以 $E=\frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$，方向与两条直线间夹角均为 45°。



解 1-4 b_1 图

习题 1-4 图（b）用电场强度叠加原理求解。

先求半圆上的电荷在圆心 O 产生的电场强度 $\boldsymbol{E}_1$，设圆的半径为 R，半径长度的电荷密度为 λ，则如解 1-4 b_1 图所示，圆上 C 处的电荷量 $dq=\lambda R d\theta$ 在 O 点产生的电场强度 dE_1，其大小为

$$dE_1 = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{1}$$

$d\boldsymbol{E}_1$ 平行于两直线的分量为

$$(dE_1)\ \sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta d\theta \tag{2}$$

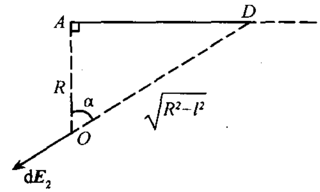
根据对称性，半圆上的电荷在 O 点产生的电场强度 $\boldsymbol{E}_1$ 应平行于两直线。因此，$\boldsymbol{E}_1$ 的大小应为

$$E_1 = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(dE_1)\sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \tag{3}$$

再求两条半无穷长直线电荷在 O 点产生的电场强度 $\boldsymbol{E}_2$，如解 1-4 b_2 图，一

条半无穷长直线上 D 处的电荷量 $dq=\lambda dl$ 在 O 点产生的电场强度 $d\boldsymbol{E}_2$ 的大小为

$$dE_2=\frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+l^2)} \qquad (4)$$



解 1-4 b_2 图

$d\boldsymbol{E}_2$ 平行于直线的分量为

$$(dE_2)\sin\alpha=\frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+l^2)}\cdot\frac{l}{\sqrt{R^2+l^2}}$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{ldl}{(R^2+l^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (5)$$

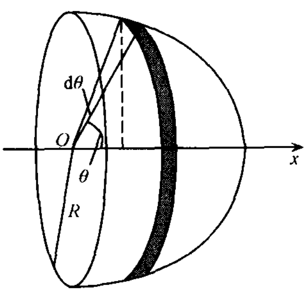
根据对称性，这两条半无穷长带电直线在 O 点产生的 $\boldsymbol{E}_2$ 应平行于两直线，于是由式（5）得 $\boldsymbol{E}_2$ 的大小应为

$$E_2=2\cdot\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty\frac{ldl}{(R^2+l^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{R^2+l^2}}\right)\Bigg|_0^\infty=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \qquad (6)$$

因为两直线上的电荷与半圆上的电荷是同一种电荷，故由对称性可知，E_2 必定与 E_1 方向相反，于是由式（3）、（6）得

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2=0$$

1-5　一半径为 R 的半球面，均匀带有电荷，电荷面密度为 σ，求球心处的电场强度的大小。



解 1-5 图

解　如解 1-5 图所示，将半球面分割成一个个平行的环状面元，任一环状面元的面积 $dS=2\pi R\sin\theta\cdot Rd\theta$，所带电量 $dq=\sigma dS=\sigma 2\pi R^2\sin\theta d\theta$，它在球心 O 处的场强大小为

$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dq}{R^2}\cos\theta$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\sigma 2\pi R^2\sin\theta d\theta}{R^2}\cos\theta$$

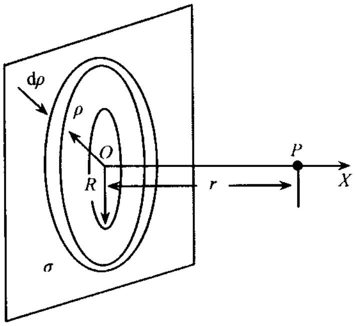
$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\theta\cos\theta d\theta$$

其方向沿半球面的对称轴线。所以，半球面上电荷的总场强为各环状面元电荷所形成的场强之和，其大小为

$$E=\int dE=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

1-6　一无限大平面，开有一半径为 R 的圆洞，设平面均匀带电，电荷面密度为 σ。求洞的轴线上离洞心为 r 处的场强。

解　无限大带电平板的面电荷密度为 σ，如解 1-6 图所示，取轴线方向为 OX，在离圆洞中心距离为 ρ（$\rho>R$）处取一半径为 $\rho\to\rho+d\rho$ 的窄圆环，它所带



解 1-6 图

电量为 $dq=\sigma\cdot 2\pi\rho\cdot d\rho$，该带电圆环在离洞心 O 为 r 的轴线上的 P 点产生的电场强度为

$$dE_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r dq}{(\rho^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

方向沿 X 轴正向。

开有空洞的无限大带电板可以看作无数带电圆环的叠加，在 P 点产生的电场强度方向都相同，故 P 点场强

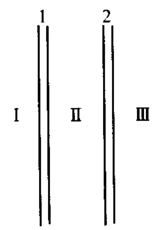
$$E_P=\int dE_P=\int_R^{\infty}\frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r\rho d\rho}{(r^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\sigma r}{2\varepsilon_0(R^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}$$

方向沿 X 轴正向。

1-7　两无限大的平行平面均匀带电，面电荷密度都是 σ，求各处的场强分布。

解　如解 1-7 图所示，两无限大平行平面将空间分成Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ三个部分，令向右为正方向，由于任一无限大带电平面在空间中一点的场强大小为 $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$，方向为垂直并背离平面，则在空间Ⅰ区域



解 1-7 图

$$E=E_1+E_2=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

在空间Ⅱ区域

$$E=E_1+E_2=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=0$$

在空间Ⅲ区域

$$E=E_1+E_2=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

1-8　大小两个同心球面，小球半径为 R_1，均匀带电 q_1，大球半径为 R_2，均匀带电 q_2。求空间电场强度的分布。问电场强度是否是坐标 r（即离球心的距离）的连续函数？

解　以任意半径 r 作一与题述两球面同心的高斯球面 S，由高斯定理可得

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

本题中电场具有对称性，有

$$4\pi r^2 E = \frac{\sum\limits_i q_i}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sum\limits_i q_i}{r^2}$$

当 $r<R_1$ 时，

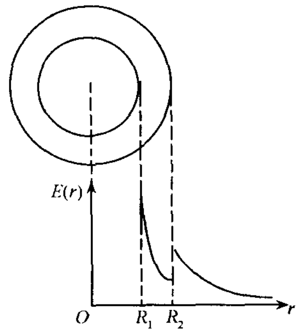
$$\sum_i q_i = 0, \quad E(r) = 0$$

当 $R_1 \leqslant r < R_2$ 时，

$$\sum_i q_i = q_1, \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r^2}$$

当 $r \geqslant R_2$ 时，

$$\sum_i q_i = q_1 + q_2, \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1+q_2}{r^2}$$



解 1-8 图

E（r）函数在带电面处不连续（如解 1-8 图所示）。

1-9　一半径为 R 的带电球，其电荷体密度为 $\rho=\rho_0$（$1-\frac{r}{R}$），ρ_0 为一常量，r 为空间某点至球心的距离，试求：(1) 球内、外的场强分布；(2) r 为多大时，场强最大，该点场强 E_{max} 的大小。

解　(1) 以任意半径 r 作一与题述球体同心的球面 S，由高斯定理得

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\sum\limits_i q_i}{\varepsilon_0}$$

本题中电场具有对称性，所以有

$$4\pi r^2 E = \frac{\sum\limits_i q_i}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sum\limits_i q_i}{r^2}$$

当 $r \leqslant R$ 时，

$$\sum_i q_i = \int_0^r 4\pi r^2 \rho \cdot \mathrm{d}r = \frac{4\pi\rho_0 r}{3}\left(1-\frac{3r}{4R}\right)$$

所以
$$E_{内} = \frac{r\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(1-\frac{3r}{4R}\right)$$

当 $r>R$ 时，

$$\sum_i q_i = \int_0^R 4\pi r^2 \rho \cdot \mathrm{d}r = \frac{\pi R^3 \rho_0}{3}$$

所以
$$E_{外} = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}$$

(2) E 的最大值应满足 E 对 r 的一阶导数为零

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(1-\frac{3}{2R}r\right)=0$$

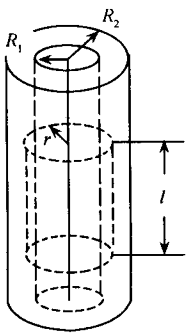
解得

$$r=\frac{2R}{3}，\text{此时 } E=\frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$$

所以当 $r=\frac{2R}{3}$时，E 有最大值。

1-10 两个无限长同轴圆柱面，半径分别为 R_1 和 R_2（$R_2>R_1$），分别带有等值异号电荷，每单位长度的电量为 λ（即电荷线密度）。试分别求出离轴线为 (1)$r<R_1$，(2) $R_1<r<R_2$，(3) $r>R_2$，各处的电场强度。

解 无限长均匀带电圆柱面，电荷线密度为 λ，产生的电场具有对称性，方向垂直圆柱面向外，并且属于同一根轴的圆柱面上各点的场强的大小相同，如解 1-10 图所示，以任意半径作一与两个无限长圆柱面同轴的圆柱面以及两个垂直轴线的平面形成的封闭面为高斯面，则由高斯定理可得



解 1-10 图

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 2\pi rlE = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\sum_i q_i}{rl}$$

在 $r<R_1$ 时，

$$\sum_i q_i = 0, \quad E=0$$

在 $R_1\leqslant r<R_2$ 时，

$$\sum_i q_i=\lambda l, \quad E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda}{r}$$

在 $r\geqslant R_2$ 时，

$$\sum_i q_i=\lambda l - l\lambda = 0, \quad E=0$$

1-11 一半径为 R 的无限长带电圆柱体，电荷是均匀分布的，圆柱体单位长度的电荷为 λ。用高斯定理求圆柱体内距轴线距离为 r 处的场强。

解 由于圆柱体内电荷是均匀分布的，所以其场强为轴对称的，作长度为 l，半径为 r（$r<R$）的同轴圆柱面，以此作为高斯面。在此闭合面内的电量 $\sum q_i=\frac{\pi r^2}{\pi R^2}l\lambda$，由高斯定理得

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{r^2}{\varepsilon_0 R^2}l\lambda$$

即

$$2\pi rlE_r=\frac{r^2}{r_0 R^2}l\lambda$$

所以

$$E_r=\frac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$$

1-12　一半径为 R 的均匀带电长棒，电荷体密度为 ρ。求棒的轴线上一点与棒表面之间的电势差。

解　在长棒内部取高度为 l，半径为 r，且与棒同轴的圆柱面作为高斯面。根据高斯定理可求得棒中任意点的场强，有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\pi r^2 l\rho}{\varepsilon_0}$$

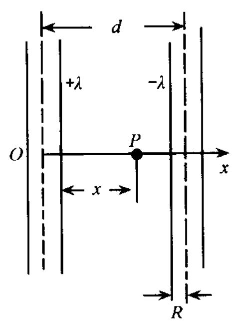
$$E_r\cdot 2\pi r l=\frac{\pi r^2 l\rho}{\varepsilon_0}$$

$$E_r=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

根据电势差的定义，取圆柱的经线为积分路径，则棒轴线上一点与棒表面之间的电势差为

$$U=\int_0^R \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^R E(r)\mathrm{d}r=\int_0^R \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}r=\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}$$

1-13　有两根半径为 R，相距为 d 的无限长平行直导线（$d\gg R$），带有等量而异号的电荷，单位长度上的电量为 λ。求这两根导线的电势差（每一导线为一等势体）。（提示：先计算两导线连线上任一点的场强。）



解 1-13 图

解　在两导线所在平面上作如解 1-13 图所示的坐标。原点 O 位于一导线轴线上，Ox 轴垂直于两导线。在两导线间任一点 P 的场强可看作两长直圆柱体外一点电场的叠加，故有

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_+ +\boldsymbol{E}_- =\left[\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\ (d-x)}\right]\boldsymbol{i}$$

于是，两导线间的电势差为

$$U_{AB}=\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_R^{d-R}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}[\ln x-\ln(d-x)]_R^{d-R}$$

$$=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-R}{R}\right)$$

1-14　参看题 1-3，求该题中 P 点和 Q 点的电势，能否从电势的表达式，由电势梯度算出 P 点和 Q 点的场强？