21世纪大学数学精品教材

丛书主编 蔡光兴 戴明强

"十一五"规划教材

数学物理方程与特殊函数

方 瑛 徐忠昌 主编

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

《21 世纪大学数学精品教材》为大学本科（本科 1 普通类和本科 2 一类）数学系列教材，体现了对数学精品的归纳及本套教材的精品特征，具有鲜明的特点，按照统一的指导思想组编而成.

全书共分三篇：基础篇包括偏微分方程的基础知识以及分离变量法、行波法、积分变换法、格林函数法、贝塞尔函数和勒让德多项式，各章末均配有小结、重要概念英文词汇及中英文习题；仿真篇包括数学物理方程以及特殊函数的计算机仿真求解简介；应用篇主要介绍数学物理方程在生物、医学、电子、物理等实际问题中的应用举例. 书末附有傅里叶变换简表和拉普拉斯变换简表.

本书可作为普通高等院校工科各专业数学物理课程的教材，也可供非数学专业硕士研究生选用.

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方程与特殊函数/方瑛，徐忠昌主编.—北京：科学出版社，2007

21 世纪大学数学精品教材．"十一五"规划教材

ISBN 978-7-03-019721-4

I.数… II.①方…②徐… III.①数学物理方程－高等学校－教材②特殊函数－高等学校－教材 IV.O175.24 O174.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 129390 号

责任编辑：王雨舸／责任校对：王望容

责任印制：高 嵘／封面设计：宝 典

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 8 月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2007 年 8 月第一次印刷 印张：14 1/4

印数：1—6 000 字数：263 000

定价：21.00 元

《21 世纪大学数学精品教材》丛书序

《21 世纪大学数学精品教材》为大学本科（本科 1 普通类和本科 2 一类）数学系列教材，体现了对数学精品教材的归纳及本套教材的精品特征.

一、组编机构

丛书设组编委员会，编委由 12 所高校数学院系的负责人构成(按姓氏笔画)：

王公宝　方承胜　江世宏　李逢高　杨鹏飞　时　宝　何　穗　张志军

欧贵兵　罗从文　周　勇　高明成　殷志祥　黄朝炎　蔡光兴　戴明强

丛书主编：

蔡光兴　戴明强

二、编写特点

1. 适用性

教材的适用性是教材的生命力所在，每本教材的篇幅结合绝大部分高等院校数学院系对课程学时数的要求. 部分教材配有教学光盘，便于教学.

2. 先进性

把握教改、课改动态和学科发展前沿，反映学科、课程的先进理念、知识和方法.

3. 创新性

市场需求和市场变化决定教材创新需要，数学教学在知识创新、思维创新等方面负有责任，一定程度的创新使教材更具冲击力和影响力.

创新与继承相结合，是继承基础上的创新.

创新转变为参编者、授课者的思想和行为，达到文化融合.

4. 应用性

丛书的读者对象为应用型和研究应用型大学本科（本科 1 普通类和本科 2 一类）学生，应用性是数学学科和数学教学发展的新特点，或展现在教材内容结构上，或体现于某些章节，或贯穿于其中.

5. 教学实践性和系统性

教材具有可操作性，教师好教，学生好学，同时保持知识完整. 二者发生矛盾时，前者优先，不过分追求体系完整.

三、指导思想

《21世纪大学数学精品教材》大致可划分为两大类：基础知识类；方法与应用类.

1. 基础知识类

(1) 遵循高等院校教学指导委员会关于课程的教学基本要求，知识体系相对完整，结构严谨，内容精炼，循序渐进，推理简明，通俗易懂.

(2) 融入现代数学思想(如数学建模)，分别将 Mathematica、Matlab、SAS、SPS 等软件的计算方法，恰当地融入课程教学内容中，培养学生运用数学软件的能力.

(3) 强化学生的实验训练和动手能力，可将实验训练作为模块，列入附录，供教学选用或学生自学自练，使用者取舍也方便.

(4) 教材章后均列出重要概念的英文词汇，布置若干道英文习题，要求学生用英文求解，以适应教育面向世界的需要，也为双语教学打下基础.

(5) 为使学生巩固知识和提高应用能力，章末列出习题，形式多样. 书后配测试题，书末提供解题思路或参考答案.

2. 方法与应用类

(1) 融入现代数学思想和方法(如数学建模思想)，体现现代数学创新思维，着力培养学生运用现代数学工具(软件)的能力，使教材真正成为基于现代数学软件的、将数学软件融合到教材与教学内容的现代精品教材.

(2) 加强教学知识与内容的应用性，注重数学思想和方法的操作与应用及其实用性. 通过实例、训练、实验等各种方式，提高学生对数学知识、数学方法的应用能力及解决问题的能力.

(3) 强化学生的实验训练，通过完整的程序与实例介绍，教会学生分析问题、动手编程、分析结果，提高学生的实验操作水平、实际动手能力和创新能力.

(4) 教材章后均列出重要概念的英文词汇，布置若干道英文习题，要求学生用英文求解，以适应教育面向世界的需要，也为双语教学打下基础.

(5) 为使学生巩固知识和提高应用能力，章末列出习题，形式多样. 书后配测试题，书末提供解题思路或参考答案.

《21世纪大学数学精品教材》组编委员会

2006年9月

前　言

由于在自然界以及社会生产实践中，许多实际问题的数学模型往往可以表示为偏微分方程，而数学物理方程与特殊函数作为微积分、常微分方程等课程的继续，着重介绍偏微分方程的有关知识，是研究物理问题常用的数学工具，所以更是学习理论物理学和电子信息等理工科专业本科生及部分非数学专业硕士研究生必修的重要基础课程. 从这个角度看，数学物理方程这门课程准确地印证了美国数学家怀特黑德(Whitehead,1861～1947)曾经说过的一段话"只有将数学应用于社会科学的研究之后，才能使得文明社会的发展成为可控制的现实".

随着社会对于复合型、应用型人才需求量的加大，高等教育改革不断深入，为了在有限的教学课时内对学生应用数学工具解决实际问题的能力进行初步的训练，使学生能学数学、用数学，我们希望有一本既符合传统理工科专业教学基本要求同时还能满足新形式下教学实际需要的教材，将数学建模的思想融入主干课程的教学，便于教学又适当高于教学，培养学生的运用能力和创新能力，这就是我们编写本书的初衷.

为了给初学者提供一个深入浅出，学以致用的入门书，全书共分为三篇，各篇章编写特色及教学使用要求如下：

基础篇：基础篇为第 1 章～第 7 章，由数学物理方程和特殊函数两部分构成，主要内容包括偏微分方程的基础知识以及分离变量法、行波法、积分变换法、格林函数法、贝塞尔函数和勒让德多项式. 该篇各章编写力求内容精炼，推理简明，具有相对的独立性，便于取舍，方便教学. 各章末均配有小结、重要概念英文词汇及中英文习题，有利于帮助初学者梳理数学思想的来龙去脉，展现不同方法的横向对比，总结典型题目的解题步骤以求举一反三，触类旁通. 基础篇是数学物理方程课程经典的理论体系，因此也是教学的重点.

仿真篇：仿真篇为第 8 章和第 9 章，主要内容包括数学物理方程以及特殊函数的计算机仿真求解简介. 该篇介绍的计算机仿真方法以 Matlab 语言为主，需要学生具备一定的相关知识，利用数学工具软件来实现对数学物理方程和特殊函数的仿真求解. 仿真篇可作为选学内容，配合基础篇的知识由教师指导学生进行实验训练，也可作为具有一定基础的学生的自学内容.

应用篇：应用篇为第 10 章，主要内容为介绍数学物理方程在生物、医学、电子、物理等实际问题中的应用举例. 该篇也可作为选学内容，在教学过程中，教师可指导学生对应基础篇和应用篇相关内容阅读参考，将现代数学思想方法与经典的理

论相结合.该篇同样也可作为学生的自学内容.

本书可作为普通高等院校工科各专业数学物理方程课程的教材,也可供非数学专业硕士研究生教学选用.

本书由方瑛、徐忠昌主编,严斌辉、王志华任副主编,参加本书编写工作人员有:湖北工业大学方瑛(第 1 章、第 10 章)、黄毅(第 2 章)、田德生(第 3 章)、耿亮(第 8 章)、王志华(第 4 章、第 10 章);海军工程大学熊萍(第 4 章)、徐忠昌(第 5 章、第 10 章)、瞿勇(第 9 章);空军雷达学院严斌辉(第 6 章、第 7 章).

由于编者水平所限,同时时间较为仓促,书中难免有不妥之处,恳请广大读者指正并提出宝贵建议.

编　者

2007 年 7 月 6 日

目　录

基础篇

仿真篇

应用篇

基　础　篇

第1章 概　　论

在自然科学或生产实践中存在着许多物理问题，为了描述并解决这些问题，往往需要根据相关的物理定律建立相应的数学模型 —— 数学物理方程，当物理过程和状态只由一个因素所决定时，其数学模型往往是常微分方程；而当物理过程是由多个因素决定时，则其数学模型往往会涉及偏微分方程.

本章将介绍偏微分方程的基本概念，导出三类典型的数学物理方程及其定解条件，并对方程的分类进行讨论.

§1.1 偏微分方程的基本概念

1.1.1 偏微分方程简介

所谓偏微分方程就是含有未知函数偏导数的等式. 一般情况下，一个偏微分方程可以写成如下形式：

$$f(x,y,\cdots,u,u_x,u_y,\cdots,u_{xx},u_{yy},u_{xy},\cdots)=0, \tag{1.1}$$

其中 u 是自变量为 $x,y,\cdots$ 的未知函数，$u_x,u_y,\cdots,u_{xx},u_{yy},u_{xy},\cdots$ 则是未知函数 u 的各阶偏导数，f 是已知函数. 例如

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \quad \text{(波动方程)}, \tag{1.2}$$

$$u_t=a^2u_{xx} \quad \text{(热传导方程)}, \tag{1.3}$$

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \quad \text{(拉普拉斯方程)}, \tag{1.4}$$

$$yu_{xx}+u_{yy}=0 \quad \text{(特里特米方程)}, \tag{1.5}$$

$$u_t+uu_x=0 \quad \text{(冲击波方程)}, \tag{1.6}$$

$$u_{xt}=\sin u \quad \text{(正弦戈登方程)}, \tag{1.7}$$

$$u_t+\sigma uu_x+u_{xxx}=0 \quad \text{(KdV 方程)} \tag{1.8}$$

等都是偏微分方程，其中 a 及 σ 为常数.

偏微分方程中所含未知函数偏导数的最高阶数称为此方程的阶. 如果方程(1.1) 中 f 是关于 u 及 u 的各偏导数的线性函数，则称此方程为线性的，否则方程即为非线性的. 例如，方程(1.2)、(1.3)、(1.4)、(1.5) 均为二阶线性方程，方程(1.6)、(1.7)、(1.8) 依次分别为一阶、二阶、三阶的非线性方程.

线性偏微分方程可分为常系数和变系数两大类，常系数线性偏微分方程中未知函数及其偏导数的系数均为常数，而变系数线性偏微分方程中未知函数及其偏导数的系数不完全是常数. 例如，方程(1.2)、(1.3)、(1.4) 是常系数的线性方程，

而方程(1.5)则是变系数的线性方程.

若在某区域内一函数及其各连续的偏导数满足某微分方程,则称此函数是该方程在这个区域内的一个解(古典解).

例 1.1　求函数 $u = u(x,y)$,使 $u_x = y$.

解　由 $u_x = y$ 两边对 x 积分,得

$$u = xy + f(y),$$

这里 f 是任意函数,$u = xy + f(y)$ 为方程的通解.

例 1.2　函数 $u = u(x,y)$,求 $u_{xy} = 2$ 的通解.

解　将方程 $u_{xy} = 2$ 对 y 积分,得

$$u_x = 2y + f(x),$$

这里 $f(x)$ 是 x 的任意函数. 再对 x 积分,得

$$u = 2xy + \int f(x)\mathrm{d}x + g(y).$$

设 $h(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$,所以 $u = 2xy + h(x) + g(y)$ 是所求通解,这里 h 和 g 均是任意函数.

从以上两例可以看到,通解中包含有任意函数且任意函数的个数与方程的阶数相同.

1.1.2　定解条件和定解问题

对于一般的偏微分方程而言,即使是线性方程,求通解也是十分困难的. 事实上在实际应用中,往往并不需要求出一个偏微分方程的通解,而是要求方程满足某些特定条件的特解,因此一个偏微方程又称为泛定方程,它反映的往往是一类物理过程的规律. 要确定一个具体的物理过程,还要了解这个过程发生的具体条件,即初始状态及边界所受的外界作用,也即初始条件和边界条件,这类条件称为定解条件. 泛定方程加上定解条件就构成了一个定解问题.

在定解问题中,只有初始条件没有边界条件的定解问题称为初值问题或柯西(Cauchy)问题;只有边界条件没有初始条件的定解问题称为边值问题;既有初始条件又有边界条件的定解问题称为混合问题(或称为边值混合问题).

初始条件一般用于描述一个随时间发展而变化的系统或过程初始时刻的状况,对于不含时间变量的方程,通常不能附加初始条件而只附加边界条件,用来描述一个系统或过程边界的状况. 边界条件有三类:

第一类边界条件　给出未知函数 u 在边界 Γ 上的值,即

$$u\big|_{\Gamma} = f_1. \tag{1.9}$$

第二类边界条件　给出未知函数 u 沿边界 Γ 的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数,即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = f_2. \tag{1.10}$$

第三类边界条件 给出未知函数 u 及其沿边界 Γ 的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数的线性组合在边界上的值，即

$$\left.\left(\sigma u + \frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\Gamma} = f_3. \tag{1.11}$$

在式(1.9)、(1.10)、(1.11) 中，等号右端的 f_1，f_2 及 f_3 都是定义在边界 Γ 上的已知函数，当 $f_i \equiv 0\ (i = 1,2,3)$ 时，称相应的边界条件是齐次的，否则称为是非齐次的.

1.1.3 定解问题的适定性

在实际问题中，由于自然界本身就给出了问题唯一的答案，所以一个定解问题提得是否符合实际情况，从数学角度来看，可以从三个方面加以检验：解的存在性、解的唯一性、解的稳定性(即当定解条件有微小变动时，解相应地只有微小的变动). 一个定解问题的解如果满足存在性、唯一性和稳定性，则称此定解问题是适定的. 定解问题的适定性是计算机利用数值方法求解偏微分方程的前提和保证.

但是由实际问题导出的数学物理方程，总要经过一些简化、近似的过程以及一些附加的假设，所以如果得到的定解条件过多或相互矛盾，那么定解问题的解就可能不存在；而如果定解条件不足，则相应的解就可能不唯一，因而不能准确地描述一个确定的物理过程；又由于定解条件通常是由实验方法获取的，因而难免有误差，如果定解条件微小的误差会导致解的较大变化，那么这种解显然不能符合客观实际的要求. 由此可见，讨论定解问题的适定性往往很困难，所以我们的重点是在定解问题的解法上.

本书所讨论的定解问题都是经典的，其适定性都已经过证明.

1.1.4 叠加原理

下面以二阶线性微分方程为例，简单介绍线性偏微分方程的叠加原理.

设二阶线性微分方程为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f. \tag{1.12}$$

定义

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

为微分算子，L 作用于一个具有二阶连续偏导数的函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，记为 Lu. 故方程(1.12) 可简记为

$$Lu = f.$$

当等号右端 $f \equiv 0$ 时,方程 $Lu = 0$ 为二阶齐次线性方程,否则方程(1.12)为二阶非齐次线性方程,此时 f 称为方程的非齐次项.

对方程(1.12)有叠加原理如下:

定理 1.1 若函数 u_i 满足线性方程(1.12),即 $Lu_i = f_i\ (i = 1,2,\cdots,m)$,则线性组合

$$u = \sum_{i=1}^{m} c_i u_i$$

满足方程

$$Lu = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i,$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 为任意常数.

定理 1.2 若函数 u_i 满足线性方程(1.12),即 $Lu_i = f_i\ (i = 1,2,\cdots)$,级数 $\sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$ 收敛,记 $u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$,且微分算子与求和可交换运算次序,则 u 满足

$$Lu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i,$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 为任意常数.

这里不进行证明,请读者尝试自己推导.

以上叠加原理在线性边界条件中也成立,这里不再进行论述.

自然界中许多物理现象都可以看成是由若干不同因素共同作用的结果,因此也是多因素单独作用的总和,这种叠加的特性在对应的定解问题中,可以将给定方程和定解条件中等号右端的非齐次项 f_i 视为附加的外源因素.当定解问题是线性的时,许多外源因素共同作用的结果就等于多个外源因素独立作用结果的叠加,这种特性是线性问题所特有的.

§1.2 数学模型的建立

本节将通过几个不同的物理模型推导出数学物理方程中三种典型的方程.

1.2.1 波动问题

在波动问题中,振动现象是最有代表性的.振动现象是一个十分复杂的物理过程,在建立数学模型描述这个过程时,必须去掉一些次要因素,进行一些理想化的假设和近似.

考察一根均匀柔软的细弦拉紧后让它在平衡位置附近产生振幅极小的横振