

# 代数与几何

下 册

上海人民出版社

## 内 容 提 要

本书是上海师范大学数学系为工农兵学员编写的教材，试图在体系上进行改革。

全书共十章。上册五章：实数和点，三角函数，二元一次方程和直线，三元一次方程和平面，二次方程、二次曲线和二次曲面。下册五章：几种常用曲线，基本函数，概率初步，复数，变换。

本书可供理工科大学工农兵学员、中学数学教师参考。

## 代 数 与 几 何

下 册

上海师范大学数学系编

上海人民出版社出版

(上海绍兴路5号)

新华书店上海发行所发行 上海中华印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 7.75 字数 183,000

1974年7月第1版 1974年7月第1次印刷

印数 1—9,000

统一书号：13171·88 定价：0.60 元

内 部 发 行

# 目 录

第六章 几种常用曲线 .....	1
第一节 极坐标 .....	1
一、极坐标的概念(1) 二、极坐标和直角坐标的关系(4)	
三、曲线的极坐标方程(5)	
第二节 螺线 .....	15
一、等速螺线(15) 二、等加速螺线(20) 三、螺旋线(23)	
第三节 渐开线 .....	27
一、渐开线的概念和画法(23) 二、渐开线的参数方程(29)	
三、渐开线函数和它的应用(30)	
第四节 摆线 .....	31
一、摆线的参数方程(31) 二、内(外)摆线的参数方程(33)	
第五节 地球上的经纬线 .....	39
一、球面上点的位置的确定(40) 二、球面上两点间的距离的计算(42)	
第七章 基本函数 .....	46
第一节 幂函数 .....	46
一、幂函数的概念(46) 二、幂函数的图象和性质(47)	
第二节 指数函数 .....	49
一、指数函数的概念(49) 二、指数函数的图象和性质(50)	
第三节 对数函数 .....	55
一、对数(55) 二、反函数的概念(57) 三、对数函数(58)	
四、函数和它的反函数的图象间的关系(59) 五、对数函数的图象和性质(60)	
第四节 对数的应用 .....	64
一、对数的运算法则(64) 二、常用对数的概念和性质(65)	
三、常用对数表与反对数表(67) 四、利用对数进行计算(68)	
五、对数的换底(72) 六、幂函数型及指数函数型的经验公式(73)	
第五节 对数计算尺 .....	79
一、对数计算尺的构造和原理(79) 二、利用 $C$ 尺和 $D$ 尺计算	

乘、除(82) 三、 $A$ 尺、 $B$ 尺的刻度及其用法(90) 四、 $K$ 尺的 刻度及其用法(94)	
第六节 三角函数的图象和性质 .....	96
一、三角函数的周期性(96) 二、基本三角函数的图象和性 质(98) 三、一般正弦函数 $y=A \sin(\omega x+\varphi)$ 的图象(103)	
第七节 反三角函数 .....	111
一、反三角函数的概念和它的多值性(111) 二、反正弦函数的概 念、图象和性质(112) 三、反余弦函数的概念、图象和性质(115) 四、反正切函数、反余切函数的概念、图象和性质(117)	
第八章 概率初步 .....	123
第一节 排列、组合 .....	124
一、排列(124) 二、组合(127)	
第二节 数学归纳法、二项式定理 .....	129
第三节 概率的意义及其计算 .....	134
第四节 复杂事件的概率 .....	138
一、事件和(139) 二、事件积(140) 三、对立事件(141)	
第五节 离散型随机变量与二项分布 .....	145
第九章 复数 .....	154
第一节 复数的概念 .....	154
一、向量与复数(154) 二、复数的表示法(156)	
第二节 复数的运算 .....	160
一、复数的加法(160) 二、复数的减法(161) 三、复数的乘 法(163) 四、复数的除法(166) 五、复数的乘方(169) 六、复 数的开方(170)	
第三节 复数的简单应用 .....	175
一、复数在交流电路计算中的应用(175) 二、复数在几何上的应 用(179) 三、复数在代数上的应用(186)	
第十章 变换 .....	194
第一节 集合、映射和变换 .....	194
一、集合(194) 二、映射(195) 三、变换(196) 四、变换 群(197)	
第二节 仿射变换 .....	203
一、透视仿射变换(203) 二、仿射变换的概念(205) 三、仿射 坐标系和仿射变换式(207) 四、仿射变换的应用举例(209) 五、仿射变换的特例(215) 六、仿射变换群与仿射几何学(222)	

第三节 射影变换.....	223
一、中心投影(223) 二、射影变换(227) 三、射影变换在航空摄影测量中的应用(228) 四、射影坐标系与射影变换式(229) 五、射影变换群与射影几何(232)	
第四节 拓扑变换.....	233
一、拓扑变换的直观解释(233) 二、凸多面体欧拉公式的证明和应用(235)	

## 第六章 几种常用曲线

前面我们学习了直线,以及圆、椭圆、双曲线、抛物线等几种简单而重要的曲线;在直角坐标系中,建立了它们的方程,并研究了它们的几何性质和应用。但是,作为物体的形状或物体运动形式出现的曲线是多种多样的。本章将进一步学习在三大革命运动中常用的另外几种曲线。

### 第一节 极 坐 标

我们将通过一些具体的事例,引进在平面上以数定点,以方程表示曲线的另一种常用的坐标法——极坐标法。“对于具体情况作具体的分析”,以后我们将根据客观实际的需要和简单方便的原则,选择适当的坐标系,建立曲线的方程,并研究它们的性质和应用。

#### 一、极坐标的概念

在三大革命实践中,我们经常看到用方向和距离描写物体位置的事例,这就是极坐标法的基本思想。

例如,炮兵指挥所向炮兵指示射击敌方目标时,既要指示目标的方位,又要说明与目标的距离。

又如,工人师傅操作摇臂钻床(图 6-1)时,把工件固定后,接着就将摇臂旋转一个角度,并移动钻轴箱使钻头对准所要钻的孔。这里摇臂的旋转角,以及钻头轴线与立柱轴线之间的距离,就起着确定钻头位置的作用,如图 6-2。

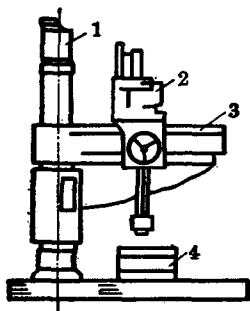


图 6-1

1—立柱 2—钻轴箱 3—摇臂 4—工件

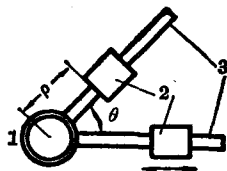


图 6-2

1—立柱 2—钻轴箱 3—摇臂

上面两个例子的共同性质，都是利用距离和角度来确定平面上点的位置。这种利用长度和角度来确定平面上点的位置的方法，就是极坐标法。

在平面上取定一点  $O$ ，叫做极点(图 6-3)。从  $O$  引一条射线

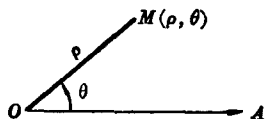


图 6-3

$OA$ ，叫做极轴，再确定一个长度单位和计算角度的正方向(通常取逆时针方向)。这样就建立了一个极坐标系。

设平面上任意一点  $M$ ，连接线段  $OM$ 。极点  $O$  到点  $M$  的距离  $|OM|$  叫做点  $M$  的极径，通常用  $\rho$  来表示；以极轴  $OA$  为始边，射线  $OM$  为终边所成的角  $AOM$ ，叫做点  $M$  的极角，通常用  $\theta$  来表示。 $(\rho, \theta)$  叫做点  $M$  的极坐标。

如图 6-4 中， $B, C, D, E, F, G$  各点的极坐标分别是：

$B\left(5, \frac{4\pi}{3}\right), C\left(3, -\frac{\pi}{4}\right), D\left(4, \frac{3\pi}{4}\right), E(5, \pi), F\left(5, -\frac{\pi}{12}\right), G\left(6, \frac{\pi}{3}\right)$ 。

图 6-5 是标以极坐标的工件。图中  $B, C, D, E, F$  各点的极坐标分别是： $B(150, 0^\circ), C(110, 32^\circ), D(100, 95^\circ), E(100, 135^\circ), F(150, -58^\circ)$ 。





点, 都有它的极坐标 $(\rho, \theta)$ .

极坐标和直角坐标不同, 平面内一点的极坐标不是唯一的, 而是有无数多种表示法. 例如图 6-7 中, 当点  $M_1$  的极坐标是  $(6, \frac{\pi}{3})$  时, 那么  $(6, \frac{\pi}{3} + 2\pi)$  与  $(-6, \frac{\pi}{3} + \pi)$  也表示同一点  $M_1$ . 一般地说, 如果  $(\rho, \theta)$  是点  $M$  的极坐标, 那么  $(\rho, \theta + 2n\pi)$  与  $(-\rho, \theta + (2n+1)\pi)$  都表示同一点  $M$  的极坐标 ( $n$  是整数). 通常我们把点  $M$  的极坐标表示成最简单的形式  $(\rho, \theta)$ , 这里  $\rho \geq 0$ ,  $-\pi < \theta \leq \pi$ .

因此, 我们看到, 在极坐标系中, 点和数对之间不再保持一一对应的关系了.

## 二、极坐标和直角坐标的关系

“一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的”. 极坐标和直角坐标是两种不同的坐标系, 但是它们都利用一对数来确定平面内一点的位置. 因此, 同一点的极坐标和直角坐标之间必然存在着一定的联系, 它们是可以转化的. 有时为了研究问题的

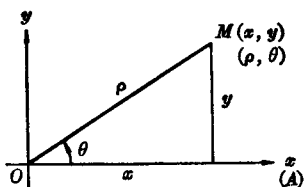


图 6-8

方便和生产实际的需要, 就得进行这两种坐标的互换. 现在, 我们来建立它们之间的关系式.

如图 6-8, 我们使极点和原点重合, 极轴和  $x$  轴的正半轴重合, 两者的长度单位相同.

设平面内一点  $M$  的直角坐标是  $(x, y)$ , 它的极坐标是  $(\rho, \theta)$ , 那么它们之间有下列的关系:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2, \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad (\text{如果点 } M \text{ 不在 } y \text{ 轴上}). \end{cases} \quad (2)$$

[例 1] 求直角坐标为  $(-2, 2)$  的点  $M$  的极坐标.

解: 由公式 (2), 得

$$\rho = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2};$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2}{-2} = -1,$$

所以

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \text{ 或 } -\frac{\pi}{4}.$$

因为点  $M(-2, 2)$  在第 II 象限, 所以  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ , 点  $M$  的极坐标是  $(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$ .

注意: 在应用公式 (2) 求极角  $\theta$  时, 必须根据点  $(x, y)$  所在的象限来确定  $\theta$  的值.

[例 2] 图 6-9 所示的工件, 需要在坐标镗床上镗孔, 图纸上标出点  $A$  的极坐标  $(110, 40^\circ)$ , 只要算出点  $A$  的直角坐标, 就不必将点  $O$  定位在旋转台中心镗孔. 我们来求点  $A$  的直角坐标.

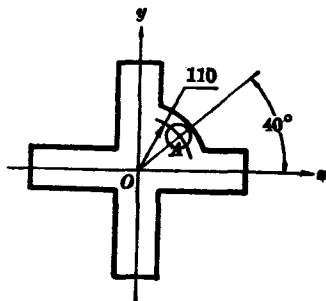


图 6-9

解: 设点  $A$  的直角坐标是  $(x, y)$ . 由公式 (1) 得

$$x = \rho \cos \theta = 110 \cos 40^\circ \approx 110 \times 0.7660 = 84.26,$$

$$y = \rho \sin \theta = 110 \sin 40^\circ \approx 110 \times 0.6428 \approx 70.71.$$

所以点  $A$  的直角坐标近似地是  $(84.26, 70.71)$ .

### 三、曲线的极坐标方程

我们知道, 在直角坐标系中, 平面上的曲线可以用含有变数  $x$

和  $y$  的方程来表示. 在极坐标系中, 一条曲线也可以用含有  $\rho, \theta$  这两个变数的方程来表示; 这个方程叫做这条曲线的极坐标方程. 反过来, 含有  $\rho, \theta$  两个变数的方程, 表示平面上极坐标适合于这个方程的点的轨迹; 这个轨迹叫做这个极坐标方程的曲线.

对比直角坐标系, 在极坐标系里, 关于曲线和方程, 同样存在着两个基本问题, 这就是:

- (a) 已知曲线, 求它的方程;
- (b) 已知方程, 画出它的曲线.

[例 3] 设一圆通过极点  $O$ , 圆心在极轴上, 半径为  $\frac{a}{2}$ , 求这个圆的极坐标方程.

解: 如图 6-10,  $OB$  是圆的直径, 它的长等于  $a$ . 设  $M(\rho, \theta)$  是圆周上任意一点. 在直角三角形  $OMB$  中,  $OM = OB \cos \theta$ , 即

$$\rho = a \cos \theta.$$

这就是所求圆的极坐标方程.

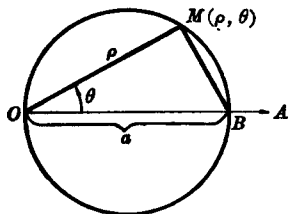


图 6-10

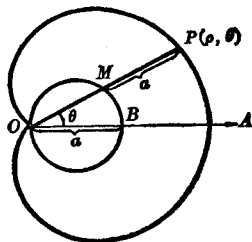


图 6-11

[例 4] 机器上的凸轮外壳, 有的采用心脏线的一部分. 如图 6-11 所示,  $OM$  是通过极点  $O$  并以  $OB = a$  为直径的圆的弦. 延长  $OM$  到  $P$ , 使  $MP = a$ . 当点  $M$  在圆周上移动时, 点  $P$  的轨迹就是心脏线. 求它的方程并画出图形.

解: 设点  $P$  的坐标为  $(\rho, \theta)$ , 那么

$$\rho = OP = OM + MP = a \cos \theta + a.$$

所以

$$\rho = a(1 + \cos \theta).$$

这就是所求轨迹的极坐标方程。

下面我们来画出它的图形。

以 $(\rho, -\theta)$ 代 $(\rho, \theta)$ ，原方程不变，所以曲线关于极轴是对称的。这样，我们只要画出它的上半平面的图形，利用曲线的对称性，就可以得到整条曲线。

当 $\theta$ 从0变到 $\frac{\pi}{2}$ 时， $\rho$ 从 $2a$ 变到 $a$ ；当 $\theta$ 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 $\pi$ 时， $\rho$ 从 $a$ 变到0。

给 $\theta$ 以一系列的值，求得 $\rho$ 的对应值，列成下表。画出这些点，并以光滑的曲线连接，再利用对称性，就得到如图6-12的心脏线(在描图时，可取定 $a$ 为某一正数，例如 $a=6$ )。

$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\rho$	$2a$	$1.87a$	$1.71a$	$1.5a$	$a$	$0.5a$	$0.29a$	$0.13a$	0

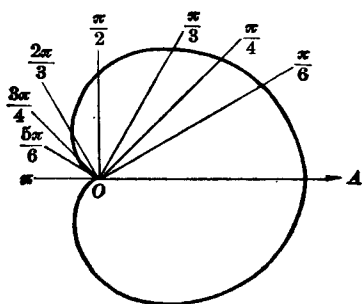
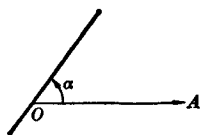
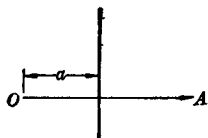


图 6-12

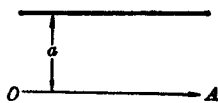
下面是几种比较常见的极坐标方程的图形(图6-13)。



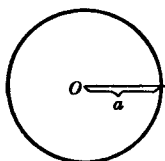
直线  $\theta = \alpha$



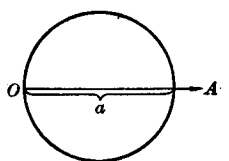
直线  $\rho \cos \theta = a$



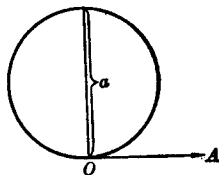
直线  $\rho \sin \theta = a$



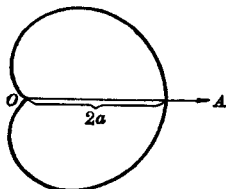
圆  $\rho = a$



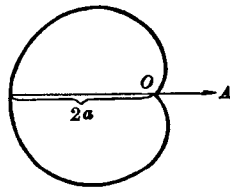
圆  $\rho = a \cos \theta$



圆  $\rho = a \sin \theta$



心脏线  $\rho = a(1 + \cos \theta)$



心脏线  $\rho = a(1 - \cos \theta)$

图 6-13

[例 5] 试把极坐标方程  $\rho = 2 \cos \theta + 2 \sin \theta$  变换成直角坐标方程, 并确定方程所表示的图形.

解: 因为  $(0, -\frac{\pi}{4})$  适合于原方程, 也就是说, 由  $\rho = 0$  确定的极点在曲线上, 因此以  $\rho$  乘方程两边所得的新方程

$$\rho^2 = 2\rho \cos \theta + 2\rho \sin \theta$$

和原方程同解. 它们所表示的图形是一致的.

应用直角坐标和极坐标的互换公式得

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y,$$

即  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2.$

因此原方程所表示的图形, 在直角坐标系中是以  $(1, 1)$  为圆心,  $\sqrt{2}$  为半径的圆. 在极坐标系中是以

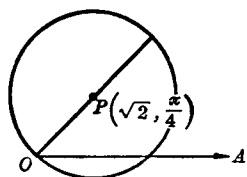


图 6-14

$P(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$  为圆心,  $\sqrt{2}$  为半径的圆(图 6-14).

现在我们来导出圆锥曲线的极坐标方程. 我们知道, 圆锥曲线是: 一个动点到定点  $F$  (焦点) 和定直线  $l$  (准线) 的距离之比是一个常数  $e$  (离心率) 的点的轨迹.

如图 6-15 所示, 设点  $F$  到直线  $l$  的距离  $|FD| = p$ . 以  $F$  为极点,  $DF$  的延长线  $FA$  为极轴, 建立极坐标系.

设动点  $M$  的坐标为  $(\rho, \theta)$ . 作  $MN \perp l$ . 于是动点  $M$  应该满足下列几何条件:

$$\frac{|FM|}{|NM|} = e,$$

这里,

$$|FM| = \rho,$$

$$|NM| = |DF| - |FE| = p - \rho \cos(\pi - \theta) = p + \rho \cos \theta.$$

所以

$$\frac{\rho}{p + \rho \cos \theta} = e,$$

即

$$\rho = \frac{pe}{1 - e \cos \theta}. \quad (1)$$

方程(1)就是圆锥曲线在极坐标系下的统一方程.

利用点的极坐标和直角坐标的关系, 我们可以把方程(1)转换成直角坐标方程.

$$\text{由方程(1)得} \quad \rho - \rho e \cos \theta = ep,$$

即

$$\begin{aligned} \rho &= ex + ep, \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= e(x + p). \end{aligned}$$

两边平方, 并整理后, 得

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2e^2px - e^2p^2 = 0. \quad (2)$$

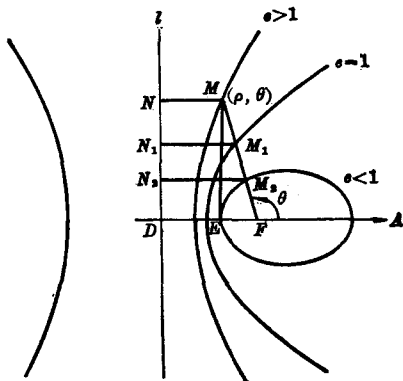


图 6-15

方程(2)就是圆锥曲线在直角坐标系下的统一方程.

当  $e=1$  时, 方程(2)成为

$$y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right),$$

这是抛物线的方程.

当  $e \neq 1$  时, 方程(2)可整理成为

$$\frac{\left(x - \frac{e^2 p}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{ep}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{e^2 p^2}{1-e^2}} = 1. \quad (3)$$

当  $e > 1$  时,  $1-e^2 < 0$ , 所以方程(3)是双曲线的方程.

当  $0 < e < 1$  时,  $1-e^2 > 0$ , 所以方程(3)是椭圆的方程.

由此可知, 方程(1)和(2)确定的轨迹, 当  $0 < e < 1$  时是椭圆; 当  $e=1$  时是抛物线; 当  $e > 1$  时是双曲线.

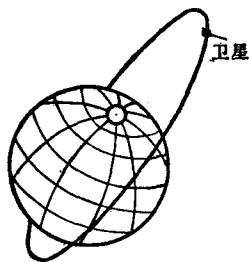


图 6-16

[例 6] 在毛主席的革命路线指引下, 我国在一九七一年三月成功地发射了一颗科学实验人造地球卫星. 它的运行轨道是以地球的中心为焦点的椭圆(图 6-16), 距地球最近点是 266 公里, 最远点是 1826 公里. 求卫星轨道的极坐标方程.

解: 因为地球的半径是 6371 公里, 所以椭圆上离焦点最远的距离是

$$1826 + 6371 = 8197 \text{ 公里,}$$

最近的距离是

$$266 + 6371 = 6637 \text{ 公里.}$$

从圆锥曲线的极坐标方程  $\rho = \frac{pe}{1-e\cos\theta}$  可以看出, 当  $\theta=0$  时, 得最远距离等于

$$\frac{ep}{1-e};$$

当  $\theta = \pi$  时, 得最近距离等于

$$\frac{ep}{1+e}.$$

所以  $e$  和  $p$  满足方程

$$\begin{cases} ep = 8197(1-e), \\ ep = 6637(1+e). \end{cases}$$

解得  $e = \frac{1560}{14834} \approx 0.1052$ , 从而有

$$ep = 8197(1 - 0.1052) = 7335 \text{ 公里.}$$

所以这颗科学实验人造地球卫星的轨迹方程是

$$\rho = \frac{7335}{1 - 0.1052 \cos \theta}.$$

[例 7] 把方程

$$k\rho \cos^2 \theta + 2\rho \sin^2 \theta - 4 \cos \theta = 0 \quad (1)$$

变换为直角坐标方程, 并就  $k$  的值讨论曲线的形状.

解: 因为原方程(1)所确定的曲线通过极点  $(0, \frac{\pi}{2})$ , 所以它和方程

$$k\rho^2 \cos^2 \theta + 2\rho^2 \sin^2 \theta - 4\rho \cos \theta = 0$$

表示的是同样的图形. 以  $\rho \cos \theta = x$ ,  $\rho \sin \theta = y$  代入上式, 得到曲线的直角坐标方程

$$kx^2 + 2y^2 - 4x = 0. \quad (2)$$

如果  $k=0$ , 那么方程(2)就是  $y^2 = 2x$ , 它的图形是抛物线.

如果  $k \neq 0$ , 经过配方和整理, 可把方程(2)改写成

$$\frac{\left(x - \frac{2}{k}\right)^2}{\frac{4}{k^2}} + \frac{y^2}{\frac{2}{k}} = 1.$$

再平移直角坐标系, 使新原点  $O'$  位于点  $(\frac{2}{k}, 0)$ , 方程就具有标准形式:



$$\frac{x'^2}{\frac{4}{k^2}} + \frac{y'^2}{\frac{2}{k}} = 1.$$

从而可知, 当  $k > 0$  时, 轨迹是椭圆; 当  $k < 0$  时, 轨迹是双曲线.

在图 6-17 中, 我们仅就  $k=1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1$  画出相应的圆锥曲线. 这里, 我们看出: 当  $k$  取正值并向 0 变化时, 椭圆的长短轴越来越伸长, 终于变成抛物线; 当  $k$  取负值并向 0 变化时, 双曲线的左支就向左面越去越远, 终于在左半平面消失了, 而右支变成了抛物线.

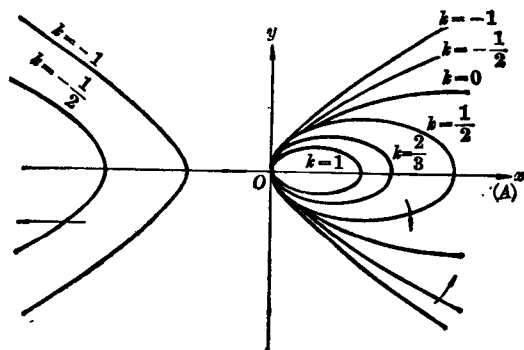
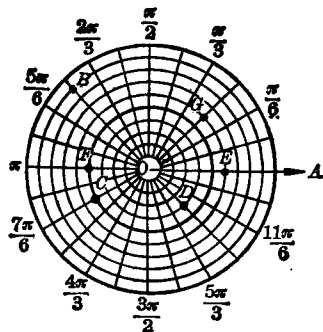


图 6-17

### 习 题

1. 写出图中  $B, C, D, E, F, G$  各点的极坐标 ( $\rho > 0, -\pi < \theta \leq \pi$ ).



(第 1 题)