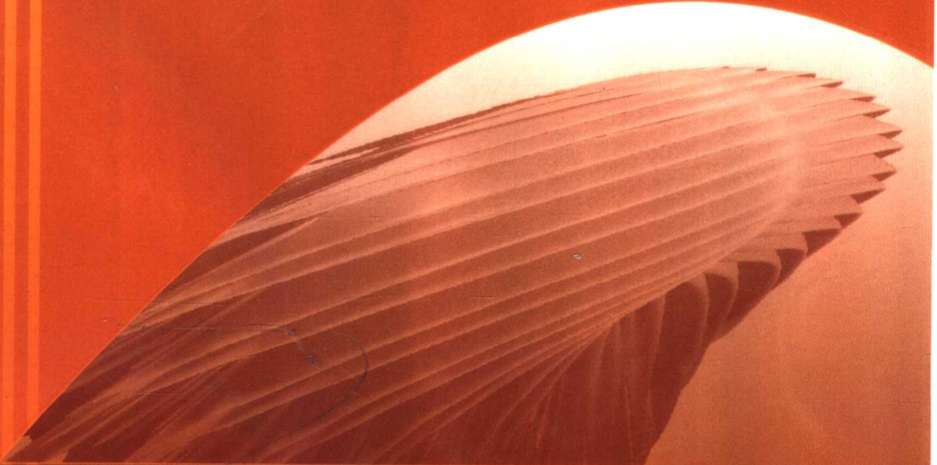
◎高等学校教材



高等数学（上册）

国防科学技术大学理学院
朱健民　李建平　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学

（上　　册）

国防科学技术大学理学院
朱健民　李建平　　主编

高等教育出版社

内容提要

本书依照"工科类本科数学基础课程教学基本要求"而编写，适合工科类本科学生使用。

本书将数学建模及数学实验的思想与方法融入教材；同时穿插了数学软件的学习和使用；突出数学思想，有利于学生加深对课程内容的理解。本书的主要内容有：映射与函数、数列极限与数值级数、函数极限与连续、导数与不定积分、导数的应用、定积分及其应用、常微分方程及习题参考答案。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上册/朱健民，李建平主编．—北京：高等教育出版社，2007.4

ISBN 978-7-04-020748-4

Ⅰ．高…　Ⅱ．①朱…②李…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 032141 号

策划编辑	王　强	**责任编辑**	李　陶	**封面设计**	王凌波
责任绘图	吴文信	**版式设计**	余　杨	**责任校对**	殷　然
责任印制	朱学忠				

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京鑫海金澳胶印有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2007 年 4 月第 1 版
印　　张	29.5	**印　　次**	2007 年 4 月第 1 次印刷
字　　数	550 000	**定　　价**	30.60 元

物料号　20748-00

郑重声明

前　　言

这部学历教育合训高等数学试点教材终于呈现在读者面前！它是我们通过5年多的学历教育合训教学改革与实践，在对编写方案进行充分论证的基础上完成初稿，并经过一轮教学试点后修订而成的。

首先，我们谈一谈为什么要针对学历教育合训学员专门建设教材。大家知道，始于2000年的学历教育合训是我军新型军事人才的一种培养模式，其总的培养目标是完成普通本科学历教育和指挥岗位任职培训，培养德、智、军、体等方面全面发展，适应建设信息化军队、打赢信息化战争需要的高素质新型初级指挥军官。为了适应学历教育合训人才的培养目标，培养高素质、高水平的新型军事指挥人才，有必要借鉴国际先进的军事人才培养模式，建立与我军新型军事人才培养目标相适应的数学课程体系和建设与之配套的优秀教材，高等数学教材就是其中的一个重要组成部分。

国内现行的高等数学教材中不乏优秀之作，但基本定位于传统的工科和非数学类理科。这些高等数学教材强调数学知识的系统性、完备性、严密性与技巧性，注重抽象分析和逻辑推理能力的培养，缺少以现实世界尤其是军事问题为背景的实例，同时也很少将教育技术手段融入教学内容中去。这一方面增加了学习该课程的难度，另一方面也不能满足学员在后续学习和任职过程中，对数学通识性和应用性的要求。因此，我们编写这本教材的目的非常明确，就是针对一般本科教育与合训人才培养的特点，“厚实基础，淡化技巧，突出数学思想的教学，加强数学实验与数学建模等应用能力的培养，充分体现数学素质在培养军事指挥人才的作用。”

其次，谈一谈数学在军事指挥中的作用。在现代战争中，指挥员不仅要操控高技术武器，而且要对复杂的、多变的、立体化的战况做出理性的分析、判断和指挥，这就要求指挥员不仅具有良好的科学素养，而且具有驾驭错综复杂局面的能力，数学的熏陶对培养指挥员的综合素质可以发挥不可替代的作用。因为学习数学，不仅是为了掌握数学知识、思想和方法，更是获得一种理性的思维模式，形成严谨而精密的思维，帮助人们更好地理解和认识自然科学与人文科学，高速地获取、筛选和处理各种信息，有条理地思考，发展人的主动性、责任感和自信心。因此，在教材内容上，一方面注意挖掘有军事应用背景的问题，引导学员如何对问题建立模型、求解；另一方面，强调严格的数学训练，以此培养学员不惧困难险阻的意志品质，学会在错综复杂的形式下保持清醒的头脑，果敢地处理各种问题。

在教材编写过程中，我们始终将提高合训学员的数学素质和应用能力摆在首位，努力贯彻现代教育思想，改革、更新和优化微积分教学内容，使用现代教育技术，吸收国内外优秀教材的经验和我校多年来在高等数学教学改革、研究和实践中积累的成果，力求使教材更具特色。

(1) 努力实现课程体系和内容的优化整合

高等数学课程必须既注意高中数学教材中涉及的微积分内容，又注意到它和线性代数与空间解析几何、大学物理、工科专业课程内容及其表述之间的联系；既注意经典内容向现代数学的扩展，同时也有意弱化极限的严密化表述，以此降低学习难度。同时，努力减少课程之间重复内容的讲述，实现课程之间无缝衔接和知识的顺利过渡，从而真正实现课程体系的优化，彻底消除学生在知识表述的不一致性方面的认知负担。如将数列极限与数值级数合成一章，既可减少数列极限计算的重复训练，又能突出数列极限的应用；在多元函数微分学的处理上，采用向量方法，既加强了和线性代数之间的联系，又有利于向非线性最优化等领域的扩展；采用向量场的积分学，有利于加强高等数学与大学物理等课程的有机结合。

(2) 将数学建模及数学实验的思想与方法融入教材及课程教学中

将数学建模及数学实验的思想与方法融入教材及课程教学中，一方面利用数学软件开展数学实验，另一方面运用数学知识和数学软件工具解决来自自然科学、社会科学、工程及军事应用中的实际问题。这样设计教学内容，有助于培养学生多角度、多层次思考问题的习惯，有助于提升学生实践性动手能力，有助于拓宽学生的知识面和视野，有助于提高学生"用数学"的兴趣和能力，有助于培养学生科学研究的探索精神和创新意识。我们在内容的取舍和习题的选配上特别增加了应用性和实验性的内容，重点关注微积分在现代科学、工程及军事各领域的应用，以此加强数学课程的实践性教学环节，通过对开放性问题的探索，培养学习者的创新精神和创新能力。

(3) 将数学软件的学习和使用穿插在教学内容中

利用现代化的数学软件，如 Mathematica、Maple、MATLAB 等解决数学教学中计算、数值分析、图形处理等问题，将抽象的数学概念与理论直观化、实验化、可视化，有助于消除学生对数学知识的困惑，提高学生的学习兴趣。在涉及微积分内容的符号、数值计算以及图形显示等方面，将 Mathematica 软件的常用格式命令分散在教材相应章节介绍，使学习者在学习教材内容的同时，也学会了该数学软件的使用方法，同时也为淡化计算技巧、加强对概念的直观理解提供了有利条件。

(4) 突出数学思想，通过多角度描述来加深对内容的理解

与传统高等数学教材相比，这本教材篇幅有较大的增加，这里并不是多个知

识点的堆砌而使得内容如此庞大，其主要原因是增加了大量描述性的内容。无论是概念的引入、定理的建立还是应用例题的讲解，我们大都从不同角度、不同层次加以描述，并经常用数值表格或直观图形来阐明，让读者能在自我阅读过程中理解和把握学习内容，试图改变传统教材由于表述简洁而带来阅读上的困难。同时，教材的易读易懂，也为课堂教学变“细讲少练”为“精讲多练”提供了可能。

本教材是集体劳动的成果，在编写过程中充分发挥了团队的凝聚力和刻苦攻关的精神。其中，第一章由周治修编写，第二、三、四、十一、十二章由朱健民编写，第五、六章、九、十章由李建平编写，第七、十四章由黄建华编写，第八章由周治修、李建平共同编写，第十三章由罗建书编写。除此以外，周治修、胡小荣、刘雄伟、陈挚、周敏、吴强、陈吉美等同志参与了习题的选配和校对工作，刘雄伟同志为本书绘制了图形。全书由朱健民和李建平统稿、定稿，并对一些章节作了适当修改。

关于本教材的使用我们强调两点：首先，我们前面指出，本教材主要是针对军队院校学历教育合训的学员编写，但其内容仍然遵循“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，涵盖微积分和空间解析几何所要求的全部内容，因此适合高等工科院校工科和非数学类理科的所有教学对象。其次，通过我们的教学试点，我们认为在 **160** 学时以内，可以讲授本书除第十四章以外的全部内容。若不讲授空间解析几何（第八章），则 **148** 学时可以讲完剩余内容，不过该章内容也不失为一个好的阅读材料。对于只需满足基本要求的教学对象，还可根据具体情况，通过调整讲授内容减少课时。

在本书的编写过程中，我们参考了国内外大量的参考文献和资料，由于追根溯源的困难和不便，我们未在书中明确指出引用材料的出处。但我们深感正是这些优秀的参考文献和资料给我们带来诸多编写的启示，同时也为我们提供了大量可引用的素材，在此特别对参考文献和资料的作者表示衷心的感谢！

最后，感谢校、部和学院三级领导对本教材编写的支持和指导，学校训练部为教学试点提供有利条件，并设立专项课题给予经费支持，理学院院领导时刻关注编写及试点工作情况，并不时给予热情鼓励。同时也要感谢我校汪浩教授、黄柯棣教授、李圣怡教授、皇甫堪教授和杨晓东教授，他们认真评审了本教材的立项申请报告，并提出了许多建设性的意见。最后，特别感谢闫岘峰教授、敖武峰教授、李志祥教授，他们对本书初稿进行了认真细致的审阅，对整个编写工作给予了具体指导。在本书教学试点中，得到了我校指挥军官基础教育学院二大队 5 队、三大队 4 队和四大队 2 队的全体学员的积极参与和热忱支持，他们从学习者的角度提出了许多宝贵意见。部分学员演算了本书的习题。正是由于有了领导、教师和学员们的大力支持和鼓励，才使得高等数学合训教材建设与教学试点顺利进行。高等教育出版社的王强编辑和李陶编辑对本书的选题和成书给予了

大量的指导,在此表示衷心的感谢!

严格地讲,这是一部针对我军学历教育合训人才培养目标按全新改革思路编写的探索性教材。尽管我们倾注了极大的心血,但书中肯定还存在着不足,甚至某些错误,恳请大家及时指出,以便进一步修正。我们将始终以感谢的心对待各种批评和建议,努力建设学历教育合训精品教材,为培养高素质军事人才贡献力量!

编　者

2006 年 7 月 15 日,长沙

目　录

第一章　映射与函数 …… 1

§1.1　集合与映射 …… 1
§1.2　函数 …… 12
§1.3　曲线的参数方程与极坐标方程 …… 30

第二章　数列极限与数值级数 …… 44

§2.1　数列极限的概念与性质 …… 44
§2.2　数列收敛的判定方法 …… 57
§2.3　无穷求和——级数 …… 70
§2.4　同号级数收敛性判别方法 …… 79
§2.5　变号级数收敛性判别方法 …… 92

第三章　函数极限与连续 …… 101

§3.1　函数极限的概念 …… 101
§3.2　函数极限运算法则及存在性的判定准则 …… 113
§3.3　无穷小与无穷大、渐近线 …… 126
§3.4　连续函数 …… 138

第四章　导数与不定积分 …… 151

§4.1　导数的概念 …… 151
§4.2　导数的计算 …… 169
§4.3　局部线性化与微分 …… 193
§4.4　变化率和相关变化率 …… 205
§4.5　不定积分 …… 214

第五章　导数的应用 …… 224

§5.1　函数的极值及最优化应用 …… 224
§5.2　微分中值定理及其应用 …… 233
§5.3　函数的多项式逼近与泰勒公式 …… 246
§5.4　函数的单调性与凹凸性及其应用 …… 263

§5.5　曲率 …………………………………………………………… 282
§5.6　解非线性方程的牛顿切线法 ……………………………… 292

第六章　定积分及其应用 ……………………………………………… 300

§6.1　定积分的概念与性质 ……………………………………… 300
§6.2　微积分基本公式 …………………………………………… 318
§6.3　两种基本积分法 …………………………………………… 333
§6.4　定积分的应用 ……………………………………………… 359
§6.5　反常积分 …………………………………………………… 379

第七章　常微分方程 ……………………………………………………… 394

§7.1　微分方程模型与基本概念 ………………………………… 394
§7.2　一阶微分方程的求解方法及几何描述 …………………… 406
§7.3　特殊二阶方程的降阶法 …………………………………… 417
§7.4　二阶线性微分方程 ………………………………………… 421

习题参考答案 ……………………………………………………………… 438

第一章　映射与函数

集合是最基本的数学概念之一，尽管我们只需描述它，而不必给出其精确定义，但这丝毫不影响它在数学中的地位和所发挥的作用. 在集合概念基础上建立起来的集合论，几乎渗透到数学的每一个分支，使数学中曾经出现的迷惑杂乱变得清晰有序. 作为集合之间的关系，映射也是数学中非常重要的概念，它是数学上各种对应关系的抽象. 实数集合之间的映射——函数（一元函数），将是我们学习的重点，因为它是微积分乃至其他数学分支讨论的重要对象，客观世界的许多现象和规律都可以通过函数来描述和解释，因此构成许多运动和变化的数学模型. 另一方面，函数有明确的几何描述，即函数图形，它可以直观反映函数的变化性态. 通常我们将一元函数的图形称为曲线（平面曲线），但并不是任何平面曲线都对应着函数关系，参数方程的出现使得一般曲线有了定量的表述. 极坐标是参数表示的特殊情形，它与直角坐标一起在几何对象的代数表示上发挥着重要作用. 本章将重点对我们在中学学习过的函数概念作一个回顾与深化.

§1.1　集合与映射

本节主要介绍集合的基本概念及性质、数轴上的区间与邻域、两个常用的不等式以及映射的概念.

1.1.1　集合

1. 集合及其表示

一般的，将具有某种性质的对象汇聚成一个整体就形成一个集合. 这个整体中的对象就称为该集合的元素.

通常用大写英文字母来表示集合，用小写字母来表示元素. 若对象 a 是集合 A 中的元素，则称元素 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；否则称元素 a 不属于 A，记作 $a\notin A$.

集合的表示方法通常有两种. 其一是枚举法，如

$$A=\{2,3,5,7\},B=\{14,15,92,65,35\};$$

另一种方法就是描述法．用这种方式写出的集合通常形如$\{x|p(x)\}$，其中$p(x)$是关于x的一个陈述句．如上述集合A用描述法可表示为

$$C=\{x|x\text{ 是 1 到 10 之间的素数}\}.$$

这两种方法各有所长，有些集合若用描述法表示是相当繁琐的．如要将集合B用描述法表出，恐怕得写成

$$D=\{x|x\text{ 为圆周率 }\pi\text{ 的前 10 位小数顺序组成的 5 个两位数之一}\}.$$

需要注意的是，用描述法表示一个集合时，定义该集合所用的那个陈述句应当表达出一个清晰的概念．诸如“某某班级的高个子男生”不能形成一个集合，因为“高个子”不是一个清晰确定的概念．

若两个集合所包含的元素完全一样，则称这两个集合相等，否则称为不相等，分别用“$=$”号和“$\neq$”号表示．集合的相等与集合的名称和集合的表示法无关．例如，上面提到的四个集合，我们有$A=C$，$B=D$，$A\neq B$．

如果集A的每个元素皆是集B的元素，称集A为集B的子集，记为$A\subseteq B$或$B\supseteq A$，读作A含于B或B包含A．若$A\subseteq B$且$A\neq B$，则称集A为集B的真子集，记作$A\subsetneqq B$或$B\supsetneqq A$，读作A真含于B或B真包含A．

不包含任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$．空集是任何集合的子集．在研究具体问题时，若所考虑的集合总是某个特定集合的子集，则称该特定集合为全集，记作X．

2. 集合运算及其性质

定义 1.1.1 由集合A和集合B的公共元素组成的集合，称为集合A和集合B的交集合，记为$A\cap B$，读作A交B．集合A和B的交集合用描述法表示为

$$A\cap B=\{x|x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

例 1 若A为全体军人构成的集合，B为全体大学生构成的集合，那么$A\cap B$为全体军人大学生构成的集合．

定义 1.1.2 将集合A的元素和集合B的元素汇合在一起组成一个新的集合，称为集合A和集合B的并集合，记为$A\cup B$，读作A并B．用描述法表示为

$$A\cup B=\{x|x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

定义 1.1.3 将所有属于集合A而不属于集合B的元素汇合在一起组成一个新的集合，称为集合B相对于集合A的补集合，记为$A-B$，也叫做A与B的差集．集合A相对于全集X的补集合，称为集合A的补集合，记为$\overline{A}$．①用描述法则有

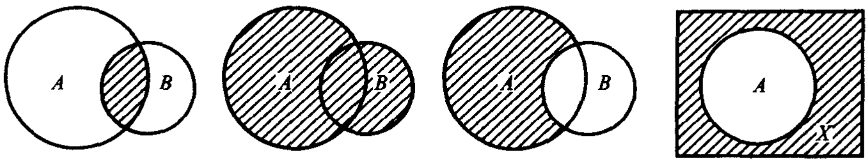
$$A-B=\{x|x\in A\text{ 且 }x\notin B\}=A\cap\overline{B}.$$

---

① 国际标准规定A的补集用$\complement_X A$表示，为排印方便，本书用$\overline{A}$表示．

例 2　若 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{c,d,e,f\}$，那么 $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}$. 注意相同的元素算一个元素，c,d 只写一次. 而 $A\cap B=\{c,d\}$，$A-B=\{a,b\}$.

集合及其运算可以用下面的文氏图来加以直观理解，如图 1.1.1 所示，阴影部分表示各运算结果.



(a) $A\cap B$　(b) $A\cup B$　(c) $A-B$　(d) $\overline{A}=X-A$

图 1.1.1　集合运算的文氏图

集合运算具有下列性质：

(1) 交换律　$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$.

(2) 结合律　$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$，$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.

(3) 分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(4) 对偶律，又称德摩根律

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$

(5) 吸收律　$A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$.

(6) 幂等律　$A\cup A=A$，$A\cap A=A$.

(7) 0 - 1 律　$A\cup\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup X=X$，$A\cap X=A$.

(8) 对合律　$\overline{\varnothing}=X$，$\overline{X}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=X$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$，$\overline{\overline{A}}=A$.

这些性质可以作为公理承认，当然有些性质可以由其余的某些性质推出，也就是说，这个系统是有冗余的. 但已经知道由交换律、分配律、0 - 1 律中的 $A\cup\varnothing=A$、$A\cap X=A$ 以及对合律中的 $A\cup\overline{A}=X$、$A\cap\overline{A}=\varnothing$ 组成的系统是完备且无冗余的.

最后我们再介绍一种集合的运算.

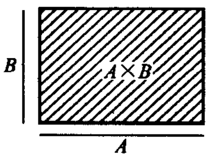
称集合 $\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$ 为集合 A 和集合 B 的笛卡儿积，又叫做直积，记为 $A\times B$.

例如，在图 1.1.2(a) 中，A，B 分别为一直线段上点的集合，$A\times B$ 为一矩形区域的点的集合；在图 1.1.2(b) 中，A 为一圆上点的集合，B 为一直线段上点的集合，$A\times B$ 为一圆柱体的点的集合.

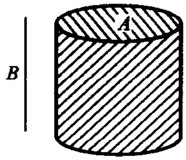
从直积的角度看，二维平面就是一维数轴 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}$ 的直积，即：$\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}$，记作 $\mathbb{R}^2$.

下面看一个直积的具体例子.

例 3 设 $A=\{-1,1\}$，$B=\{1,2,3\}$，则 $A\times B=\{(-1,1),(-1,2),(-1,3),(1,1),(1,2),(1,3)\}$. 如果把 A 看成 x 轴上的两点的集合，把 B 看成 y 轴上的三点的集合，那么 $A\times B$ 就是平面上对应的六点的集合，在图 1.1.3 中用空心圆圈表示.



(a) 线段A与线段B的笛卡儿积



(b) 圆A与线段B的笛卡儿积

图 1.1.2 笛卡儿积的直观图例

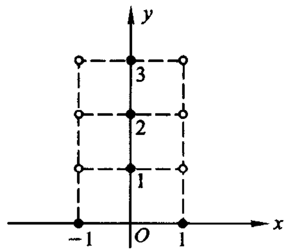


图 1.1.3 例 3 中直积的图示

3. 实数集与连续性公理

实数集由有理数和无理数组成，记为 $\mathbb{R}$. 有理数集由正整数、负整数、正分数、负分数和零组成，记为 $\mathbb{Q}$. 正整数集记为 $\mathbb{N}_+$（在现行中学教材中，将正整数与 0 统称为自然数）. 由正整数、负整数和零组成的集合称之为整数集，记为 $\mathbb{Z}$. 微积分学中所论之数通常为实数，偶尔也提及复数. 复数集记为 $\mathbb{C}$.

有理数又称分数，它能表示为有限小数或无限循环小数，如 $\frac{3}{2}=1.5$，$\frac{1}{3}=0.333\cdots=0.\dot{3}$；无理数则是无限不循环小数，如 $\sqrt{2}=1.414\cdots$，圆周率 $\pi=3.141\,59\cdots$ 及自然对数之底 $e=2.718\,28\cdots$ 都是无理数. 对一个任意指定的实数，想辨识出它是有理数还是无理数通常是一个困难的问题. 尚有许多数我们不知道它们是否是有理数，如著名的欧拉常数.

实数集上可以进行算术运算、代数运算. 实数之间还存在着大小关系，称为实数的有序性.

全体实数与数轴上的点是一一对应的，即每一实数恰好对应数轴上的一点，同时数轴上的每一点也恰好对应一个实数. 实数的这一特性称为实数的连续性或完备性. 有理数集不能与数轴上的点形成一一对应.

实数集与有理数集在完备性上的差异还可以用实数的大小关系来描述. 这种观点在微积分学习中尤为重要. 为了阐明这种观点，我们先介绍两个概念：数集的上界与上确界.

设 E 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集，M 是一实数（常数）. 若 M 不小于 E 中的任何元素，则称 M 为数集 E 的一个上界.

当然，若 M 为数集 E 的一个上界，那么任何比 M 大的实数皆是数集 E 的一

个上界. 另一方面,并不是任何数集都有上界,例如 $\mathbb{R}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{N}$ 都是无上界的.

设 E 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集,M 是一实数(常数),若 M 为数集 E 的一个上界且 M 不大于 E 的任何上界,换句话说,M 是 E 的最小上界,则称 M 为数集 E 的上确界.

既然上确界是最小上界,所以一个集合的上确界(若有的话)是唯一的. 另一方面,由于存在着无上界的集合,当然这些集合是无上确界的.

现在我们要问,是否存在着有上界而无上确界的非空数集?我们直觉地认为答案是否定的. 这就是连续性公理.

连续性公理 非空有上界的实数集必有上确界.

微积分学的基础是极限理论. 而连续性公理是极限论的基石,极限论中的一些重要结论需要由它才能推得.

连续性公理也称为确界原理. 与上界和上确界相对应,还可以定义数集的下界与数集的下确界. 应当指出,利用上确界的连续性公理可以推出"非空有下界的数集必有下确界".

例如,$A_1=\{2,3,5,7\}$ 表示了不超过 10 的素数,它既有上界也有下界,而且也有上确界 7 和下确界 2. 但是对于无穷集合,情况就要复杂得多. 例如,如果用 A_2 表示所有的素数的集合,欧几里得在二千三百年前就已经证明了素数是无穷多的,所以它无上界,肯定也没有上确界,换句话说,就是没有最大的素数,但 2 是最小的素数. 求得一个较大的素数一直对人类智慧与计算能力提出挑战,当然现在对计算机的能力也提出挑战. 新华社在 2005 年 6 月 1 日报道了美国一位数学爱好者发现了已知的最大素数. 这个素数共有 7 百万位,可写成 2 的 24 036 583 次方减 1. 这是人类发现的第 41 个梅森素数(称形如 2^n-1 的素数为梅森素数). 又如,集合 $B=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$ 既有上界又有下界,它的上确界是 1,下确界为 0,但 0 不在集合 B 中.

1.1.2 区间与邻域

区间是用得较多的一类特殊数集. 区间分为有限区间与无限区间.

设 $a,b\in\mathbb{R}$,且 $a<b$,下面给出四种形式的有限区间:

(1) 开区间(a,b),即数集

$$\{x\mid a<x<b\}.$$

(2) 闭区间$[a,b]$,即数集

$$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

(3) 半开闭区间,包含$[a,b)$与$(a,b]$,分别对应数集

$$\{x \mid a \leqslant x < b\},\{x \mid a < x \leqslant b\}.$$

以上 a 和 b 都是实数,称 a 为区间的左端点,b 为区间的右端点,$b-a$ 为区间的长度. 这些区间在数轴上对应一段线段,如图 1.1.4 所示.

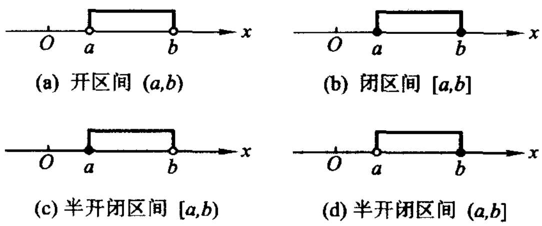


图 1.1.4 以 a,b 为端点的有限区间

无限区间有如下三种形式:

(1) 无限开区间 $(-\infty,a)$ 与 $(a,+\infty)$,分别对应数集

$$\{x \mid x < a\},\{x \mid x > a\}.$$

这里,记号 $-\infty$ 与 $+\infty$ 分别读作"负无穷大"与"正无穷大".

(2) 无限闭区间 $(-\infty,a]$ 与 $[a,+\infty)$,分别对应数集

$$\{x \mid x \leqslant a\},\{x \mid x \geqslant a\}.$$

(3) 全体实数的集合 $\mathbb{R}$ 也可记做区间 $(-\infty,+\infty)$,它在几何上对应整个实数轴.

无限开区间与无限闭区间在数轴上如图 1.1.5 所示.

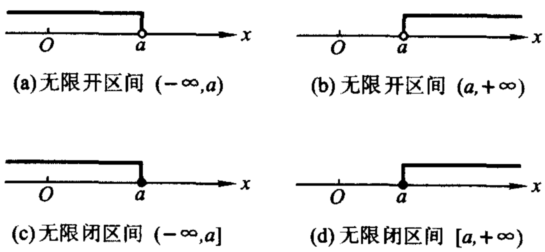


图 1.1.5 无限区间

邻域也是一个常用的数学概念. 我们给出它的正式定义.

定义 1.1.4 设 δ 是某一个正数,则称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的一个 δ 邻域,其中点 a 称为该邻域的中心,δ 称为半径. 记作 $U(a,\delta)$.

点 a 的一个 δ 邻域也可以表示为数集

$$\{x \mid |x-a| < \delta\}.$$

如图 1.1.6 所示.

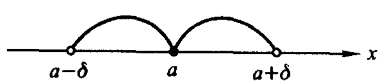


图 1.1.6 点 a 的 δ 邻域

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的一个 δ 邻域去掉中心 a 后,称为

点 a 的去心 δ 邻域，记作 $U_0(a,\delta)$，它用数集表示为

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

也可以表示为点 a 附近左、右两个区间 $(a-\delta,a)$ 与 $(a,a+\delta)$ 的并集. 称区间 $(a-\delta,a)$ 为点 a 的一个左 δ 邻域，称区间 $(a,a+\delta)$ 为点 a 的一个右 δ 邻域.

为了方便后面的应用，称数集

$$\{x \mid x<-M \text{ 或 } x>M\}\ (M>0)$$

为无穷邻域，它也是两无穷区间 $(-\infty,-M)$ 与 $(M,+\infty)$ 的并集：$(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)$. 对应的这两个无穷区间 $(-\infty,-M)$ 与 $(M,+\infty)$ 分别称为左无穷邻域与右无穷邻域，用数集分别表示为

$$\{x \mid x<-M\} \text{ 与 } \{x \mid x>M\}.$$

1.1.3 三角不等式与平均值不等式

下面我们列举几个初等但非常有用的不等式.

(1) 绝对值的三角不等式：设 a 和 b 都是实数，则

$$||a|-|b||\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

右端等号成立当且仅当 a,b 同号，左端等号成立当且仅当 a,b 异号.

(2) 算术－几何平均值不等式：设 a 和 b 都是非负实数，则

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}.$$

等号成立当且仅当 a,b 相等.

上述两个不等式都可以推广到有限多个数的情况. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为实数，那么有

(3) $|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$，等号成立当且仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 同号.

(4) $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都为非负实数. 等号成立当且仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都相等.

1.1.4 映射

1. 映射的基本概念

映射是现代数学的基本概念，它反映了事物之间“一对一”或“多对一”的依赖关系. 例如，我们全班同学每个人都对应一个性别，而且每个人也对应一个学