

大学文科高等数学系列教材

微积分

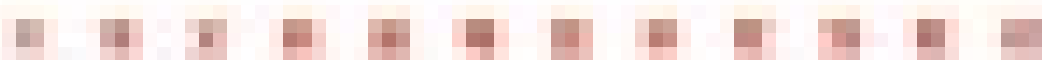
WEIJIFEN

王 龙◎主编

刘 宪 焦志常◎副主编



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS



商和分

大学文科高等数学系列教材

微积分

WEIJIFEN

王 龙◎主编

刘 宪 焦志常◎副主编



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分/王龙主编. —上海:华东理工大学出版社, 2007. 9

(大学文科高等数学系列教材)

ISBN 978-7-5628-2127-4

I. 微... II. 王... III. 微积分-高等学校-教材 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 114540 号

大学文科高等数学系列教材

微积分

主 编 / 王 龙

副 主 编 / 刘 宪 焦志常

策划编辑 / 徐知今

责任编辑 / 胡 景

责任校对 / 李 晔

封面设计 / 王晓迪

出版发行 / 华东理工大学出版社

地址:上海市梅陇路 130 号, 200237

电话:(021)64250306(营销部)

传真:(021)64252707

网址:www.hdlgpress.com.cn

印 刷 / 常熟市华顺印刷有限公司

开 本 / 787mm×1092mm 1/16

印 张 / 19.75

字 数 / 484 千字

版 次 / 2007 年 9 月第 1 版

印 次 / 2007 年 9 月第 1 次

印 数 / 1—4050 册

书 号 / ISBN 978-7-5628-2127-4/O·185

总 定 价 / 32.00 元

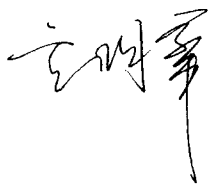
(本书如有印装质量问题,请到出版社营销部调换。)

序

1958年,莫迪格里亚尼(Franco Modigliani)和米勒(Merton Miller)的一篇划时代的论文在《美国经济评论》上正式发表.在这篇文章中,他们提出的“无套利(No-Arbitrage)”分析方法改变了华尔街人的投资思维,从而成为华尔街发展史上一件意义非凡的大事.也正是这篇文章,使得金融学在研究方法上完全从经济学中独立出来.然而,这篇文章在美国最著名的学术杂志——《美国经济评论》——上发表时,却遇到了一个尴尬的问题.那就是在这篇文章中,用到了大量的数学工具,其中一个很常见的数学符号“ $\bar{X}$ ”,一个在数学中司空见惯的平均值符号,居然在杂志社的检字机上无法打印出来,当时的杂志社怎么也不能在一个字母之上再额外加上一个横杠.结果,这两位后来获得诺贝尔经济学奖的作者不得不自掏腰包帮助杂志社改进他们的检字系统.这一趣事无疑反映出在那个时代,数学在经济学中的作用并不是多么的重要.但是,在短短的几十年间,数学在经济学中起到了惊人的作用.如果不是数学工具在经济学中的广泛应用,也就不会出现20世纪80年代开始的新经济增长理论,尽管这一理论的原始思想在20世纪初便已经产生了.翻开当今任何一本出色的经济管理类学术杂志,不难发现各种各样的数学符号是如何充斥其中的,在今天的《美国经济评论》上,包含各种希腊符号的数学方程式之复杂,比起当年的“ $\bar{X}$ ”不知要复杂了多少倍.

然而,数学在经济学乃至其他学科的渗透,在极大地促进了相应学科发展的同时,也带来了一系列的问题.这些问题的一个集中体现就是,如何把握数学在这些学科中使用的度,尤其是在教学活动中,如何将数学与这些学科很好地结合起来,是一个非常困难并且也是急需解决的问题.尤其对于非理工科专业的学生而言,如果数学一开始就面面俱到而深奥艰涩,势必导致学生对这门学科望而生畏,乃至丧失学习的兴趣;如果数学过于简单,甚至于走马观花,所学又不成体系,那么必然给学生以后的学习和研究带来隐患.所以,既能够做到体系完备、详略得当,又能晓畅易懂,与相关学科很好地结合起来,并不是一件很容易的事.我院王龙副教授和刘宪及焦志常博士合编的这本《微积分》教材,则是在这方面的一个有益尝试.王龙副教授从教三十余年,有着丰富的数学教学经验,曾被评为“全国优秀教师”,并多次被评为“学生心中的好老师”;而刘宪和焦志常作为具有理工科背景的经济学博士,对数学在经济学中的应用有着相当深刻的体会.他们的这一著作,较之于其他同类教材,一个显著特色就是知识面广,但并不凌乱,尤其着眼于经济管理类学科对数学的基本要求,做到了体系完备、详简得当.在与经济管理类学科的结合上,他们也做了非常出色的尝试,这在他们的大量例题中有着广泛的体现.

他们的著作于付梓之际,正是丁亥之秋,所谓“秋实盈衍,亦蕴其珍”,这是他们多年辛勤耕耘的结晶,也希望这累累硕果,来年更能培育出希望之花.



前 言

文理渗透已成为当今高等教育的主要趋势之一,综合素质和综合能力的培养也是当前高教改革的方向.然而,目前专为文科学生进行教学的高等数学教材却相对较少.为此,编写一本深度适当、广度适中、形式灵活,能受文科学生欢迎的高等数学教材一直是我们所追求的目标.本书就是编者在多年从事文科高等数学教学的基础上,结合国内文科高等数学教学最新取得的成果、2005 年国家颁布的考研数学三、四大纲以及 2006 年教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会提出的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成的.本书力求突出以下几个特点:

(1) 难度上“层次分明”.本着“适合各个层次需求”的原则,力求在难度设计上有一定的“坡度”,拉开层次.根据文科高等数学教学的特点,既要满足广大文科学生(包括经管类、社会学、社区管理等)学习基础知识的需要,又要满足部分学生将来考研的合理需求.

(2) 内容上“够用为度”.本着“打好基础、够用为度”的原则,强调基础知识的运用,既删除了较艰深的理论推导,又突出了以“教学基本要求”为主线,保持理论的连贯和完整,而且例题和习题的题型较丰富,体现了各类考试的特点与方向.

(3) 风格上“通俗易懂”.本着“破解难点,兼顾体系”的原则,本书的定位在于使其成为学生学习的“导学”.通过对基本概念的要素、基本知识的特征、基本方法的要点给予较深入的概括和总结,做到深入浅出,以拓展学生的思路,加深对概念的理解和掌握旨在解决问题的数学分析方法.

(4) 实践上“注重实用”.本着“面向实际,注重实用”的原则,不求面面俱到,但求切实可用,特别注重高等数学在经济上应用的基本思想,着力培养学生解决实际问题的数学能力.

本教材的第 1~5 章由王龙执笔,第 6~7 章由刘宪执笔,第 8 章由焦志常、刘宪执笔,全书由王龙统稿.

我们在编写本书的过程中,得到了任青萍老师和高忠明老师的大力支持与帮助,在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,书中错误疏漏之处在所难免,望广大读者和同行专家批评指正.

编 者

2007 年 6 月

目 录

1 函数、极限与连续	1
1.1 函数	1
1.1.1 区间、绝对值、邻域	1
1.1.2 函数、反函数、复合函数	2
1.1.3 函数的基本性质	4
1.1.4 初等函数	6
1.1.5 分段函数	8
1.1.6 隐函数	8
1.1.7 幂指函数	9
1.1.8 其他准备知识	9
1.1.9 常见的经济函数	10
1.2 极限	13
1.2.1 数列极限	13
1.2.2 函数的极限	15
1.2.3 变量的极限以及极限的性质	17
1.2.4 无穷大量与无穷小量	19
1.2.5 极限的运算法则及复合运算	21
1.2.6 未定式极限	23
1.2.7 极限存在准则与两个重要极限	24
1.3 函数的连续性	28
1.3.1 函数的改变量	28
1.3.2 连续函数的概念	29
1.3.3 函数的间断点	30
1.3.4 连续函数的运算法则	32
1.3.5 闭区间上连续函数的性质	32
1.3.6 利用函数的连续性计算极限	33
1.3.7 无穷小量的比较	34
第1章习题	35
2 导数与微分	42
2.1 导数的概念	42
2.1.1 变速直线运动的速度	42
2.1.2 曲线切线的斜率	42

2.1.3	产品产量的变化率	43
2.1.4	函数的变化率——导数	43
2.1.5	左导数和右导数	45
2.1.6	函数的可导性与连续性的关系	46
2.2	导数的基本运算法则与基本公式	46
2.2.1	导数的基本运算法则	46
2.2.2	导数的基本公式	49
2.2.3	隐函数的导数	53
2.2.4	对数求导法	53
2.2.5	高阶导数	54
2.2.6	综合例题	57
2.3	微分	58
2.3.1	微分的定义	58
2.3.2	函数可微与可导之间的关系	59
2.3.3	微分的几何意义	60
2.3.4	微分的运算法则	60
2.3.5	利用微分进行近似计算	61
	第2章习题	62
3	中值定理与导数应用	68
3.1	微分中值定理	68
3.1.1	罗尔定理	68
3.1.2	拉格朗日中值定理	70
3.1.3	柯西定理	72
3.2	罗必塔法则	74
3.2.1	$\frac{0}{0}$ 型未定式	75
3.2.2	$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	76
3.2.3	$1^\infty, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0$ 型未定式	77
3.3	导数的应用	79
3.3.1	函数单调性的判别法	79
3.3.2	函数的极值	80
3.3.3	函数的最值	83
3.3.4	曲线的凹向与拐点	85
3.3.5	函数作图	86
3.4	导数在经济问题中的应用	89
3.4.1	边际分析	89
3.4.2	弹性分析	92

第3章习题	96
4 不定积分	103
4.1 原函数与不定积分的概念	103
4.2 基本积分公式与不定积分性质	104
4.2.1 基本积分公式	104
4.2.2 不定积分性质	105
4.3 换元积分法	107
4.3.1 第一类换元积分法(凑微分法)	107
4.3.2 第二类换元积分法	109
4.4 分部积分法	112
4.5 典型例题	114
第4章习题	124
5 定积分	129
5.1 定积分的概念	129
5.1.1 曲边梯形的面积	129
5.1.2 一段时间间隔内的产品产量	130
5.1.3 定积分的定义	131
5.2 定积分的基本性质	133
5.3 微积分基本公式	135
5.3.1 积分上限的函数及其基本性质	135
5.3.2 微积分基本定理(牛顿-莱布尼茨公式)	137
5.4 定积分的计算	139
5.4.1 定积分的换元法	139
5.4.2 定积分的分部积分法	142
5.5 广义积分与 Γ 函数	144
5.5.1 无限区间上的广义积分	144
5.5.2 无界函数的广义积分(瑕积分)	147
5.5.3 Γ 函数	150
5.6 定积分的应用	151
5.6.1 平面图形的面积	152
5.6.2 立体的体积	154
5.7 定积分在经济学中的应用	157
5.7.1 已知总产量的变化率求总产量	157
5.7.2 已知边际函数求总量函数	158
第5章习题	160
6 多元函数	167

6.1 空间解析几何简介	167
6.1.1 空间直角坐标系	167
6.1.2 空间曲面及其方程	168
6.1.3 空间曲线及其方程	172
6.2 多元函数的概念	175
6.2.1 多元函数的定义	176
6.2.2 二元函数的定义域	176
6.2.3 二元函数的几何意义	177
6.3 二元函数的极限与连续	178
6.3.1 二元函数的极限	178
6.3.2 二元函数的连续	180
6.4 偏导数	181
6.4.1 偏导数的概念	181
6.4.2 高阶偏导数	184
6.5 全微分	187
6.6 多元复合函数微分法与隐函数微分法	189
6.6.1 多元复合函数微分法	189
6.6.2 多元隐函数的微分法	193
6.7 多元函数的极值	194
6.8 条件极值——拉格朗日乘数法	197
6.9 二重积分	199
6.9.1 二重积分的基本概念	199
6.9.2 二重积分的计算	201
6.9.3 广义二重积分	211
第6章习题	213
7 无穷级数	219
7.1 无穷级数的概念及其基本性质	219
7.1.1 无穷级数的概念	219
7.1.2 常数项级数的基本性质	221
7.2 正项级数	223
7.2.1 正项级数的概念	223
7.2.2 正项级数敛散性的判别法	223
7.3 任意项级数	230
7.3.1 交错级数	230
7.3.2 绝对收敛与条件收敛	231
7.4 幂级数	233
7.4.1 幂级数及其收敛区间	234
7.4.2 幂级数的性质	237

7.5 泰勒公式与泰勒级数	240
7.5.1 泰勒(Taylor)公式	240
7.5.2 泰勒级数	243
7.5.3 某些初等函数的幂级数展开式	244
第7章习题	249
8 微分方程与差分方程初步	254
8.1 微分方程的基本概念	254
8.1.1 微分方程的定义	254
8.1.2 微分方程的解	255
8.2 一阶微分方程	256
8.2.1 变量可分离的一阶微分方程	256
8.2.2 齐次微分方程	258
8.2.3 一阶线性微分方程	260
8.3 可降阶的高阶微分方程	263
8.3.1 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程	263
8.3.2 $y''=f(x, y')$ 型的二阶微分方程	264
8.3.3 $y''=f(y, y')$ 型的二阶微分方程	264
8.4 二阶常系数线性微分方程	265
8.4.1 线性微分方程解的基本定理	266
8.4.2 二阶常系数齐次线性微分方程的解法	267
8.4.3 简单二阶常系数非齐次线性微分方程的解法	269
8.5 差分方程简介	272
8.5.1 差分与差分方程的基本概念	272
8.5.2 线性差分方程解的基本定理	275
8.5.3 一阶常系数线性差分方程	276
第8章习题	280
习题参考答案	285
参考文献	303

1

函数、极限与连续

在中学我们已经学习过函数的概念,而函数又是高等数学的主要研究对象.极限是在研究变量的变化趋势时所引出的一个非常重要的概念,高等数学中许多基本概念都是建立在极限的基础上的,而且极限的方法又是研究函数的一种最基本的方法.为此,本章将系统介绍函数、极限与连续的基本理论与方法,为以后各章的学习做好准备.

1.1 函数

1.1.1 区间、绝对值、邻域

1. 区间

设 a, b 为实数,且 $a < b$, 则开区间 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$; 闭区间 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$; 半开半闭区间 $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$, $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$; 还有无限区间, 如 $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$, $[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$, $(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}$.

2. 绝对值

- (1) $-|a| \leq a \leq |a|$
- (2) $|x| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) 即 $-\varepsilon < x < \varepsilon$
- (3) $|x| > M$ ($M > 0$) 即 $x > M$ 或 $x < -M$
- (4) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (x, y 为任意实数)
- (5) $|x-y| \geq |x| - |y|$ (x, y 为任意实数)

3. 邻域

(1) 实心邻域

数: 实数集合

$$\{x | |x - x_0| < \delta, \delta > 0\} = \{x | x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \delta > 0\}.$$

形: 在数轴上, 是一个以点 x_0 为中心, 长度为 2δ 的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 称此为点 x_0 的 δ 邻域. x_0 称为邻域的中心, δ 为邻域的半径(图 1-1).

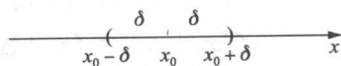


图 1-1

(2) 空心邻域

$\{x | 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$ 表示数集.

称 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 为以 x_0 为中心, δ 为半径的空心邻域(图 1-2).

例 1 把 -1 的 $\frac{1}{2}$ 空心邻域表示成区间.

解: 因为 -1 的 $\frac{1}{2}$ 空心邻域可以表示为

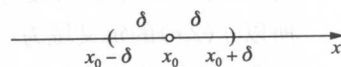


图 1-2

$$0 < |x - (-1)| < \frac{1}{2}$$

即 $-\frac{1}{2} < x+1 < \frac{1}{2}$ 且 $x \neq -1$, 即 $-\frac{3}{2} < x < -1$ 或 $-1 < x < -\frac{1}{2}$,

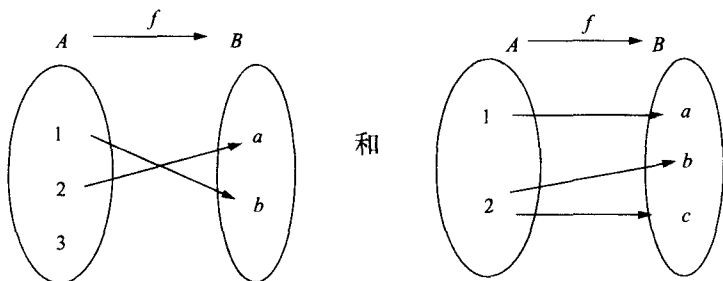
得 $\left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

1.1.2 函数、反函数、复合函数

1. 函数

定义 1.1 设 D 是一个非空实数集, 若对于 D 中的任一 x 值, 变量 y 按照一定的对应法则都有一个确定的值与之对应, 则称变量 y 是 x 的函数, 记作 $y=f(x)$. 自变量的取值范围称为定义域, 记作 $D(f)$; 因变量 y 的取值范围称为函数的值域, 记作 $Z(f)$.

[注] (1) 理解“ D 中的任一 x 值”、“有一个确定的值”的含义, 如:



都不能确定从 A 到 B 的函数.

(2) 当且仅当给定的两个函数, 其定义域与对应规则完全相同时, 才认为它们是同一函数.

例 2 求函数 $y=f(x)=x^2-x+1$ 在点 $x=1, x=x_0+1, x=x_0+\Delta x$ 处的函数值.

解: $f(1)=1^2-1+1=1$

$$f(x_0+1)=(x_0+1)^2-(x_0+1)+1=x^2+x_0+1$$

$$f(x_0+\Delta x)=(x_0+\Delta x)^2-(x_0+\Delta x)+1=x_0^2+2\Delta x \cdot x_0-x_0+(\Delta x)^2-\Delta x+1$$

例 3 设函数 $f(x+1)=x^2-x-1$, 求 $f(x)$.

解: 令 $t=x+1$, 则 $x=t-1$, 代入得

$$f(t)=(t-1)^2-(t-1)-1=t^2-3t+1$$

故 $f(x)=x^2-3x+1$

例 4 设 $f(x)=\begin{cases} 2x, & \text{当 } |x| < 1 \text{ 时;} \\ x^2+x, & \text{当 } 1 \leq |x| \leq 2 \text{ 时.} \end{cases}$ 求 $h(x)=f(2x)+f(2-x)$ 的 $D(h)$.

解: 因为 $f(x)$ 的定义域为: $-2 \leq x \leq 2$,

所以 $f(2x)$ 的定义域为: $-2 \leq 2x \leq 2$, 即 $-1 \leq x \leq 1$

$f(2-x)$ 的定义域为: $-2 \leq 2-x \leq 2$, 即 $0 \leq x \leq 4$

故 $D(h)=[-1, 1] \cap [0, 4]=[0, 1]$

2. 反函数

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$, $x \in D(f)$, $y \in Z(f)$, 如果对任意的 $y \in Z(f)$, 由 $y=f(x)$ 可以确定唯一的 $x \in D(f)$ 与其对应, 则称变量 x 为变量 y 的函数, 记作 $x=f^{-1}(y)$, 并称它为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

[注] (1) 习惯上, 由 $x=f^{-1}(y)$, 互换 x, y 后所得的函数 $y=f^{-1}(x)$ 才称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

(2) 只有一一对应的函数(即函数所确定的关系是一一对应)才有反函数.

综合之, 已知: $y=f(x) \quad x \in D(f) \quad y \in Z(f)$ ①

反解: $x=f^{-1}(y) \quad x \in D(f) \quad y \in Z(f)$ ②

互换: $y=f^{-1}(y) \quad x \in Z(f) \quad y \in D(f)$ ③

结论: 若函数 $y=f(x)$, $x \in D(f)$, $y \in Z(f)$ 所确定的关系是一一对应, 则①和③互为反函数; ①和②的图像是相同的; ①和③的图像关于直线 $y=x$ 对称.

3. 复合函数

定义 1.3 设 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$, 若函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $Z(\varphi)$, 且 $Z(\varphi) \cap D(f) \neq \emptyset$, 则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数. x 为自变量, y 为因变量, u 为中间变量.

[注] 在复合函数定义中, 为什么要求 $Z(\varphi) \cap D(f) \neq \emptyset$? 中间变量有何特征?

例 5 已知 $y=f(u)=\sqrt{u}$, $u=\varphi(x)=a-x^2$, 试考察 $a=1, a=-1$ 时 $y=f[\varphi(x)]$ 是不是复合函数.

解: (1) $a=1$ 时, $y=\sqrt{u}$, $u=1-x^2$

$$D(f)=[0, +\infty), Z(\varphi)=(-\infty, 1]$$

因为 $Z(\varphi) \cap D(f)=[0, 1] \neq \emptyset$, 所以 $y=f[\varphi(x)]=\sqrt{1-x^2}$ 是复合函数.

(2) $a=-1$ 时, $y=\sqrt{u}$, $u=-1-x^2$

$$D(f)=[0, +\infty), Z(\varphi)=(-\infty, -1]$$

因为 $Z(\varphi) \cap D(f)=\emptyset$, 所以 $y=f[\varphi(x)]=\sqrt{-1-x^2}$ 不是复合函数.

例 6 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{当 } x < 1 \text{ 时;} \\ x, & \text{当 } x \geq 1 \text{ 时.} \end{cases} \varphi(x)=\begin{cases} x+2, & \text{当 } x < 0 \text{ 时;} \\ x^2-1, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时.} \end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

解: $f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \text{当 } \varphi(x) < 1 \text{ 时;} \\ \varphi(x), & \text{当 } \varphi(x) \geq 1 \text{ 时.} \end{cases}$

(1) 当 $\varphi(x) < 1$ 时:

① $x < 0$, $\varphi(x)=x+2 < 1$, 即 $x < -1$

② $x \geq 0$, $\varphi(x)=x^2-1 < 1$, $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-1 < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x < \sqrt{2}$

(2) 当 $\varphi(x) \geq 1$ 时:

① $x < 0$, $\varphi(x)=x+2 \geq 1$, 即 $-1 \leq x < 0$

$$\textcircled{2} \quad x \geq 0, \varphi(x) = x^2 - 1 \geq 1, \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \geq \sqrt{2}$$

因此

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2}, & \text{当 } x < -1 \text{ 时;} \\ x+2, & \text{当 } -1 \leq x < 0 \text{ 时;} \\ e^{x^2-1}, & \text{当 } 0 \leq x < \sqrt{2} \text{ 时;} \\ x^2-1, & \text{当 } x \geq \sqrt{2} \text{ 时.} \end{cases}$$

1.1.3 函数的基本性质

1. 有界性

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义, 若存在数 $M > 0$, 使得对于一切 $x \in D$, 恒有: $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 D 上有界. 如果不存在这样的正数 M , 则称 $f(x)$ 在 D 上是无界的.

[注] (1) 若对任意 $x \in D$, 恒有 $f(x) \leq K$ ($f(x) \geq K$), 则称 $f(x)$ 在 D 上有上界(下界), 数 K 称为函数 $f(x)$ 的一个上界(下界). 易知, 函数 $f(x)$ 在 D 上有界的充要条件是它在 D 上既有上界又有下界.

(2) 仔细考察 $f(x)$ 取值的范围, 例如函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 2)$ 内是无界的, 而在 $[1, +\infty)$ 上则是有界的.

常见的有界函数有: $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$, $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}$, $|\operatorname{arccot} x| < \pi$,

$\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$ 等等.

2. 单调性

定义 1.5 设函数 $y = f(x)$ 在某区间 D 内有定义, 若对任意的 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在区间 D 内是单调增加的(或单调减少的).

若函数在其整个定义域内都是单调增加的(或单调减少的), 就说函数 $y = f(x)$ 是单调函数.

3. 奇偶性

定义 1.6 设函数 $y = f(x)$ 定义在对称区间 D 上, 若对任意的 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为 D 上的偶函数; 如果恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $y = f(x)$ 为 D 上的奇函数.

[注] (1) 偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

(2) 奇函数的代数和仍为奇函数, 偶函数的代数和仍为偶函数; 奇函数与偶函数的乘积为奇函数; 同为偶(奇)函数的乘积为偶函数.

4. 周期性

定义 1.7 设函数 $y = f(x)$ 在区间 D 上有定义, 若存在一个与 x 无关的正数 T , 使得对任意的 $x \in D$, 当 $(x \pm T) \in D$ 时, 恒有 $f(x+T) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为周期函数, 满足上

式的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的周期.

[注] (1) 并非所有的周期函数都存在周期.

(2) 若 T 为函数 $f(x)$ 的周期, 则 $\frac{T}{|a|}$ 是函数 $f(ax+b)$ 的周期.

例 7 设 $f(x)$ 为定义在 $(-a, a)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-a, 0)$ 内也单调增加.

证明: 对 $\forall x_1, x_2 \in (-a, 0)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $-x_1, -x_2 \in (0, a)$, 且 $-x_1 > -x_2$, 因为 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调增加, 所以 $f(-x_1) > f(-x_2)$.

又因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $-f(x_1) > -f(x_2)$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$.

故按定义知, $f(x)$ 在 $(-a, 0)$ 内单调增加.

例 8 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = \sin x \cdot e^{x^8}$, (2) $f(x) = x^k - x^{-k}$ (k 为非零整数),

(3) $f(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$ ($a > 0, a \neq 1$), (4) $f(x) = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$ (a 为常量且 $a \neq 0$).

解: (1) 由于 $\sin x$ 为奇函数, e^{x^8} 为偶函数, 因此, 它们的乘积为奇函数.

(2) 当 k 为奇数时, x^k 与 $x^{-k} = \frac{1}{x^k}$ 均为奇函数, 因此, 它们的差仍然为奇函数.

当 k 为偶数时, x^k 与 $x^{-k} = \frac{1}{x^k}$ 均为偶函数, 因此, 它们之差仍然为偶函数.

(3) $f(-x) = \frac{a^{-x} - 1}{a^{-x} + 1} = \frac{1 - a^x}{1 + a^x} = -f(x)$, 故 $f(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$ 为奇函数.

(4) $f(-x) = \ln[-x + \sqrt{a^2 + (-x)^2}] = \ln \frac{(\sqrt{x^2 + a^2} - x)(\sqrt{x^2 + a^2} + x)}{\sqrt{x^2 + a^2} + x}$

$$= \ln \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2} + x} = \ln a^2 - \ln(\sqrt{x^2 + a^2} + x)$$

易知, 当 $a^2 = 1$, 即 $a = \pm 1$ 时, $f(x)$ 为奇函数; 当 $a^2 \neq 1$ 时, $f(x)$ 非奇非偶.

例 9 判断下列函数在其定义域内的有界性:

(1) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, (2) $f(x) = \frac{1+\sin x}{3}$, (3) $f(x) = x \cdot \sin x$.

解: (1) 由于 $1+x^2 \geq 2|x|$, 所以 $|f(x)| = \left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

(2) 由于 $|f(x)| = \left| \frac{1+\sin x}{3} \right| \leq \frac{1}{3} (1+|\sin x|) \leq \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

(3) 因为, 对不论多大的 M_0 , 总有 $x_0 = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, n 为正整数且充分大, 使

$$|f(x_0)| = |x_0 \sin x_0| = \left| \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right| = 2n\pi + \frac{\pi}{2} > M_0$$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无界.

例 10 证明: 定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

证明: 设 $f(x)$ 是定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的函数, 易知

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

$$\text{令 } \varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)], \psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)], \text{ 则}$$

$$\varphi(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = \varphi(x), \psi(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -\psi(x)$$

即 $\varphi(x)$ 是偶函数, $\psi(x)$ 是奇函数.

故 $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ 是一个偶函数与一个奇函数之和.

1.1.4 初等函数

1. 基本初等函数

(1) 常数函数: $y = f(x) = C$

$D(f) = (-\infty, +\infty)$, 见图 1-3.

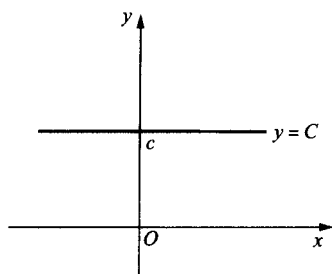


图 1-3

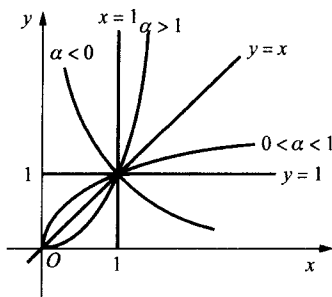


图 1-4

(2) 幂函数: $y = x^a$ (a 为常数)

当 $a > 0$ 时, $y = x^a$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加;

当 $a < 0$ 时, $y = x^a$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少, 见图 1-4.

[注] 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $y = x^a$ 与 $y = x^{\frac{1}{a}}$ 互为反函数, 其图像关于直线 $y = x$ 对称 ($a \neq 0$).

(3) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$), $D(f) = (-\infty, +\infty)$, $Z(f) = (0, +\infty)$

当 $a > 1$ 时, $y = a^x$ 单调增加;

当 $0 < a < 1$ 时, $y = a^x$ 单调减少, 见图 1-5.

(4) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$), $D(f) = (0, +\infty)$, $Z(f) = (-\infty, +\infty)$, 见图 1-6.

[注] $y = \log_a x$ 与 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 互为反函数, 其图像关于直线 $y = x$ 对称.