21世纪高等院校数学指南丛书

数学分析

定理·问题·方法

胡适耕　姚云飞　编著

科学出版社
www.sciencep.com

·21世纪高等院校数学指南丛书·

数学分析

定理·问题·方法

胡适耕　姚云飞　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

数学分析与高等代数并称为最重要的数学基础课程，多年来为教育界所公认。随着进入硕士阶段学习的学生人数剧增，为准备或已经开始硕士课程的学生提供更为到位的数学分析方法训练，已刻不容缓。本书通过800道例题讲解，大体覆盖了数学分析的主要内容，但并不追求面面俱到，而是将重点放在特别富有启发性的问题与方法上。全书共分四章，分别为极限与连续性、微分学、积分学、级数，每小节以概念与定理、问题与方法的模式进行阐述。

本书可作为高等院校数学及相关专业本科生的辅导用书，也可供报考研究生的学生和相关科研人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析：定理•问题•方法/胡适耕，姚云飞编著.—北京：科学出版社，2007.1

（21世纪高等院校数学指南丛书）

ISBN 978-7-03-018309-5

Ⅰ.数… Ⅱ.①胡…②姚… Ⅲ.数学分析－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第156142号

责任编辑：江 兰 梅 莹／责任校对：董艳辉

责任印制：高 嵘／封面设计：宝 典

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

湖北新华印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年1月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2007年1月第一次印刷 印张：15 3/4

印数：1—4 000 字数：307 000

定价：22.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前 言

自从波利亚与舍贵的《分析中的问题和定理》及徐利治与王兴华的《数学分析的方法及例题选讲》问世以来，数学及整个科学都发生了惊人的变化，新技术冲击所引发的思考与议论使人们难以平静. 然而，迄今尚无真正迹象表明，分析数学的重要性真如一些大胆的预言所宣称的那样有任何明显的降低；数学分析的高标准训练似乎仍然是数学家必由所出的摇篮. 这一事实，从人们对已提到的两本分析著作的高度肯定与持久热情，得到了有力的印证.

现在贡献给读者的这本书，当然绝不可能是波利亚或徐利治的不朽著作的替代品. 对于这些哺育了几代分析学家的优秀读物，还根本谈不上超越的问题. 至于作某些补充，则不仅可能，而且已显得必要；尤其在高水平的专门训练与初学者的入门练习之间，正需要充实一些中间环节. 在这方面如能作一些有效的工作，可算是在追随可敬仰的分析大师们的不懈努力中尽到了一点责任.

基于上述考虑，本书是为专攻数学的那些优秀大学生准备的，他们天资勃发，壮志满怀，但在深入专门课题之前尚未完成系统的基础训练；而经验表明，这种训练与数学分析课程的基本材料结合起来，效果最佳. 近年来，高等教育实现了突破性发展：几乎在一夜之间，进入硕士学习阶段的学生成倍增长. 为准备或已经开始硕士课程的学生提供更到位的数学分析方法训练，显然已经成为一件刻不容缓的事情.

本书虽然大体上覆盖了数学分析课程的主要内容，但并不追求面面俱到，而是将重点放在那些特别富有启发性的问题与方法上. 依据方法的自然引申罗织材料，是波利亚等极力提倡的，这一精神在本书中当有所体现. 考虑到本书并非供初学者练习之用，而是供已有一定基础的学生复习提高时阅读，所以在组织材料时必然容许更大的综合性，唯有这样，才有助于读者获得更高层次的理解. 因此，从内容编排上看，本书与数学分析课程颇有差别是理所当然的. 作者当然注意到，面对进入硕士阶段学习时愈来愈激烈的竞争，数学系的学生需要更多的帮助. 本书在内容与形式上都考虑到适合于有这一需求的学生.

作　者

2006 年 10 月

记号与约定

$C[a,b]$：$[a,b]$ 上的连续函数之全体；$C(a,b)$，$C(D)$ 等仿此.

$C^r[a,b]$：$[a,b]$ 上的 C^r 函数之全体；$C^r(a,b)$，$C^r(D)$ 等仿此.

D：通常表区域；D_{xy}：某个空间区域在 xy 平面上的投影.

$\mathrm{d}s$：弧微分.

$\mathrm{d}\sigma$：平面面积元.

$\mathrm{d}S$：曲面面积元.

$\mathrm{d}v$：体积元.

$\Delta u = \sum \partial^2 u/\partial x_i^2$.

$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$.

∂D：区域 D 的边界.

$\boldsymbol{F}$：通常记向量值函数，$\boldsymbol{F} = (P,Q,R)$.

$f_{\max}$：函数 f 在所考虑区间(域)内的最大值；$f_{\min}$ 仿此.

I：通常记某个区间或积分.

$\inf A$：数集 A 的下确界；若 A 下方无界，则 $\inf A = -\infty$.

L：通常记 Lagrange 函数或积分路径.

L_{xy}：空间曲线 L 在 xy 平面上的投影.

$M_k = \sup\limits_{x\in A}|f^{(k)}(x)|$，$A$ 由上下文判定.

$\mathbf{N}$：自然数集.

$\boldsymbol{N}$：法向量；$\boldsymbol{n}$：单位法向量.

O 记号：$y = O(x) \Leftrightarrow 0 < \underline{\lim}|x/y| \leqslant \overline{\lim}|x/y| < \infty$.

o 记号：$y = o(x) \Leftrightarrow \lim x/y = 0$.

$\mathbf{Q}$：有理数集.

$\mathbf{R}$：实数集；$\mathbf{R}^n$：n 维实向量空间；$\mathbf{R}_+ = [0,\infty)$.

r：通常记 $\sqrt{x^2+y^2}$ 或 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

$\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ 或 (x,y).

S：通常记级数和或曲面面积.

$\sup A$：数集 A 的上确界；若 A 上方无界，则 $\sup A = \infty$.

$\operatorname{sgn} x$：符号函数.

Σ：通常记曲面.

σ: 通常记平面区域之面积.

$\boldsymbol{T}$:切向量;τ:单位切向量.

v: 通常记区域 V 的体积.

$\boldsymbol{x}$:记向量或点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

$\mathbf{Z}$:整数集;$\mathbf{Z}_+$: 非负整数集.

$\triangleq$:定义为.

$\square$:命题证毕或问题解毕.

∞: 总表示 $+\infty$.

$(2n)!!=2\cdot4\cdot\cdots(2n)$;$(2n-1)!!=1\cdot3\cdot\cdots(2n-1)$.

$\binom{m}{n}=\dfrac{m!}{n!(m-n)!}$.

$\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$: Jacobi 行列式.

$f(x^{\pm})=\lim\limits_{h\downarrow0}f(x\pm h)$;$f(\pm\infty)=\lim\limits_{x\uparrow\infty}f(\pm x)$.

$f_n\uparrow f\Leftrightarrow f_n\to f$ 且 f_n 对 n 单调增;$f_n\downarrow f$ 仿此.

$f_n\rightrightarrows f$:$\{f_n\}$ 一致收敛于 f.

const:表示某个常数,其具体数值不必或不能明确写出.

目　　录

第一章 极限与连续性

§1.1 极　　限

I 概念与定理

你从所有涉及数学分析的著作中得到的一个共同忠告大概是：极限论是最需要优先考虑的，其重要性你已经不再置疑. 然而，它何以如此重要则未必十分清楚. 问题在于，要完全理解极限论的意义，势必要了解建立在极限论基础上的更深入的分析知识，而这只有在你走过很长一段路之后才能做到. 在走到那一步之前，不妨满足于如下的初步理解. 数学的任务常不免要求某些未知量，如果某个待求的未知量 A 是无法直接求得的，那么一个自然的考虑是找到一种程序，用以求得愈来愈接近于 A 的一串量 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$. 当你这样做时，实际上已在使用极限了.

与一个直观描述相比，极限论的严格描述要困难一些，它依赖于实数系 $\mathbf{R}$ 的结构. 几乎所有数学分析教程，都以实数理论作为其出发点，这往往使初学者颇感困惑. 实数系不就是由所有有理数与无理数组成，且在几何上等价于一条直线吗？但严格的描述并非如此简单. 下面概述最必需的概念与结果.

1.1.1 定义　设 $A \subset \mathbf{R}$ 是一非空集. 若 $b \in \mathbf{R}, A \leqslant b$ $(\Leftrightarrow \forall\, a \in A, a \leqslant b)$，则称 b 为 A 的**上界**；当 A 有上界时称 A 为**上有界集**，并称 A 的最小上界为其**上确界**，记作 $\sup A$. 若 A 无上界，则规定 $\sup A = \infty$.

可直接验证：$b = \sup A\ (< \infty) \Leftrightarrow A \leqslant b$ 且 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, a \in A \cap (b-\varepsilon, b]$.

1.1.2 上确界公理　若 $A \subset \mathbf{R}$ 是上有界非空集，则 $\sup A$ 存在.

完全对偶地可定义下界、下有界集及下确界概念，以 $\inf A$ 记 A 的下确界. 若令 $-A = \{-a : a \in A\}$，则有 $\inf A = -\sup(-A)$. 由此易推出，对任何非空集 $A \subset \mathbf{R}$，$\inf A$ 与 $\sup A$ 均存在，且 $-\infty \leqslant \inf A \leqslant \sup A \leqslant \infty$. 当 $A = \{x_n\}$ 时，将 $\sup A$ 写作 $\sup\limits_n x_n$；$\inf\limits_n x_n$ 仿此. 上、下确界恒存在这一事实是下面展开极限论的基础.

1.1.3 定义　任给上有界(或下有界)序列 $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$，约定

$$\varlimsup_n x_n = \inf_n \sup_{k \geqslant n} x_k \left(\text{或} \varliminf_n x_n = \sup_n \inf_{k \geqslant n} x_k\right), \tag{1}$$

称其为 $\{x_n\}$ 的**上极限**(或**下极限**);若 $\{x_n\}$ 上无界,则约定 $\overline{\lim\limits_n}\, x_n=\infty$;若 $\{x_n\}$ 下无界,则约定 $\underline{\lim\limits_n}\, x_n=-\infty$. 若 $\{x_n\}$ 的上极限与下极限相等,则将其公共值 x 称为序列 $\{x_n\}$ 的极限,写作 $x=\lim\limits_n x_n$ 或 $x_n\to x$;当 x 有限时,说 $\{x_n\}$ 收敛于 x,并称 $\{x_n\}$ 为**收敛序列**.

与"收敛序列之极限"相比较,上、下极限似乎是过于粗糙的概念,你可能会怀疑它有何用处. 实际上,在很多方面,使用上下极限更为方便. 最主要的是,**上下极限总是存在的**! 而且,通过运用上下极限,可间接得出有关极限的很多结论. 对于上、下极限的运用,有以下重要关系式:

$$-\infty\leqslant\underline{\lim_n}\, x_n\leqslant\overline{\lim_n}\, x_n\leqslant\infty;\tag{2}$$

$$\begin{cases}\overline{\lim\limits_n}(-x_n)=-\underline{\lim\limits_n}\, x_n,\\ \overline{\lim\limits_n}\, x_n^{-1}=(\underline{\lim\limits_n}\, x_n)^{-1}\quad(x_n>0);\end{cases}\tag{3}$$

$$x_n\leqslant y_n\Rightarrow\begin{cases}\overline{\lim\limits_n}\, x_n\leqslant\overline{\lim\limits_n}\, y_n,\\ \underline{\lim\limits_n}\, x_n\leqslant\underline{\lim\limits_n}\, y_n;\end{cases}\tag{4}$$

$$\overline{\lim_n}(x_n+y_n)\leqslant\overline{\lim_n}\, x_n+\overline{\lim_n}\, y_n;\tag{5}$$

$$\overline{\lim_n}\, x_ny_n\leqslant\overline{\lim_n}\, x_n\overline{\lim_n}\, y_n\quad(x_n,y_n\geqslant 0).\tag{6}$$

假定式(5)右端不出现情况 $\infty-\infty$,而式(6)右端不出现情况 $0\cdot\infty$. 若 $\{x_n\}$ 或 $\{y_n\}$ 收敛,则(5),(6)均为等式. 以上各式的证明均可依据(1),无需用到通常在极限论中特别强调的"ϵ-N"语言. 例如,(5)的证明如下:

$$\begin{aligned}\overline{\lim_n}(x_n+y_n)&=\inf_n\sup_{k\geqslant n}(x_k+y_k)\\&\leqslant\inf_{m,n}(\sup_{k\geqslant m}x_k+\sup_{l\geqslant n}y_l)\\&=\inf_m\sup_{k\geqslant m}x_k+\inf_n\sup_{k\geqslant n}y_k\\&=\overline{\lim_n}\, x_n+\overline{\lim_n}\, y_n.\end{aligned}$$

若 $\{x_n\}$ 收敛,则

$$\begin{aligned}\overline{\lim_n}\, y_n&\leqslant\overline{\lim_n}(-x_n)+\overline{\lim_n}(x_n+y_n)\\&=-\lim_n x_n+\overline{\lim_n}(x_n+y_n),\end{aligned}$$

由此推出(5)为等式.

关于极限的基本问题是确定极限的存在性. 凡对此问题作出解答的命题称为"收敛判别法". 在分析中,有各种针对特定情况设计的收敛判别法. 下面给出几个一般的收敛判别法,它们是导出各种特殊收敛判别法的基础.

1.1.4 定理　设 $\{x_n\}\subset\mathbf{R}, x\in\mathbf{R}$,则以下条件互相等价:

(i) $x_n \to x$;

(ii) $\overline{\lim\limits_{n}}|x_n - x| = 0$;

(iii) $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N > 0, \forall\ n \geqslant N$, 有 $|x_n - x| < \varepsilon$.

1.1.4(iii)给出极限的"ε-N"描述,它是常用的,且为大多数教科书所推荐,以至几乎造成一种印象,似乎它是极限的严格表述所必需的. 实际上,如同"上下极限"表述一样,"ε-N"表述只不过是描述极限的多种可供选择的方法之一罢了,而且未必是最好的方法. 相对于"上下极限"方法来说,"ε-N"方法的最大缺点是,"ε,N"是人为加入的量,它们使得论证不那么直截了当,尤其不能将论证表述成一种规则化的演算.

1.1.5 Cauchy 收敛原理　$\{x_n\} \subset \mathbf{R}$ 收敛的充要条件是

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N > 0,\ \forall\ m,n \geqslant N,\ \text{有}\ |x_m - x_n| < \varepsilon \tag{7}$$

或

$$\lim_{m,n}|x_m - x_n| = 0. \tag{7$'$}$$

证　若 $x_n \to x$, 则由 $|x_m - x_n| \leqslant |x_m - x| + |x - x_n|$ 及定理1.1.4(iii)直接推出(7)成立. 反之,设(7)成立,则由 $x_m < x_n + \varepsilon\ (\forall\ m,n \geqslant N)$ 推出

$$\overline{\lim_{k}}\, x_k \leqslant \sup_{k\geqslant N} x_k \leqslant \inf_{k\geqslant N} x_k + \varepsilon \leqslant \underline{\lim_{k}}\, x_k + \varepsilon,$$

由 ε 的任意性得 $\overline{\lim\limits_{k}}\, x_k = \underline{\lim\limits_{k}}\, x_k < \infty$, 故 $\{x_n\}$ 收敛. □

1.1.5 较之1.1.4 的好处在于:为判定 $\{x_n\}$ 收敛,并不需要**预定**一个作为其极限的 x. 这就使得1.1.5 原则上可用于任何序列的收敛判定. 这种普遍适用性同时也是困难之所在:在 $\{x_n\}$ 缺乏特殊结构的情况下,验证条件(7)常常是不容易的. 因此,仍需建立一些较特殊的判别法,而基于单调性的判别法是最重要的.

1.1.6 有界单调收敛原理　有界单调序列必收敛.

与序列极限比较,函数极限似乎要复杂些. 实际上,二者几乎是平行的,因而具有相同或类似的本质特征. 下面以 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 为例说明有关的概念与结论,其他形式的函数极限是类似的.

1.1.7 定义　设 $f(x)$ 是定义在 $[a,\infty)$ 上的函数. 约定

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\, f(x) = \inf_{x\geqslant a} \sup_{y\geqslant x} f(y), \qquad \underline{\lim_{x\to\infty}}\, f(x) = \sup_{x\geqslant a} \inf_{y\geqslant x} f(y),$$

二者分别称为 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的上极限与下极限. 若二者相等,则将其公共值 A 称为 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 或 $f(\infty) = A$; 若 A 有限,则 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时收敛于 A.

1.1.8 定理　对于函数 $f(x)(x \geqslant a)$, 以下条件互相等价:

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$;

(ii) $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}|f(x) - A| = 0$(假定 A 有限);

(iii) $\forall\ \varepsilon>0, \exists\ N>a, \forall\ x\geqslant N$, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$;

(iv) 若 $\{x_n\}\subset[a,\infty), x_n\to\infty$, 则 $f(x_n)\to A$.

1.1.9 Cauchy 收敛原理 当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 收敛的充要条件是:

$$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ N>0,\ \forall\ x,y\geqslant N,\ 有\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

1.1.10 有界单调收敛原理 若 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上单调有界,则当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 必收敛.

通常的数学分析教科书大都以关于实数理论基本定理的一个表述作为极限论的高潮或终结.你在学过一些后续课程之后,或许会觉得这些"基本定理"其实是简单的.现在,我们将这些定理集中在一块.

1.1.11 定理 对于实数系 $\mathbf{R}$ 以下结论成立:

(i) 任何有界序列 $\{x_n\}\subset\mathbf{R}$ 必含收敛子列;

(ii) 若闭区间序列 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足 $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$ $(\forall\ n\in\mathbf{N}), b_n-a_n\to\infty$, 则它们必有唯一公共点;

(iii) 若闭区间 $[a,b]$ 被一族开区间所覆盖,则必可从中选出有限个开区间覆盖 $[a,b]$.

以上三个结论通常分别称为紧性定理、区间套定理与有限覆盖定理.三者可以互相推出,且在逻辑上与上确界公理等价,因而每一个都刻画出了实数系的性质.基本定理的深刻性不仅在于其对实数系的本质刻画,更在于它们是一系列理论推广的原型与出发点.

II 问题与方法

A. 证明 $x_n\to a$

给定序列 $\{x_n\}\subset\mathbf{R}$,常常可通过种种途径估计到 $x_n\to a$,例如通过直接观察、利用 x_n 的适当渐近公式进行判断、基于某种类比的猜测,等等.要严格确立 $x_n\to a$,依据1.1.2与1.1.4,可用以下方法之一:

(i) 直接估计 $|x_n-a|$,判定 $|x_n-a|\to 0$;

(ii) 验证 $\overline{\lim\limits_n}|x_n-a|\leqslant\varepsilon$ $(\forall\ \varepsilon>0)$;

(iii) 验证 $\overline{\lim\limits_n}\,x_n\leqslant a\leqslant\underline{\lim\limits_n}\,x_n$.

方法(i)是大多数教科书所推荐的,它看起来是一种最自然且较易掌握的常规方法,但实际上,对于稍复杂的问题,用方法(i)就会显得困难;方法(ii)如同(i)一样着力判定 $|x_n-a|\to 0$,但在形式上似乎将要证的结论减弱了,因而可能将问题简化;至于方法(iii),则以两个不等式 $\overline{\lim\limits_n}\,x_n\leqslant a$ 与 $\underline{\lim\limits_n}\,x_n\geqslant a$ 来代替要证的等式 $\lim\limits_n x_n=a$,就很可能带来意想不到的简化,当要证的两不等式之一自动成立时尤其如此.因此,方法(iii)是一种较具吸引力的方法.本书特别强调方法(ii),(iii)的

应用，将以大量例子来说明其效力.

首先考虑一组涉及均值的问题.

1. 设 $x_n \to a, \lambda_n > 0, \sum \lambda_n = \infty$，则 $\bar{x}_n \triangleq \sum_1^n \lambda_i x_i / \sum_1^n \lambda_i \to a$.

注意，在本书中，所有证明题都直接写出要证结论，而省略了“求证”一类的词.

证　首先，设 $|a| < \infty$，因而不妨设 $a = 0$（否则以 $x_n - a$ 代替 x_n）. $\forall m \in \mathbf{N}$，有

$$\varlimsup_n |\bar{x}_n| \leqslant \varlimsup_n \left(\frac{\left|\sum_1^m \lambda_i x_i\right|}{\sum_1^n \lambda_i} + \sup_{i>m} |x_i| \right)$$
$$= \sup_{i>m} |x_i| \quad (\text{用}(4)(5)).$$

由此得出 $\varlimsup_n |\bar{x}_n| \leqslant \varlimsup_m |x_m| = 0$，如所要证.

其次设 $a = \infty$（当 $a = -\infty$ 时以 $-x_n$ 代 x_n），因而不妨设 $x_n \geqslant 1$，于是 $\sum \lambda_n x_n \geqslant \sum \lambda_n = \infty$，这就可用已证结论得出

$$\frac{1}{\bar{x}_n} = \frac{\sum_1^n \lambda_i x_i \cdot x_i^{-1}}{\sum_1^n \lambda_i x_i} \to \lim_n x_n^{-1} = 0,$$

因而 $\bar{x}_n \to \infty$. □

你注意到，在以上证明中，真正被实际考虑的，仅 $a = 0$ 这一特殊情况而已，所有其他情况都**归化**到这一特殊情况了.“归化法”所能带来的简化有多大，上题是很能说明问题的.

2. 设 $x_n \to a$，则 $\bar{x}_n \triangleq n^{-1} \sum_1^n x_i \to a$；若 $0 < x_n \to a$，则 $n \Big/ \sum_1^n x_i^{-1} \to a$.

显然，题2已被包含在题1中，不过建议你最好给出题2的一个独立证明，以便体会一下题1的证法.

3. 设 $\varphi(x)$ 是连续函数，$\lambda_n > 0, \sum \lambda_n = \infty, x_n \to a \in \mathbf{R}$，则

$$\sum_1^n \lambda_i \varphi(x_i) \Big/ \sum_1^n \lambda_i \to \varphi(a).$$

表面上看，题3与题1似乎差别很大，但题1的证法依然可用.

4. 设 $0 < x_n \to a, \lambda_n > 0, \sum \lambda_n = \infty$，则

$$\bar{x}_n = \left(\prod_1^n x_i^{\lambda_i} \right)^{1/\sum_1^n \lambda_i} \to a.$$

提示　只要证 $\ln \bar{x}_n \to \ln a$，用题1或直接证明.

5. 设 $0 < x_n \to a$，则 $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \to a$.

提示　用题4或直接证明.

题1～5的结论可概括为：若 $x_n \to a$，则 $\bar{x}_n \to a$，$\bar{x}_n$ 是 x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 的某种均值（加权平均、算术平均、几何平均、调和平均等）. 这些结论被广泛应用于数学的各

个领域.

6. 设 $x_n \to a, y_n \to b, a, b$ 有限,则

$$n^{-1}(x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1) \to ab.$$

提示　用题1的证法,可设 $a = 0$.

类似地可证:若 $x_n \to a, y_n > 0, y_n \Big/ \sum_1^n y_k \to 0$,则

$$\lim_n \sum_1^n x_k y_{n-k+1} \Big/ \sum_1^n y_k = a.$$

一个有趣的问题是,能否将已得到的结论推广于连续量的平均.这就涉及变限积分的极限.

7. 设 $f, \varphi \in C[a, \infty), \varphi > 0, \int_a^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x = \infty, f(\infty)$ 存在,则

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x \varphi(t) f(t)\mathrm{d}t \Big/ \int_a^x \varphi(t)\mathrm{d}t = f(\infty).$$

证　类似于题1,不妨只考虑 $f(\infty) = 0$ 的情况. $\forall A > a$,有

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{x\to\infty}} \left| \int_a^x \varphi(t) f(t)\mathrm{d}t \right| \Big/ \int_a^x \varphi(t)\mathrm{d}t \\
\leqslant\ &\overline{\lim_{x\to\infty}} \left[\frac{\left| \int_a^A \varphi(t) f(t)\mathrm{d}t \right|}{\int_a^x \varphi(t)\mathrm{d}t} + \sup_{t>A} |f(t)| \right] \\
=\ &\sup_{t>A} |f(t)| \to 0 \quad (A \to \infty).
\end{aligned}$$

□

值得说明的是,要使上面的证法合理,就必须对函数的上(下)极限建立类似于(1)~(6)的关系式,而这是容易的.例如,对照(1),(5)可直接写出

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}[f(x) + g(x)] \leqslant \overline{\lim_{x\to\infty}} f(x) + \overline{\lim_{x\to\infty}} g(x), \tag{5$'$}$$

且当 $f(x)$ 或 $g(x)$ 在 $x \to \infty$ 收敛时(5)′是等式.

题7的一个特殊情况是:若 $f \in C[0, \infty), f(\infty)$ 存在,则

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = f(\infty) \quad (\text{参看题 } 49).$$

8. 设 $f, g \in C[0, \infty), f(\infty)$ 与 $g(\infty)$ 存在且有限,则

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(y) g(x - y)\mathrm{d}y = f(\infty) g(\infty).$$

提示　参照题6与题7.

9. 设 $f \in C[0, \infty), f(\infty)$ 存在,则 $\lim_n \int_0^1 f(nx)\mathrm{d}x = f(\infty)$.

提示　用题7或直接证明.

10. 设 $x_n - x_{n-2} \to 0$,则 $n^{-1}(x_n - x_{n-1}) \to 0$.

证　令 $y_n = x_n - x_{n-2}, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$,则 $y_n = \Delta x_n + \Delta x_{n-1}$,

$$\varlimsup_{n}\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{n}\right|\leqslant\varlimsup_{n}\frac{1}{n}\Big[\sum_{k=m+1}^{n}(|\Delta x_k|-|\Delta x_{k-1}|)+|\Delta x_m|\Big]$$

$$\leqslant\varlimsup_{n}\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n}|y_k|$$

$$\leqslant\sup_{k>m}|y_k|\to 0\quad(m\to\infty).$$

□

11. 设 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 是两个序列，$y_n<y_{n+1}\to\infty$，则

$$\lim_{n}x_n/y_n=\lim_{n}\Delta x/\Delta y_n,$$

只要右端极限存在，其中 $\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$.

证　令 $\lambda_n=\Delta y_n\ (n>1)$，$\lambda_1=y_1$，则 $\sum\lambda_n=\infty$，于是由题1有

$$\lim_{n}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n}\frac{\sum_1^n\lambda_i(\Delta x_i/\Delta y_i)}{\sum_1^n\lambda_i}=\lim_{n}\frac{\Delta x_n}{\Delta y_n}.$$

□

已证的结论就是著名的**Stolz 定理**，它可看作离散形式下的L'Hopital 法，是计算某些序列极限的有效方法. 由于我们利用了题1，才使得Stolz 定理的证明出人意料地简单. 仿照题1 的证法，给出题11 的一个直接证明，将是一个有益的练习，你不妨一试. 另一方面，容易看出题1 的结论可由Stolz 定理直接推出.

12. $\lim\limits_{n}n^{-1}x_n=\lim\limits_{n}\Delta x_n$，假定右端极限存在.

提示　用题11 或题2，或直接证明.

13. 设 $x_n>0$，则 $\lim\limits_{n}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n}x_{n+1}/x_n$，假定右端极限存在.

提示　用题12 或题6，亦易直接证明.

14. 设 $x_n>0$，则 $\varlimsup\limits_{n}\sqrt[n]{x_n}\leqslant\varlimsup\limits_{n}x_{n+1}/x_n$.

证　不妨设要证不等式右端有限. 任取 $b>\varlimsup\limits_{n}x_{n+1}/x_n$，必有 $m\in\mathbf{N}$，$\forall\ n\geqslant m$，有 $x_{n+1}/x_n<b$. 于是

$$\sqrt[n]{x_n}\leqslant b^{(n-m)/n}\sqrt[n]{x_m}\quad(n>m),$$

故 $\varlimsup\limits_{n}\sqrt[n]{x_n}\leqslant b$. 由此显然得所要证. □

从题13 与14 容易联想到某些正项级数收敛判别法，你能得出适当的推论吗?

如同题1 与题2 有对应的函数极限形式一样，题11～13 亦有相应的函数极限形式.

15. 设 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 的任何有限子区间上有界，$g(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上严格增加且 $g(\infty)=\infty$，$\tau>0$，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+\tau)-f(x)}{g(x+\tau)-g(x)},$$

假定上式右端极限 l 存在.

证 用类似于题1 的证法. 只考虑 $|l|<\infty$ 的情况,不妨设 $l=0,\tau=1$(否则分别以 $f(\tau x)-lg(\tau x)$ 与 $g(\tau x)$ 代 $f(x)$ 与 $g(x)$). 取定 $A>a$;$\forall\ x>a$, 设 $A\leqslant x-n<A+1,n\in\mathbf{N}$, 则

$$\varlimsup_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant\varlimsup_{x\to\infty}\frac{\sum_1^n|f(x-i+1)-f(x-i)|+|f(x-n)|}{|g(x)|}$$
$$\leqslant\sup_{y\geqslant A}\left|\frac{f(y+1)-f(y)}{g(y+1)-g(y)}\right|\varlimsup_{x\to\infty}\frac{g(x)-g(x-n)}{g(x)}$$
$$=\sup_{y\geqslant A}\left|\frac{f(y+1)-f(y)}{g(y+1)-g(y)}\right|\to 0\quad(A\to\infty).$$ □

以上证明中取 $\tau=1$ 所带来的简化并不特别重要;而取 $l=0$ 所带来的简化则是十分明显的. 这种简化手法是值得你记取的.

16. (Cauchy 定理)设 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 的任何有限子区间上有界, $\tau>0$, 则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+\tau)-f(x)}{\tau},$$

只要上式右端极限存在.

提示 用题15 或直接证明.

17. 设 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 的任何有限子区间上有界且有正下界,则

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)]^{1/x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x+\tau)}{f(x)}\right]^{1/\tau},$$

其中 $\tau>0$, 假定右端极限存在.

提示 考虑 $g(x)=\ln f(x)$(参照题 13).

18. 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 的任何有限子区间上有界,则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{nx^{n-1}},$$

其中 $n\geqslant 1$, 假定右端极限存在.

提示 用题15(参照题16).

19. 用题16 证题8.

提示 取 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\tau=1$.

20. 设 $f(x)$ 是以 τ 为周期的连续函数,则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(x)\mathrm{d}x.$$

提示 对 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 用题16.

若 $f(x)$ 满足不等式

$$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y),$$

则称 $f(x)$ 为次可加函数. 线性函数显然是次可加函数. 一个极具启发性的问题是:次可加函数 $f(x)$ 是否如同线性函数一样,能保证极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/x$ 存在? 这一想法导致一系列极有价值的极限结果. 如同前面一样,首先考虑序列的情况.

21. 设序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{m+n}\leqslant x_m+x_n$, 则 $\lim\limits_n \dfrac{x_n}{n}=\inf\limits_n \dfrac{x_n}{n}$.

证　因 $\varliminf\limits_n n^{-1}x_n\geqslant \inf\limits_n n^{-1}x_n$ 平凡地成立,故只需证

$$\varlimsup_n \frac{x_n}{n}\leqslant \inf_n \frac{x_n}{n};$$

而为此又只需证 $\varlimsup\limits_n \dfrac{x_n}{n}\leqslant \dfrac{x_m}{m}$ $(\forall\ m\geqslant 1)$. 取定 $m\geqslant 1$, $\forall\ n\in \mathbf{N}$, 必有非负整数 p, q, 使得 $n=pm+q$, $0\leqslant q<m$(注意 p,q 与 n 有关). 于是

$$\frac{x_n}{n}\leqslant \frac{px_m+x_q}{n}=\frac{n-q}{n}\frac{x_m}{m}+\frac{x_q}{n},$$

由此显然得 $\varlimsup\limits_n n^{-1}x_n\leqslant m^{-1}x_m$, 如所要证. □

22. 设序列 $\{x_n\}$ 满足 $0\leqslant x_{m+n}\leqslant x_m x_n$, 则

$$\lim_n \sqrt[n]{x_n}=\inf_n \sqrt[n]{x_n}.$$

提示　可设 $x_n>0$, 然后考虑 $y_n=\ln x_n$.

现在将以上结果移植到函数极限:序列 $\{x_n\}$ 代之以 $(0,\infty)$ 上的函数 $f(x)$. 如同题 15～18 一样,要求 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 的任何有限子区间上有界.

23. 设 $f(x)$ 满足 $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$, 且在 $(0,\infty)$ 的任何有限子区间上有界,则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/x=\inf\limits_{x>0} f(x)/x$.

证　类似于题 21,只要证

$$\varlimsup_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\leqslant \frac{f(a)}{a}\quad (\forall\ a>0).$$

固定 $a>0$. $\forall\ x>0$, 必有 $n\in \mathbf{Z}_+$, 使得 $x=na+y$, $0<y\leqslant a$ (n,y 与 x 有关). 于是

$$\frac{f(x)}{x}\leqslant \frac{nf(a)+f(y)}{x}=\frac{x-y}{x}\frac{f(a)}{a}+\frac{f(y)}{x},$$

由此显然得 $\varlimsup\limits_{x\to\infty} x^{-1}f(x)\leqslant a^{-1}f(a)$(注意利用 $f(y)$ 在 $(0,a]$ 上有界,这是与题 21 中处理序列不同的地方). □

现在,你已不难想到应如何表述对应于题 22 的函数极限问题了.

24. 设 $f(x)$ 满足 $0<f(x+y)\leqslant f(x)f(y)$ $(x,y>0)$, 在 $(0,\infty)$ 的任何有限子区间上有界且有正下界,则

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)]^{1/x}=\inf_{x>0}\ [f(x)]^{1/x}.$$

提示　对 $\ln f(x)$ 应用题 23.

25. 设 $f(x)$ 满足 $|f(x+y)-f(x)-f(y)|\leqslant 1\ (x,y>0)$，且在 $(0,\infty)$ 的任何有限子区间上有界，则 $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-1}f(x)$ 存在且有限.

证　关键在于看出 $g(x)=1+f(x)$ 与 $h(x)=1-f(x)$ 均为次可加函数，于是直接由题23得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=\inf_{x>0}\frac{g(x)}{x}<\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x}=\inf_{x>0}\frac{h(x)}{x}<\infty.$$

由此显然得出所要结论. □

如果所处理的序列表为积分，那么运用"上下极限方法"的原理并无改变，只是在求上下极限过程中要充分利用积分的各种性质，尤其是涉及不等式的性质.

26. 设 $f\in C[a,b]$ 满足 $0\leqslant f(x)<1\ (a\leqslant x<b)$，则

$$\lim_n\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x=0.$$

证　令 $I_n=\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x$，则平凡地有 $\varliminf\limits_n I_n\geqslant 0$，故只要证 $\varlimsup\limits_n I_n\leqslant 0$. $\forall\, c\in(a,b)$，令 $M_c=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant c}f(x)$，则 $M_c<1$. 于是

$$\varlimsup_n I_n\leqslant\varlimsup_n\left[\int_a^c M_c^n\mathrm{d}x+\int_c^b f^n(x)\mathrm{d}x\right]\leqslant b-c,$$

令 $c\to b$ 即得所要证. □

注意，题26包含了几个很熟悉的极限：

$$\lim_n\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x=0;$$

$$\lim_n\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x=0.$$

这两个极限式通常由一个"ε-N"论证建立. 你试给出一个这样的论证，然后与题26的证明进行对比.

27. 设 $a<b$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续且严格增加，

$$\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x=(b-a)f^n(x_n),$$

其中 $x_n\in(a,b)$，则 $x_n\to b$.

证　由连续函数的性质，$f(x)$ 的反函数在 $[f(a),f(b)]$ 上连续，因此只要证 $f(x_n)\to f(b)$. 显然只需证 $\varliminf\limits_n f(x_n)\geqslant f(b)$. 任给 $c\in(a,b)$，有

$$\begin{aligned}\varliminf_n f(x_n)&=\varliminf_n\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right]^{1/n}\\&\geqslant\varliminf_n\left[\frac{1}{b-a}\int_c^b f^n(c)\mathrm{d}x\right]^{1/n}\end{aligned}$$