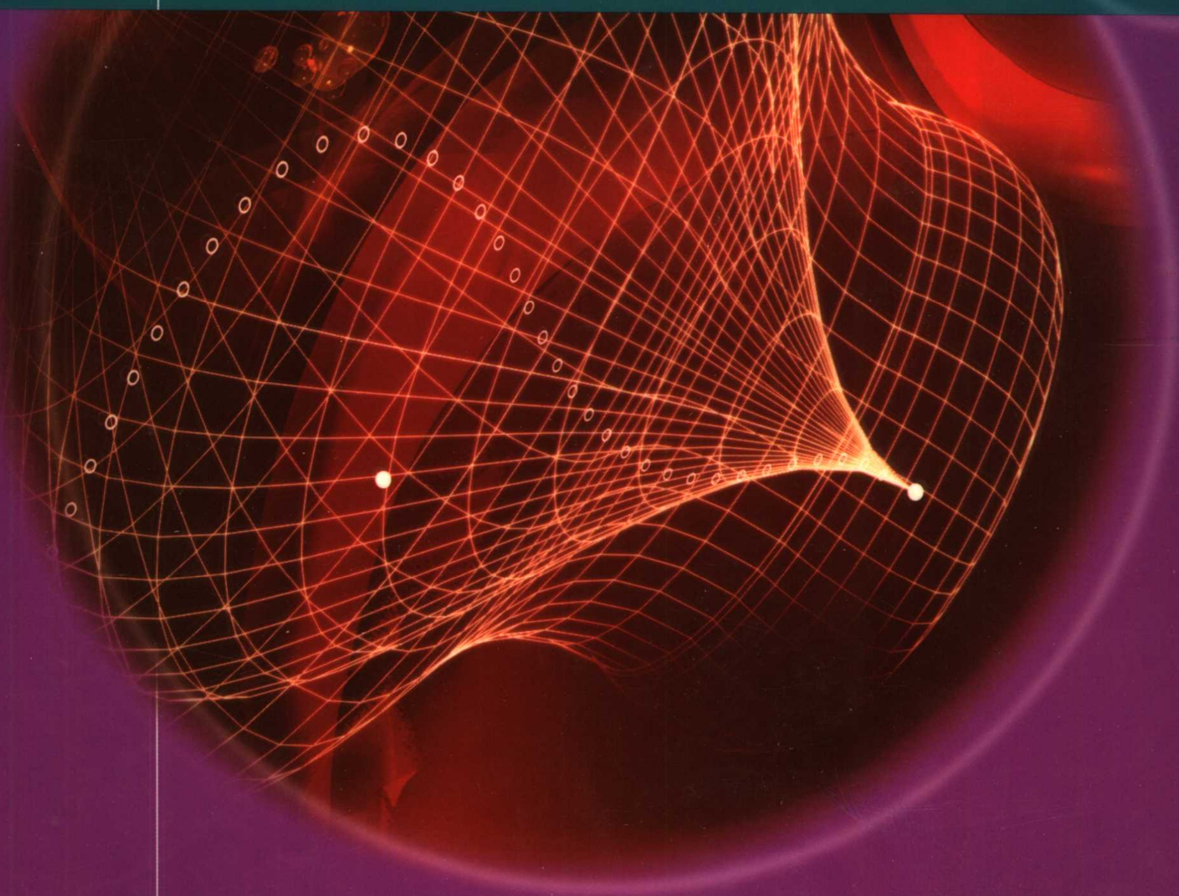
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
高等学校理工科数学类规划教材

工科微积分

CALCULUS

（上册）

大连理工大学应用数学系 组编



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材
高等学校理工科数学类规划教材

工科微积分

CALCULUS （上册）

大连理工大学应用数学系　组编
主审　施光燕
主编　曹铁川
编者　（以编写章节先后排序）
曹铁川　张海文　蒋志刚
金光日　李　林　孙丽华

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

工科微积分. 上/大连理工大学应用数学系组编．—大连:大连理工大学出版社，2007.2
ISBN 978-5611-2685-1

Ⅰ. 工… Ⅱ. 大… Ⅲ. 微积分—高等学校—教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 024285 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
电话:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:17.5 字数:387 千字
2004 年 9 月第 1 版 2007 年 2 月第 2 版
2007 年 2 月第 3 次印刷

责任编辑:梁 锋 范业婷 责任校对:婕 琳
封面设计:宋 蕾

ISBN 978-5611-2685-1 定 价:25.00 元

高等学校理工科数学类规划教材

编审委员会

前 言

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学，它伴随着人类文明同生共存，不断创新.我国数学大师华罗庚对其作过精彩的描述："宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，数学无处不在……".

随着现代科学技术的迅猛发展，当今世界正从工业时代步入信息时代，过去严格的学科界限已经不复存在.各种学科交叉融合，相互促进，从科学理论的发展到技术的发明，再转化为生产力的速度越来越快.在这种大趋势下，数学的应用范围急剧扩展，大量新的数学方法正有效地应用于各个领域.高科技的特点，诸如高速度，高精度，高自动化，高安全性，高质量，高效率等，大多是通过数学模型和数学方法，并借助电子计算机控制加以实现，它们是数学的物化或外在表现，在一定意义上可以说，高科技的本质是数学技术，即数学已不再是传统意义上的思维的体操或科学的语言，而是作为一种技术直接活跃在科学技术舞台上，给人们带来智慧、创造力、信息和财富.

17世纪，牛顿和莱布尼兹总结了众多数学先驱的研究成果，集大成创立了微积分.可以说，微积分是继欧几里得几何以后全部数学中最伟大的创造.直至今日，作为数学科学的重要支柱，微积分仍保持着强大的生命力.

数学是工科大学生的主要基础理论课，如何对当代大学生进行数学教育，是值得我们深入思考的问题.在大学数学中，微积分占有主体地位.通过该课程的学习，可获得一元函数微积分及其应用、多元函数微积分及其应用、向量代数与空间解析几何、无穷级数与微分方程等方面的基本概念、基本理论、基本方法和基本技能，为学习后继课程奠定必要的基础.通过微积分的学习，还能够培养理性思维能力、综合应用能力、科学计算能力以及创新能力.

不仅如此，当代大学生还应对数学有更为广义而深刻的认识：数学不仅是一种科学，而且是一种文化；数学不仅是一种知识，而且是一种素养；数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式.

能够将这种对数学的认识和理解作为一种理念融入到高等教育中去，并在相关教材中体现出来，是高等教育工作者义不容辞的责任和义务.

大连理工大学是教育部《工科数学教学内容和课程体系改革的研究与实践》项目的参与单位之一.为了很好地体现以上数学教育理念，并适应当前高等教育情况，使学生在课时减少的情况下能掌握好微积分的基本思想和方法，提高数学素养和能力，我们结合多年的教学经验，编写了这本《工科微积分》教材.我们的编写原则是：按照教育部课程指导委员会对工科大学微积分课程的要求，广泛汲取传统教材和其他改革教材的优点，结合教学实际，努力使其成为一部结构合理，难度适中，逻辑清晰，叙述详细，特色鲜明，便于学习的

教材.

本教材共分上、下两册,我们力图体现下面特点:

1. 遵循认识规律,揭示数学发现

对于概念、定理、公式,尽可能从直观背景出发,提出问题,分析问题,水到渠成地得出结论,然后再抽象论证.在阐述过程中,努力将微积分的基本思想融入其中,引导学生学会从量化的角度数学地思考问题,学会用微积分的观点、方法认识和处理问题.

2. 适当调整知识体系

本着宏观不动,微观调整的原则,对传统内容适当增减.在局部章节采用新讲法.例如,在极限部分,突出了函数极限的地位,削减了数列极限的篇幅,用整标函数的观点认识和定义数列,把数列极限作为函数极限的特例,并用海涅定理将二者统一起来,从而使函数极限的性质和运算很自然地移植到数列上来,避免了叙述上的雷同与重复;在一元函数积分学中,先讲定积分,着重讲解积分思想、微积分基本公式,而不定积分和积分法作为定积分的计算工具随后才引入;在多元函数积分学中,把重积分、对弧长的曲线积分、对面积的曲面积分,统一为数量值函数在几何形体上的积分;把对坐标的曲线积分、曲面积分统一为向量值函数在有向曲线(面)上的积分,并与向量场和物理背景有机地结合起来,这样处理可使学生在较高层次上理解积分的本质.考虑到某些专业基础课和物理课教学的需要,我们把微分方程一章放在了上册.

3. 加强应用意识的培养,突出微积分的强大应用功能

当代著名数学家、教育家、沃尔夫奖获得者 P・D. 拉克斯(Lax,Peter D)指出:"目前数学在非常广泛的领域里的研究蓬蓬勃勃,而且成就辉煌,但还没有充分发挥人们的数学才华以加深数学与其他科学的相互关系.这种不平衡对于数学以及对于它的使用者都是有害的.纠正这种不平衡是一种教育工作,这必须从大学一开始就做起,微积分是最适合从事这项工作的一门课程.""在微积分里,学生可以直接体会到数学是确切表达科学思想的语言,可以直接学到科学是深远影响着数学发展的数学思想的源泉.最后,很重要的一点在于数学可以提供许多重要科学问题的光辉答案."

我们非常赞赏这些观点.为了激发学生的学习热情,开阔眼界,活跃思想,培养学习兴趣和应用意识,在选材上,我们非常注意联系工科实际,除经典的力学、物理学实例外,还增加了化学、生态、经济、管理、生命科学、军事、气象、医学、农业及日常生活中的实例.同时还增设了一些简单的数学建模实例.

特别需要指出的是,在写作风格上,我们一改数学教材的古板面孔,在每一章的开头,都针对该章的教学内容,提出一些饶有趣味的具有真实背景,且不乏时代感的应用问题,并在每一章末设有应用实例一节.相信这些内容的设置,会更进一步激发学生学习微积分的欲望.

4. 加强综合应用数学知识能力的训练

各章节的例题和习题比较丰富,特别是适量选编了一些综合性的题目,这有利于学生提高分析问题和解决问题的能力.对某些运算技巧(例如积分技巧)作了淡化处理.因为此类技巧并未涉及基本的数学思想和方法,况且有些问题利用日臻完善的计算机软件即可轻易解决.

5. 融入微积分演进历史

教材中适量融入了微积分发展过程中的一些重要思想，结合相关章节介绍相关原理产生的背景，展示数学先驱们的重大贡献，使学生在学习的同时，从微积分的发展足迹中受到启迪.

另外，对于重要数学名词，本教材给出中英文对照，为学生阅读英文资料提供了方便.

本教材由大连理工大学应用数学系组织编写，曹铁川任主编并负责统稿. 具体执笔依次是：曹铁川、张海文、蒋志刚、金光日、李林、孙丽华、庞丽萍. 施光燕担任主审.

本教材配有《工科微积分同步辅导》教学参考书.

本教材 2006 年列入普通高等教育"十一五"国家级规划教材. 中国科学院院士钟万勰对教材的修改提出了宝贵意见，大连理工大学教学名师施光燕教授和应用数学系南基洙教授，以及部分兄弟院校的同行也提出了重要意见，在此一并表示感谢.

高等教育正面临着新的挑战和机遇，我们热切希望大家一起面对挑战，抓住机遇，积极投入高等教育改革的探索和实践中.

大家有任何意见或建议，请通过以下方式与我们联系：

邮箱 jcjf@dutp.cn

电话 0411-84707962;84708947

编著者

于大连理工大学

2007 年 2 月

目 录

第1章 函数、极限与连续

FUNCTION, LIMIT AND CONTINUITY

函数是微积分的研究对象. 函数的概念形成于17世纪，随着科学技术的不断发展，人们对函数的认识也在不断地深化与发展.

极限是微积分的基本运算，极限方法是研究函数的主要工具，微积分包括微分学与积分学两大部分，它们的重要概念大都是用极限方法定义的. 极限理论是整个微积分学的基础和“灵魂”.

连续性是函数的重要性质，它是大千世界广泛存在的渐变现象的客观反映和数学描述. 连续函数在理论研究和实际应用中都占有重要地位，本课程研究的函数主要是连续函数.

在本章中，我们先介绍函数的概念、函数的特性以及初等函数的概念.

极限是本章的重点，主要介绍函数极限概念，而把数列极限作为函数极限的特例来处理. 这部分内容包括：极限概念、极限的性质与运算、两个应用广泛的重要极限、无穷小与无穷大概念、无穷小的性质及其应用.

本章的后一部分介绍函数连续性概念，函数的间断点及其分类. 然后讨论连续函数的性质及初等函数的连续性. 最后从几何上介绍闭区间上连续函数的一些重要性质.

1.0 引 例

从宏观的宇宙空间，到微观的粒子世界，从司空见惯的日常生活，到飞速发展的高精技术，“量”无处不在.量的关系、量的变化、量的关系的变化、量的变化的关系，正是数学所研究的重要内容.

根据我国税法规定，个人工资、薪金所得应缴纳个人所得税，税率因收入不同而异.你能否清晰简明地列出个人收入与应纳税额之间的换算关系？

把一个四条腿等长的方桌放在不平的地面上，是否总能设法使它的四条腿同时着地，以达到桌子的稳定？

铅球掷远是一项体育比赛项目，投掷距离与运动员的出手速度、出手角度之间有着怎样的数量关系？在平日训练中，应重点考虑哪些因素，方能达到理想成绩？

你一定听说过斐波那契数列这个有趣的“兔子问题”吧，在蜜蜂的“家谱”、钢琴音阶的排列以及树木的分枝上都能找到类似的结果.“黄金分割”是一个数量的比例关系，是由中世纪著名画家达·芬奇提出的，据说按照“黄金分割”的比例关系，用在建筑上，能使建筑物更加美观；放在音乐里，音调会更加和谐悦耳；甚至许多盛开的美丽花朵及人的健美体形都有“黄金分割”的特点.令人惊异的是，这两个表面看来毫不相干的问题，却有着密切的内在联系，你愿意了解吗？

在中学的平面几何中，你已经学会如何计算一个正多边形的面积和周长.一个单位圆的内接正 n 边形，无论 n 有多么大，它的面积总不会超过 π，周长也不会超过 2π.试问，你能在单位圆内做出这样的几何图形吗：它的面积不会超过 π，而周长却可以趋于无限.

这些有趣且有一定应用背景的问题，都和本章内容——函数、极限与连续有关.

1.1 函 数

1.1.1 函数的概念

在科学实验、生产实践和日常生活中，经常会遇到各种各样的量，如质量、温度、压强、速度、时间、成本、利润等，它们的实际意义或性质可能千差万别，但从数量变与不变的角度来看，大致可以分为两类：一类量在过程中会发生变化，可以取不同的数值，这种量称为**变量**(variable)；另一类量在过程中相对不发生变化，保持同一数值，这种量称为**常量**(constant).通常用 x,y,z,t 等字母表示变量，用 a,b,c,d 等字母表示常量.

在同一过程中，往往有若干个变量，它们的变化并不是孤立进行的，而是相互依赖，相互制约，并遵循一定的规律，下面要介绍的函数概念其本质就是变量之间的这种规律或关系.

【例 1-1】 在初速度为零的自由落体运动中，下落距离 h 和时间 t 是两个变量，它们

之间满足关系

$$h=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度. 若物体落地时刻为 T，则当 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任取一值时，按上式确定的规律，h 就有一个确定的值与之对应.

【例 1-2】 图 1-1 是某地气象台用自动温度记录仪描绘的一天之内气温变化曲线. 当时间 t 在闭区间 $[0,24]$ 上任取一值时，通过曲线就可得到该时刻的气温 T.

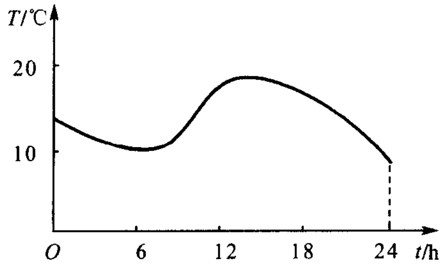


图 1-1

在上面两例中，都各有两个变量，它们之间的关系无论是用公式给出，还是用图形给出，都反映了两个变量之间一定的对应规律，即一个量的变化会引起另一个量的变化，当前者在其变化范围内任取一值时，后者依对应规律就有确定的值与之对应，我们称这两个变量之间存在着函数(function)关系.

函数是一个最基本的数学概念，和许多重要的数学概念一样，人们对它的认识经历了由不全面到较全面，由不确切到较确切，由不严密到较严密的逐步深化过程. 17 世纪由于天文、力学及航海事业的发展，在数学领域已经出现了一些具体函数，其中大部分是作为曲线研究的. 随着科学技术的发展，新型的函数不断出现，数学先驱们也不断为函数下定义，但都受到时代的局限，直到 1837 年，德国数学家狄利克雷(Dirichlet, 1805 ～ 1859) 才对函数给出了一个与现代十分接近的定义. 到了 19 世纪后期，函数又被定义为两集合之间的对应关系，避免了意义不够明确的“变量”概念. 进入 20 世纪，有人用“序偶”来定义函数，进一步克服了意义不够明确的“对应”概念，之后又有人对“序偶”作了进一步的明确.

考虑到本教材的使用对象是工科院校的学生，我们先按照狄利克雷的方式给出函数的定义，然后再用集合映射的观点加以说明，这既与中学数学课的函数概念衔接，又足以使读者正确理解微积分中的概念和理论.

定义 1-1 设有非空数集 X 和实数集 $\mathbf{R}$，f 是一个确定的法则(或关系)，对于每个 $x \in X$，都有唯一的 $y \in \mathbf{R}$ 与之相对应，并且将与 x 对应的 y 记作 $y=f(x)$，则称 f 是定义在 X 上的**一元函数**(one-variable function)，简称为**函数**，称 x 为**自变量**(independent variable)，y 为**因变量**(dependent variable).

这里，$f(x)$ 称为当自变量为 x 时，这个函数的函数值；称 x 的取值范围 X 为函数 f 的**定义域**(domain of definition)，记作 $D(f)$，即 $D(f)=X$. 当 x 取遍 X 中一切值，函数值 $y=f(x)$ 的变化范围称为函数 f 的**值域**(range of values)，记作 $R(f)$.

需要说明的是，f 表示由 $x(x\in X)$ 产生 $y[y\in R(f)]$ 的对应规则，而 y 或 $f(x)$ 表示通过 f 在 $R(f)$ 中与 x 对应的数值，二者是有区别的. 但是用 $y=f(x)$ 表示一个函数时，f 所代表的对应规则已完全确定，因而习惯上也把 y 或 $f(x)$ 称为自变量 x 的函数. 对应于 $x=x_0$ 的函数值记作 $f(x_0)$，或 $y|_{x=x_0}$. 函数记号 $f(x)$ 是瑞士数学家欧拉(Euler,

1707 ~ 1783) 在 1734 年引入的，当某一过程中涉及多个函数时，不同的函数要用不同的字母表示，如 $y = F(x)$，$y = g(x)$，$y = \varphi(x)$ 等，以示区别.

在函数定义中，最重要的是定义域和对应法则，给出一个函数时，必须同时说明这两个要素.

如果函数关系是由一个公式表示的，则约定函数的定义域是使公式有意义的一切实数组成的集合，这样的定义域称为函数的**自然定义域**. 例如 $y = \sqrt{x}$ 的定义域 $D(f) = [0,\infty)$；$y = \dfrac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+1}$ 的定义域是 $(-1,1) \cup (1,+\infty)$.

如果函数是由实际问题确定的，则其定义域要由问题本身的意义来确定. 例如，自由落体运动中，物体下落的距离 h 是时间 t 的函数：$h = \dfrac{1}{2}gt^2$. 如果开始下落的时刻为 $t = 0$，落地时刻为 $t = T$，则这个函数的定义域为 $[0, T]$. 若不考虑该问题的背景，函数 $h = \dfrac{1}{2}gt^2$ 的自然定义域则是 $(-\infty, +\infty)$.

本课程是在实数(real number) 范围内讨论，由于实数集 $\mathbf{R}$ 中的数和实数轴上的点是一一对应的，因此除特别声明外，数和点将不加区别. 例如，函数 $f(x)$ 在数 $x = x_0$ 处的函数值 $f(x_0)$ 和在点 $x = x_0$ 处的函数值 $f(x_0)$ 是同一含义.

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 X，对于任意取定的 $x \in X$，对应的函数值为 $y = f(x)$，从几何上看，在平面直角坐标系中，点集 $\{(x,y) \mid y = f(x), x \in X\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的**图形**(graph). 一个函数的图形通常是一条曲线，$y = f(x)$ 也叫做这条曲线的方程，函数图形简明直观，使人能一眼看出函数变化的全貌. 这样，函数的一些性态可借助图形来研究，而一些几何问题也常借助于函数来作理论探讨.

在数学发展的过程中，形成了最简单的五类函数，即**幂函数**(power function)、**指数函数**(exponential function)、**对数函数**(logarithmic function)、**三角函数**(trigonometric function) 和**反三角函数**(inverse trigonometric function)，描述现实世界千变万化关系的函数常常由这几类函数和常数构成. 因此，把它们称为**基本初等函数**(basic elementary function). 它们的定义、性质和图形在中学已学过，这里不再赘述. 下面再举几个函数例子，以加深理解.

【例 1-3】 常数函数 $y = 2$. 它的定义域 $D(f) = (-\infty, +\infty)$，值域 $R(f) = \{2\}$，其图形如图 1-2 所示.

【例 1-4】 绝对值函数 $y = |x|$.

由绝对值定义可知

$$y = \begin{cases} x & (x \geqslant 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases},$$

它的定义域 $D(f) = (-\infty, +\infty)$，值域 $R(f) = [0, +\infty)$，其图形如图 1-3 所示.

例 1-4 中出现的函数在自变量不同的取值范围内，用不同的解析式表示，这样的函数称为**分段函数**(piecewise-defined function)，这种函数在工程技术中经常出现. 注意，分段函数表示的是一个函数，而不是几个函数.

【例 1-5】 最大整数函数 $y=[x]$. 符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,例如 $[-3]=-3$, $[-1.5]=-2$, $[0.3]=0$, $[1.7]=1$. 这个函数的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$,值域 $R(f)=\{整数\}$,其图形呈逐步升高的阶梯形(图 1-4). 这类函数称为**阶梯函数**.

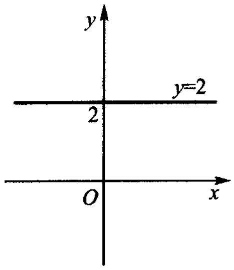


图 1-2

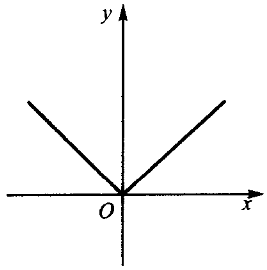


图 1-3

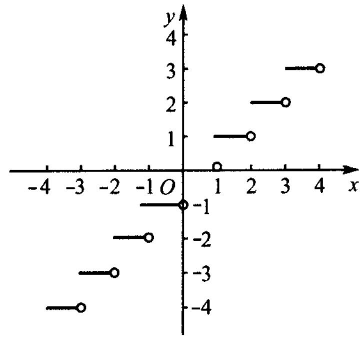


图 1-4

有许多实际问题可以用阶梯函数表示,如长途电话收费和通话时间的函数关系,出租车计价器显示的金额和行车里程的函数关系等.

【例 1-6】 根据个人所得税法规定,个人月收入减去 800 元的余额部分为纳税所得额. 纳税所得额不超过 500 元的部分,税率为 5%;超过 500 元到 2000 元的部分,税率为 10%;超过 2000 元到 5000 元的部分,税率为 15%.

据此规定,可以写出月收入在 5800(元) 以下者,月收入 x(元) 与应交纳个人所得税 y(元) 之间的函数关系.

$$y=\begin{cases}0 & (x\leqslant 800)\\ (x-800)\cdot\dfrac{5}{100} & (800<x\leqslant 1\,300)\\ 25+(x-1\,300)\cdot\dfrac{10}{100} & (1\,300<x\leqslant 2\,800)\\ 25+150+(x-2\,800)\cdot\dfrac{15}{100} & (2\,800<x\leqslant 5\,800)\end{cases}$$

1.1.2 函数的几种重要特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,若存在某个确定的常数 $M>0$,使得对一切 $x\in X$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**(bounded). 反之,若对任意给定的正数 M(无论 M 多么大),总存在 $x_1\in X$,使得 $|f(x_1)|>M$,则称 $f(x)$ 在 X 上**无界**(unbounded).

函数的有界定义也可以这样表述:如果存在常数 l 和 L,使得对任一 $x\in X$,都有 $l<f(x)<L$,则称 $f(x)$ 在 X 上有界,并称 l 和 L 分别是 $f(x)$ 在 X 上的一个**下界**和一个**上界**.

例如,函数 $f(x)=\sin x$ 在整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内有界,因为对任一 $x\in$

$(-\infty, +\infty)$ 均有 $|\sin x| \leqslant 1$. 又如 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在开区间$(0,1)$内只有下界，而无上界，因而无界. 但 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在$[1,2]$上却是有界的，因为在$[1,2]$上，显然$\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，若对 X 上的任意两点 $x_1 < x_2$，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$[或 $f(x_1) > f(x_2)$]，则称 $f(x)$ 在 X 上**单调增加**(monotone increasing)[或**单调减少**(monotone decreasing)]. 单调增加或单调减少的函数均称为**单调函数**(monotonic function).

单调增加函数的图形沿 x 轴的正向呈上升状，单调减少函数的图形沿 x 轴的正向呈下降状.

例如，正弦函数 $y = \sin x$ 在$\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$内单调增加，而在$\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$内单调减少. 当$a > 1$时，指数函数 $y = a^x$ 在$(-\infty, +\infty)$内单调增加.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 X 关于原点对称(即若 $x \in X$，则必有 $-x \in X$)，若对任意的 $x \in X$，等式 $f(-x) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**(even function)；若对任意的 $x \in X$，等式 $f(-x) = -f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**(odd function).

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称. 例如 $y = x^2$，$y = \cos x$ 是偶函数；$y = x^3$，$y = \sin x$ 是奇函数. 而 $y = x^2 + \sin x$ 既非偶函数，也非奇函数.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域是 X，若存在一个非零常数 T，使得对每个 $x \in X$，有 $x \pm T \in X$，且 $f(x \pm T) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**(periodic function)，T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们说的周期函数的周期是指最小正周期. 如 $y = \sin x$，$y = \cos x$ 是周期为 2π 的周期函数，$y = \tan x$，$y = \cot x$ 是周期为 π 的周期函数.

需要指出的是，并不是每个周期函数都有最小正周期. 例如狄利克雷函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1 & (x\text{ 为有理数}) \\ 0 & (x\text{ 为无理数}) \end{cases},$$

容易验证，任意正的有理数都是它的周期，但是不存在最小正周期.

1.1.3 复合函数与反函数

复合函数与反函数是经常遇到的函数形式.

【例 1-7】 某金属球的体积 V 是其半径 r 的函数：$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$. 由于热胀冷缩，球的半径又随着温度 T 变化，设 r 随 T 的变化规律是 $r = r_0(1 + 0.017T)$，其中 r_0 是常数. 将 $r = r_0(1 + 0.017T)$ 代入 $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$，就得到体积 V 与温度 T 之间的函数关系

$$V = \frac{4}{3}\pi r_0^3 (1 + 0.017T)^3$$

像这样把一个函数代入另一个函数而得到的函数，称为由这两个函数构成的复合函数.

定义 1-2 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，值域为 $R(f)$；函数 $u=g(x)$ 的定义域为 $D(g)$，值域为 $R(g)\subseteq D(f)$，则对任意的 $x\in D(g)$，通过 $u=g(x)$ 有唯一的 $u\in R(g)\subseteq D(f)$，再通过 $y=f(u)$ 又有唯一的 $y\in R(f)$. 这样，对任意的 $x\in D(g)$，通过 u 有唯一的 $y\in R(f)$ 与之对应，因此 y 是 x 的函数，我们称这个函数为 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的**复合函数**(composite function)，记作

$$y=(f\circ g)(x)=f(g(x))\quad [x\in D(g)],$$

并称 u 为**中间变量**，$u=g(x)$ 为**中间函数**.

复合函数不仅可以由两个函数复合而成，也可由更多的函数复合而成. 例如函数 $y=\sqrt{1+\lg(2+\cos\sqrt{x})}$ 是由 4 个简单函数 $y=\sqrt{u}$，$u=1+\lg v$，$v=2+\cos w$，$w=\sqrt{x}$ 复合而成的.

应该注意的是，并非任意两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合，因为对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 对应的 u，都不能使 $y=\arcsin u$ 有意义. $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 能否复合，关键在于是否满足定义中的 $R(g)\subseteq D(f)$.

【例 1-8】 函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ 可以看做由 $y=\arcsin u$ 和 $u=\dfrac{x-1}{2}$ 复合而成.

由于 $y=\arcsin u$ 的定义域是 $[-1,1]$，所以要求

$$|u|=\left|\frac{x-1}{2}\right|\leqslant 1,\quad 即 -1\leqslant x\leqslant 3.$$

由此可知 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ 的定义域是 $[-1,3]$.

本例说明，经复合后的函数，其自然定义域未必是中间函数的自然定义域.

研究任何事物，往往要从正反两个方面来研究，函数 $y=f(x)$ 反映了当自变量 x 变化时，因变量 y 随之变化的规律，有时根据需要，则要反过来研究 x 随着 y 变化的规律，这就产生了反函数的概念.

例如，一物体从距地面高 H 处自由落下，下落距离与时间 t 的函数的关系是

$$h=\frac{1}{2}gt^2,\quad t\in\left[0,\sqrt{\frac{2H}{g}}\right].$$

如果研究物体下落不同距离所用的时间，则有

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}},\quad h\in[0,H].$$

这是一个以 h 为自变量，t 为因变量的函数. 像这样交换了自变量与因变量位置的函数 $t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$，称为 $h=\dfrac{1}{2}gt^2$ 的反函数.

定义 1-3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，值域为 $R(f)$，如果对每一个 $y\in R(f)$，都有唯一的 $x\in D(f)$，使 $y=f(x)$，则 x 也是 y 的函数，我们将这个函数记作 $x=f^{-1}(y)$，并把它称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**(inverse function)，而 $y=f(x)$ 则称为反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的**直接函数**. 显然 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数.

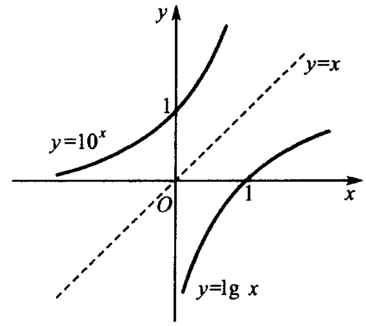


图 1-5

在定义中，反函数的自变量用 y 表示，因变量用 x 表示，这与用 x 表示自变量，用 y 表示因变量的习惯不符. 因而，一般把反函数 $x = f^{-1}(y)$ 写作 $y = f^{-1}(x)$，字母的改变并没改变该函数的定义域和对应法则，当然可以说 $y = f(x)$ 的反函数就是 $y = f^{-1}(x)$. 例如由 $y = 10^x$ 得 $x = \lg y$，于是得到 $y = 10^x$ 的反函数 $y = \lg x$.

容易证明，在同一平面直角坐标系中，$y = f^{-1}(x)$ 和 $y = f(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称. 图 1-5 描绘的是指数函数 $y = 10^x$ 和它的反函数，即对数函数 $y = \lg x$ 的图形.

但是，并不是所有的函数都存在反函数. 可以证明，如果 $y = f(x)$ 是单调增加(或单调减少)的函数，则它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 就一定存在，并且也是单调增加(或单调减少)的函数.

1.1.4 映射

映射是数学中一个重要的基本概念，它是函数概念的直接推广.

定义 1-4 设 X、Y 是两个非空集合，若存在一个对应关系 f，使得 X 中的每个元素 x，通过 f 在 Y 中有唯一的元素 y 与之对应，则称 f 是从 X 到 Y 的一个**映射**(mapping)，记作

$$f: X \to Y$$

或

$$f: x \mapsto y = f(x) \quad (x \in X),$$

并称 y 是 x 在映射 f 下的**像**，x 称为 y 在映射 f 下的**原像**. 集合 X 称为映射 f 的**定义域**或**定义集合**，而 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq Y$ 称为映射 f 的**值域**或**像集**.

函数概念可以用映射的术语表述：设数集 $X \subseteq \mathbf{R}$，则 X 到 $\mathbf{R}$ 的任一映射 f 称为定义在 X 上的函数，即函数是映射的特例，曲线 $y = f(x)$ 也称为函数 $y = f(x)$ 的**图像**.

设有映射 $g: X \to Y$，$f: Y \to Z$，于是有

$$x \in X \xrightarrow{g} y = g(x) \in Y \xrightarrow{f} z = f(y) = f(g(x)) \in Z,$$

这样对每个 $x \in X$，经过 $y \in Y$，有唯一的 $z \in Z$ 与之对应，于是又产生了一个从 X 到 Z 的新映射，把它记作 $f \circ g: X \to Z$，即

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad (x \in X),$$

我们称 $f \circ g$ 为由 f 与 g 构成的**复合映射**(composite mapping).

显然，复合函数是复合映射的特例.

设有映射 $f: X \to Y$，若 $Y = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$，则称 f 为**满射**(surjection)，即 Y 中的任一元素均是 X 中某元素的像. 若 f 将 X 中不同的元素映射到 Y 中的像也不同，即若 $x_1, x_2 \in X$，且 $x_1 \neq x_2$，则 $f(x_1) \neq f(x_2)$，这时称 f 是**单射**(injection). 若 f 既是满射又是单射，则称 f 是 X 到 Y 的一个**双射**(bijection)或**一一映射**(one-to-one mapping). 若 X 和 Y 之间存在着一一映射，则称 X 和 Y 是**一一对应**的，记作 $X \sim Y$.