俄罗斯数学
教材选译

现代几何学：方法与应用 (第三卷)

同调论引论

(第2版)

□ Б. А. 杜布洛文 С. П. 诺维可夫 А. Т. 福明柯 著
□ 胥鸣伟 译

高等教育出版社
Higher Education Press

俄罗斯数学
教材选译

● 数学天元基金资助项目

现代几何学：方法与应用（第三卷）

同调论引论

（第2版）

□ Б. А. 杜布洛文　С. П. 诺维可夫　А. Т. 福明柯　著
□ 胥鸣伟　译

高等教育出版社
Higher Education Press

图字：01－2006－3367 号

Современная геометрия：Том 3. Методы и приложения.
Геометрия поверхностей,групп преобразований и полей.
УРСС，2001.
Originally published in Russian under the title
Modern Geometry—Methods and Applications
Part 3：Introduction to Homology Theory
Copyright © 2001 by Б. А. Дубровин，С. П. Новиков，А. Т. Фоменко
All Rights Reserved

图书在版编目（CIP）数据

现代几何学：方法与应用．第三卷，同调论引论：第2版／（俄罗斯）杜布洛文，（俄罗斯）诺维可夫，（俄罗斯）福明柯著；胥鸣伟译．—北京：高等教育出版社，2007.4
ISBN 978－7－04－021434－5

Ⅰ．现… Ⅱ．①杜…②诺…③福…④胥… Ⅲ．几何学－高等学校－教材 Ⅳ．O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 024542 号

策划编辑 郑轩辕 **责任编辑** 郑轩辕 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 朱 静
版式设计 马静如 **责任校对** 王 超 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2007年4月第1版
印　　张	19.75	**印　　次**	2007年4月第1次印刷
字　　数	370 000	**定　　价**	45.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。
版权所有　侵权必究
物料号　21434－00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有

适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

前　　言

人们在阐述拓扑学的原理时习惯上总把同调论置于最重要的地位. 自庞加莱奠定了拓扑学的基础以来, 同调论就一直被看成是代数拓扑方法的源头. 在这个习惯性的源头中, 只有基本群和覆叠空间来自同伦论. 实际上, 在所有经典的拓扑学方面的书籍中 (依本书的作者们看来, 其中最好的一本是沙爱福和施雷发的《拓扑学》(Seifert and Threlfall,《Topologie》)), 开始讲解的都是各种各样复形的同调理论. 只是在最近阶段才考虑了 (但仍然以同调论的视角) 纤维空间的理论和关于映射的一般性同伦分类问题 (即同伦论). 与此同时, 微分流形的方法从 20 世纪 30 年代便开始了令人感兴趣的发展 (惠特尼 (Whitney) 等人), 它重新建立了对现代拓扑学根基的诠释. 从这个新观点来看, 人们发现, 原来光滑流形的初等理论和基于它的同伦论*) 以及光滑的纤维空间的理论, 在本质上最接近于分析理论. 另外, 在 20 世纪 70 年代期间, 人们已清楚看到了恰恰是拓扑学的思想和方法的这种复杂性, 在现代物理学中的不同领域中有了很重要的应用. 出于这些原因, 作者们认为绝对必要学习的, 处在首位的拓扑内容应是光滑流形的理论、同伦论和纤维空间的理论. 这些内容已包含在杜布洛文, 诺维可夫和福明柯所著《现代几何学》的第 Ⅱ 卷中. 在本卷中我们假定读者们已熟悉了这些内容.

另外, 拓扑学自身的更加复杂问题 (计算同伦群, 光滑流形的分类等等) 的求解, 还有在代数几何和复分析的问题中代数- 拓扑式方法的许多应用, 都要求同调论方法得到范围广泛的发展. 在现代拓扑学的文献中完全缺少那样的书籍, 使人们可以从中吸取到前面所提到的, 在拓扑学范围内应用的同调理论的复杂方法. 现在的这本书把弥补这个缺口当作它的部分目的.

---

*) 显然, 回溯到高斯、黎曼和庞加莱的最初的拓扑思想, 那也是出现在这个基础上的. 但在那时构建这样的拓扑学是不可能的. 庞加莱开启了单纯复形的同调理论, 为代数拓扑的基础提供了不同的精确构造.

在阐述同调论时, 作者们努力尽可能避免使用同调代数中的抽象语言, 以使读者一直记住同调、闭环和边缘是些具体的几何对象. 在某些场合, 譬如与谱序列有关的那一节, 那个自行加上的限制条件产生了某种难以消除的叙述中的缺陷, 但是现代同调代数的语言和方法的系统阐述, 正如经验所表明的, 会引出还要更糟糕的缺陷, 它制造了对同调论的几何意义理解的困难. 在本书中对现代拓扑学的某些基本方法 (谱序列和上同调方法) 虽然得到了叙述但并没有给出其正当性的证明. 要做到这点则要求实质性地扩充本书的容量. 我们应该记住, 这些方法的应用仅仅基于在所考虑对象内的形式代数性质, 而没有利用这些所论证对象自身结构的语言. 在书的结尾部分中, 代数拓扑被应用于研究示性类的整体性质和流形上的光滑结构. 作者力图使所给出的文献能引导读者去检索现代拓扑文献.

在完成本书中编辑 В. М. Бухштабер 做出了很大的贡献. 在他的指导下, 许多地方已完全重写, 同时也改进了许多证明. 作者们感谢他所做的大量工作.

目　　录

第一章
同调和上同调群. 它们的计算方法

§1. 作为闭微分形式类的上同调群. 它们的同伦不变性

同调群是流形的最重要的同伦不变量之一, 我们在本书 (即 [**1**]) 的第 II 卷, §19, §24, §25 中已经使用过它了; 现在我们对它做一个系统的阐述.

对于同调群有好几种定义的方式. 我们首先考虑通过微分形式来作同调群的定义 (参看 [**1**], 卷 II, §25).

我们考察在流形 M^n 上的 k 阶闭微分形式 (回想一下, 这里的指标 n 表示流形的维数), 它的局部形式为

$$\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_k}a_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k},\quad d\omega=0. \tag{1}$$

如果存在另一个 $k-1$ 阶微分形式 ω', 使得 $\omega=d\omega'$, 则称此微分形式 ω 为恰当的 (或者, 上同调于零的) (参看 [**1**], 卷 I, §25, 我们有 $d(d\omega')=0$, 即恰当形式是闭的).

定义 1[1)] **上同调群** (线性空间)$H^k(M^n;\mathbb{R})$ 是指所有 k 阶闭微分形式对于其恰当形式子群的商群. 换句话说, $H^k(M^n;\mathbb{R})$ 是闭形式的等价类, 它在恰当形式的范围内被确定:

$$\omega_1\sim\omega_2\quad \text{表示}\quad \omega_1-\omega_2=d\omega'. \tag{2}$$

上同调群有下面的最简单的性质:

[1)] 在后面我们将遇到具各种系数的同调和上同调群的不同定义. 考虑到这些不同定义导出了相同的结论 (见下面 §§6, 14), 我们故意不引进表示其他各种定义的同调群的记号.

命题 1 对任意流形 M^n, 群 $H^0(M^n,\mathbb{R})$ 为 q 维线性空间, 其中 q 为此流形的连通分支的个数.

证明 零阶形式即是流形上的数值函数 $f(x)$. 如果零阶形式为闭, 则 $df(x) = 0$. 这表明函数 $f(x)$ 是局部常值的, 即在流形的每个连通分支上为常数. 零阶的闭形式不过是由 q 个常数构成的组, q 为分支数. 因为在这种情形下不存在恰当形式, 故命题得证. □

如果存在流形间的光滑映射 $f: M_1 \to M_2$, 则确定了形式间的映射 $\omega \longmapsto f^*(\omega)$, 使得 $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$ ([1], 卷 I, §25). 因此定义了上同调群之间的映射

$$f^*: H^k(M_2;\mathbb{R}) \to H^k(M_1;\mathbb{R}), \tag{3}$$

这是因为等价类由 M_2 上的变到 M_1 上的等价类 (在 f^* 映射下, 闭形式变到闭形式, 恰当形式变到恰当形式). 映射 f^* 是上同调群之间的同态映射.

有下面的定理.

定理 1 如果有两个光滑映射

$$f_1: M_1 \to M_2 \quad 和 \quad f_2: M_1 \to M_2,$$

它们同伦, 则上同调群的映射 f_1^* 和 f_2^* 相等:

$$f_1^* = f_2^*: H^k(M_2;\mathbb{R}) \to H^k(M_1;\mathbb{R}).$$

证明 设已给出了光滑的同伦映射 $F: M_1 \times I \to M_2$, 其中 I 为线段 $1 \leqslant I \leqslant 2$, $F(x,1) = f_1(x)$, $F(x,2) = f_2(x)$. 在 $M_1 \times I$ 上的任意 k 阶微分形式 Ω 具有的形状为

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge dt, \quad \Omega|_{t=t_0} = \omega_1(t_0), \tag{4}$$

其中 ω_1 为 k 阶形式, 它的微分中不含 dt, 而 ω_2 为 $k-1$ 阶形式, 也不含微分 dt (在 $M_1 \times I$ 中选取的局部坐标常记为 $(x^1,\cdots,x^n,t) \equiv (x,t)$, 其中 $(x^1,\cdots,x^n)$ 为 M_1 的局部坐标). 设 ω 为 M_2 上的任意的 k 阶形式. 于是形式 $F^*(\omega) = \Omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge dt$, 其中局部地我们可记

$$\omega_2 = \sum_{i_1<\cdots<i_{k-1}} a_{i_1\cdots i_{k-1}}(x,t)dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}},$$

$$\omega_1 = \sum_{j_1<\cdots<j_k} b_{j_1\cdots j_k}(x,t)dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}.$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

我们在流形 $M_1 \times I$ 上局部地定义一个 $k-1$ 阶的形式 $D\Omega$ 为

$$D\Omega = \sum_{i_1<\cdots<i_{k-1}} \left(\int_1^2 a_{i_1\cdots i_{k-1}}(x,t)dt\right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}} = \int_1^2 \omega_2 dt. \tag{5}$$

我们有下面的重要引理.

引理 1 成立 "代数同伦" 的公式 (见 §2):

$$d(D(F^*(\omega))) \pm D(d(F^*(\omega))) = f_2^*(\omega) - f_1^*(\omega). \tag{6}$$

证明 我们要证明, 对 $M_1 \times I$ 上任意的形式 Ω 成立等式

$$dD(\Omega) \pm D(d\Omega) = \Omega|_{t=2} - \Omega|_{t=1}. \tag{7}$$

设 $\Omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge dt$, 我们来计算 $dD(\Omega)$. 由定义, 局部地有

$$dD(\Omega) = \sum_{i_1<\cdots<i_{k-1}} \sum_j \left(\int_1^2 \frac{\partial a_{i_1\cdots i_{k-1}}}{\partial x^j} dt\right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}},$$

$$\begin{aligned} Dd(\Omega) &= D(d\omega_1) + D(d\omega_2 \wedge dt) \\ &= D\left(\sum_{j_1<\cdots<j_k} \sum_q \frac{\partial b_{j_1\cdots j_k}}{\partial x^q} dx^q \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge x^{j_k}\right. \\ &\quad \left. + \sum_{j_1<\cdots<j_k} \frac{\partial b_{j_1\cdots j_k}}{\partial t} dt \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}\right) \\ &\quad + D\left(\sum_{i_1<\cdots<i_{k-1}} \sum_p \frac{\partial a_{i_1\cdots i_{k-1}}}{\partial x^p} dx^p \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}} \wedge dt\right). \end{aligned}$$

由此我们得到

$$\begin{aligned} dD\Omega + (-1)^{k+1} Dd\Omega &= \pm \sum_{j_1<\cdots<j_k} (b_{j_1\cdots j_k}(x,2) - b_{j_1\cdots j_k}(x,1))\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} \\ &= \Omega|_{t=2} - \Omega|_{t=1}. \end{aligned}$$

等式 (7) 得证. 现在如果 $\Omega = F^*(\omega)$, 则 $\Omega|_{t=2} = f_2^*(\omega), \Omega|_{t=1} = f_1^*(\omega)$. 引理证完. □

回到定理的证明. 设在 M_2 上给出了闭形式 ω (即 $d\omega = 0$). 于是有等式

$$f_2^*(\omega) - f_1^*(\omega) = dDF^*(\omega) \pm DdF^*(\omega).$$

但是 $dF^*(\omega) = F^*(d\omega) = 0$. 因此我们有 $f_2^*(\omega) - f_1^*(\omega) = dDF^*(\omega)$, 即两个形式的差为恰当形式. 这由定义表明, 同态

$$f_1^* : H^k(M_2;\mathbb{R}) \to H^k(M_1;\mathbb{R}) \quad \text{和} \quad f_2^* : H^k(M_2;\mathbb{R}) \to H^k(M_1;\mathbb{R})$$

在 (上同调的) 等价类上重合. 定理得证. □

回忆 [1], 第 Ⅱ 卷 §17 中, 称两个流形为同伦等价是说, 如果存在那样的光滑映射 $f : M_1 \to M_2, g : M_2 \to M_1$, 使得两个复合映射 $fg : M_2 \to M_2$ 和 $gf : M_1 \to M_1$ 各自同伦于恒同映射

$$M_1 \to M_1 (x \mapsto x), M_2 \to M_2 (y \mapsto y).$$

例如, 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ (或者圆盘 $D^n = \left\{ \sum\limits_{\alpha=1}^{n} (x^\alpha)^2 \leqslant R^2 \right\}$) 同伦等价于一个点. 其证明用了 $\mathbb{R}^n$ (或 D^n) 在其内形变为一个点的事实. 确切地这表明, 恒同映射 $1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x \mapsto x)$ 同伦于常值映射 $\mathbb{R}^n \to 0$ (映到一个点).

定理 2　同伦等价的流形具有相同的上同调群.

证明　设映射 $f : M_1 \to M_2, g : M_2 \to M_1$ 给出了同伦等价性. 考虑映射 $f^* : H^k(M_2) \to H^k(M_1)$ 和 $g^* : H^k(M_1) \to H^k(M_2)$. 因为映射 fg 和 gf 同伦于恒同映射, 故而由定理 1 知, 同态 $(fg)^* = g^*f^*$ 和 $(gf)^* = f^*g^*$ 正是上同调群的恒同同态:

$$1 = g^*f^* : H^k(M_2) \to H^k(M_2), 1 = f^*g^* : H^k(M_1) \to H^k(M_1).$$

由此, 同态 f^* 和 g^* 为同构, 且它们互逆: $f^* = (g^*)^{-1}$. 定理得证. □

注　根据所证明的这个定理, 对于所有那种空间 X, 如果能找到一个流形 $M \supset X$ 使得 X 是 M 的收缩, 则只要令

$$H^k(X;\mathbb{R}) \equiv H^k(M^n;\mathbb{R}), \tag{8}$$

便能定义其上同调群.

例如, 8 字形曲线并不是流形, 但对它可以定义其上同调群, 即按定义, 它是区域 $\mathbb{R}^2 \setminus \{Q_1 \cup Q_2\}$ 的上同调群 (参看图 1).

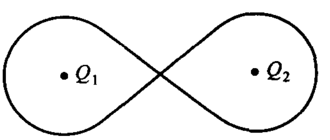

图 1

推论 1　欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 或圆盘 D^n 的上同调群与一个点的上同调群相等, 即当 $k > 0, H^k(\mathbb{R}^n)$ 为零, 而 $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, 即一维线性空间.

由此得到所谓的 "庞加莱引理": 局部地, 在流形 M^n 的任意点附近的区域中, 所有闭形式 ω (对其有 $d\omega = 0$) 都是恰当的: $\omega = d\omega', \deg\omega > 0$. 事实上, 选

取在点 Q 为中心的局部坐标中的圆盘 $D^n:\left\{\sum\limits_{\alpha=1}^{n}(x^\alpha-x_0^\alpha)^2\leqslant\varepsilon\right\}$, 并对此圆盘应用推论 1 得到, 当 $k>0$ 时 $H^k(D^n)=0$.

对于 $k=1$ 的庞加莱引理已在分析课程中有所讲述. 对 1- 形式 $\omega=f_kdx^k, d\omega=0$, 我们有 $\omega=dF$, 其中 $F(P)=\int_Q^P f_kdx^k$, 其中的积分路径为在圆盘内从点 Q 到点 P.

现在我们来计算圆 S^1 的上同调.

命题 2 圆 S^1 的上同调群为

$$\begin{aligned}&H^k(S^1;\mathbb{R})=0, k>1; H^1(S^1;\mathbb{R})=\mathbb{R},\\&H^0(S^1;\mathbb{R})=\mathbb{R}.\end{aligned}\tag{9}$$

证明 显然, 如果 $k>1$, 则 S^1 的上同调群平凡 (即等于 0). 另外, 因为圆为连通, 故 $H^0(S^1)=\mathbb{R}$. 为计算群 $H^1(S^1)$, 我们引进坐标 φ, 其中 φ 与 $\varphi+2\pi n$ 对任意整数 n 代表圆周的同一个点. 一阶形式可写为 $\omega=a(\varphi)d\varphi$ 的形状, 其中 $a(\varphi)$ 为满足 $a(\varphi+2\pi)=a(\varphi)$ 的周期函数. 因为圆的维数等于 1, 故总有 $d\omega=0$. 如果 $a(\varphi)d\varphi=dF$, 其中 $F(\varphi)$ 为周期函数, 则形式 $a(\varphi)d\varphi$ 是恰当的. 显然, $F(\varphi)=\int_0^\varphi a(\psi)d\psi+$ 常数. 因此, 函数 $F(\varphi)$ 为周期函数当且仅当满足条件 $\int_0^{2\pi}a(\psi)d\psi=0$ 或 $\int_{S^1}\omega=0$.

因此, 圆周上的 1- 形式 $\omega=a(\varphi)d\varphi$ 是恰当的当且仅当满足条件 $\int_{S^1}\omega=0$. 所以两个形式 $\omega_1=a(\varphi)d\varphi$ 和 $\omega_2=b(\varphi)d\varphi$ 定义同一个上同调类的充要条件为 $\int_{S^1}\omega_1=\int_{S^1}\omega_2$. 所以我们得到 $H^1(S^1;\mathbb{R})=\mathbb{R}$. 命题得证. □

推论 去掉一个点的欧氏平面 $\mathbb{R}^2\setminus\{Q\}$ (或圆环) 的上同调群与圆的上同调群相同:

$$\begin{aligned}&H^k(\mathbb{R}^2\setminus\{Q\})=0, k>1;\\&H^1(\mathbb{R}^2\setminus Q)=H^0(\mathbb{R}^2\setminus\{Q\})=\mathbb{R}.\end{aligned}\tag{10}$$

注 我们再指出计算圆的上同调的一个方法. 我们对每个形式 $\omega(\varphi)=a(\varphi)d\varphi$ 给出相应的 "平均" 形式

$$\widehat{\omega}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\varphi+\tau)d\tau=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}a(\varphi+\tau)d\tau\right]d\varphi.$$

命题 3 形式 ω 上同调等价于 $\widehat{\omega}$.

证明 圆周 S^1 到自己的变换 $\varphi\mapsto\varphi+\tau$ 诱导出了形式 $\omega(\varphi+\tau)$. 这个映射同伦于恒同映射. 故而 $\omega(\varphi)\sim\omega(\varphi+\tau)$. 对于 $\widehat{\omega}$ 的积分和的形状为

$$\frac{1}{2\pi}\sum_i\omega(\varphi+\tau_i)\Delta\tau_i\sim\omega(\varphi)\cdot\frac{1}{2\pi}\sum_i\Delta\tau_i=\omega(\varphi).\tag{11}$$

任意这样的积分和从而上同调于 ω. 引理得证. □

形式 $\widehat{\omega}$ 可写为

$$\widehat{\omega}(\varphi)=\alpha d\varphi,\ \text{其中}\ \alpha=\ \text{常数}\ =\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}a(\psi)d\psi.$$

事实上:

$$\begin{aligned}\widehat{\omega}(\varphi)&=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}a(\varphi+\tau)d\tau\right]d\varphi=\frac{1}{2\pi}\left[\int_\varphi^{2\pi+\varphi}a(\psi)d\psi\right]d\varphi\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}a(\psi)d\psi\right]d\varphi.\end{aligned}$$

(可以说, 形式 $\widehat{\omega}(\varphi)$ 对于旋转不变: $\widehat{\omega}(\varphi+\varphi_0)=\widehat{\omega}(\varphi)$.)

因此, 我们对每个上同调类 ω 给出对应的 (对于旋转) 不变形式 $\widehat{\omega}$, 即一个实数. 显然, 这个对应是相互一一的, 从而得到 $H^1(S^1)=\mathbb{R}$.

在下面, 我们在计算紧的齐性空间的上同调时将推广上述的讨论.

命题 4 定向闭黎曼流形 M^n 的上同调群 $H^n(M^n)$ 是非平凡的.

证明 考虑体积元 Ω, 局部地我们有 $\Omega=\sqrt{|g|}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$. 如果区域所选的局部坐标组与定向相容 (即所有转移函数的雅可比为正), 则 Ω 是 n 阶微分形式, 满足 $\int_{M^n}\Omega>0$ (这是流形 M^n 的体积). 显然, 因为形式 Ω 的阶等于 n, 有 $d\Omega=0$. 如果假设 $\Omega=d\omega$, 那么应用斯托克斯定理我们得到了

$$\int_{\partial M^n}\omega=\int_{M^n}d\omega=\int_{M^n}\Omega=0 \tag{12}$$

(因为 M^n 为闭且无边缘). 导出了矛盾. 命题得证. □

注 如果闭流形 M^n 是非定向的 (例如, $M^2=\mathbb{R}P^2$), 则群 $H^n(M^n;\mathbb{R})$ 平凡; 我们将在 §3 中证明它. 特别, 在具负雅可比的变换下, 体积元 $\Omega=\sqrt{|g|}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 的行为并不像微分形式那样.

设 $H^*(M^n)=\sum\limits_{k=0}^{n}H^k(M^n)$ 为上同调群的直和. 我们要在群 $H^*(M^n)$ 中引进环结构.

命题 5 设 ω_1,ω_2 为闭形式. 于是形式 $\omega_1\wedge\omega_2$ 和 $(\omega_1+d\omega')\wedge\omega_2$ 都为闭形式, 并且上同调等价.

证明 根据莱布尼兹公式 (参看 [1], 第 I 卷, §25) 我们有

$$d(\omega'\wedge\omega_2)=d\omega'\wedge\omega_2\pm\omega'\wedge d\omega_2=d\omega'\wedge\omega_2. \tag{13}$$

因此

$$(\omega_1 + d\omega') \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2 + d(\omega' \wedge \omega_2). \tag{14}$$

命题得证. □

根据这个命题, 形式的外积在 $H^*(M^n)$ 中给出了一个合理的乘法. 因此, 我们得到了流形 M^n 的上同调环. 如果 $\omega_1 \in H^p(M^n), \omega_2 \in H^q(M^n)$, 则积 $\omega_1\omega_2$ 在空间 $H^{p+q}(M^n)$ 中. 这个乘法具有下面的反交换性质:

$$\omega_2\omega_1 = (-1)^{pq}\omega_1\omega_2. \tag{15}$$

我们来解释同调群的几何意义 (准确的定义可参看后面的章节).

如果 M^n 为任意的流形, ω 为 k 阶闭形式, 则可定义它 "在闭链上的积分". 譬如, 可如下进行: 设 M^k 为闭的 k 维定向流形. 在此, 我们所说流形 M^n 中的 "闭链" 的意思是一个光滑映射 $f: M^k \to M^n$, 即偶对 (M^k, f).

定义 2 称积分 $\int_{M^k} f^*\omega$ 为形式 ω 在闭链 (M^k, f) 上的周期.

设 N^{k+1} 为任意一个定向流形, 其边缘为 $\partial N^{k+1} = M^k$. 边缘是个闭的定向流形 (有可能由几块组成). 我们所说的 "膜片" 是指映射 $F: N^{k+1} \to M^n$. 有下面的定理.

定理 3 a) 对任意闭链 (M^k, f), 恰当形式 $\omega = d\omega'$ 的周期等于 0.

b) 如果闭链 (M^k, f) 是膜片 (N^{k+1}, F) 的边缘, 即其中 M^k 为 N^{k+1} 的边缘, 而 $F|_{M^k} = f$, 则任意闭形式在这样的闭链 (M^k, f) 上的周期等于 0.

证明 a) 如果 $\omega = d\omega'$, 于是按斯托克斯公式我们有

$$\int_{M^k} f^*\omega = \int_{M^k} f^*(d\omega') = \int_{M^k} d(f^*\omega') = \int_{\partial M^k} f^*(\omega') = 0, \tag{16}$$

这是因为流形 M^k 没有边缘.

b) 如果 M^k 是 N^{k+1} 的边缘 (考虑其定向), 并且 $F|_{M^k} = f$, 则由斯托克斯公式有

$$\int_{M^k} f^*\omega = \int_{N^{k+1}} dF^*(\omega) = \int_{N^{k+1}} F^*(d\omega) = 0. \tag{17}$$

定理得证. □

我们不加证明地引进下面重要的命题.

命题 如果一个闭形式对所有闭链的周期均为零, 则此形式为恰当的 (参看 §14).

例 如果 $M^n = S^n$ 为球面, 则当 $k \neq 0, n$ 时 $H^k(S^n) = 0$.

证明 如果 $k > n$, 则由定义此命题显然成立. 如果 $0 < k < n$, 且 (M^k, f) 为任一闭链, 则由萨尔德 (Sard) 定理 ([1], 卷 Ⅱ, §10), 像 $f(M^k)$ 之外至少有一个点 $Q \in S^n$. 因此闭链 (M^k, f) 实际位于 $\mathbb{R}^n = S^n \setminus \{Q\}$ 中. 我们已经知道 (庞加莱引理), $\mathbb{R}^n$ 中的任一个闭形式都是恰当的. 故而当 $0 < k < n$ 时所有的周期都为零. 最终有, 当 $0 < k < n, H^k(S^n) = 0$. □

可以用类似于计算圆 S^1 的上同调的讨论 (见前面) 得到这个例子的另一个推导. 利用球面 S^n 上的运动群 $SO(n+1)$, 可以把任意一个上同调类化为球面 S^n 上对于 $SO(n+1)$ 不变的闭形式. 不变形式 ω 自身由其在球面的一个点上值所确定, 同时在此点, 这个形式应该对于稳定群 $SO(n) \subset SO(n+1)$ 不变. 这样的形式 ω 除了在维数为 0 和 n 外并不存在 (请验证!).

以类似的方法, 我们可以计算李群和对称空间的上同调群.

回忆 [1], 卷 Ⅱ, §6, 称具迷向群 H 的群 G 的齐性空间 M 为对称的是说, 如果在群 G 中给出了一个 "对合", 即一个自同构 $I: G \to G, I^2 = I$, 使得 $I|_H = 1$ (子群 H 中的点对于自同构 I 不变), 并且这时方程 $I(x) = x$ 对于靠近单位元的解 x 给出的只是子群 H 中的元素.

在这样的齐性流形 M 上, 对应于每个点 x 定义了一个 "对称" s_x, 使 $s_x^2 = 1$. 流形 M 到自身的映射 s_x 是这样的: 设 $g(x)$ 为 M 中的任意点; 我们令

$$g(x) \mapsto s_x(g(x)) = I(g)(x); \quad s_x(x) = x \ (\text{当 } g = 1); \tag{18}$$

其中 g 为 M 上的作用群 G 中任意元.

对每个点 x, 映射 s_x 有确定的定义, 同时 $(s_x)_*$ 是在点 x 的切空间上关于坐标原点的反射 (参看 [1], 卷 Ⅱ, §6). 特别, 每个紧李群 G 是群 $G \times G$ 的对称空间. 群 $G \times G$ 的作用定义为

$$T_{(g,h)}(x) = gxh^{-1}. \tag{19}$$

对合 I 为 $I(g,h) = (h,g)$. 迷向子群 H 为对角线 $\{(g,g)\}$. 对于群 G 的单位元 $x = e$ 的对称 s_x 为

$$s_e(g) = g^{-1}. \tag{19'}$$

在任意一个齐性空间上有一些特殊的不变微分形式, 使得 $g^*\omega = \omega, g$ 为 G 中任意的元素.

不变形式的微分 $d\omega$ 仍然是不变形式:

$$g^* d\omega = dg^*\omega = d\omega. \tag{20}$$

两个不变形式的积 $\omega_1 \wedge \omega_2$ 也是不变的:

$$g^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = g^*\omega_1 \wedge g^*\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2. \tag{21}$$

试读结束: 需要全本请在线购买: www.ertongbook.com