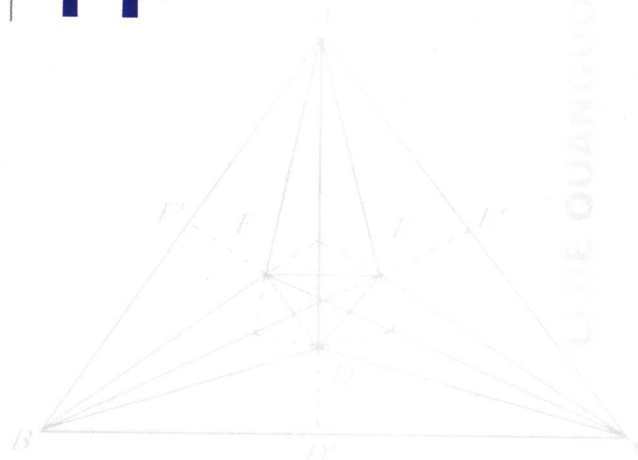
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释

历届全国高中数学联赛平面几何试题一题多解

（下）

$$S_{\triangle z_1z_2z_3} = \frac{1}{2}|z_2 - z_1|\cdot d = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\overline{z_1 z_2} + \overline{z_2 z_3} + \overline{z_3 z_1}) = \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3} \end{vmatrix}$$



主编 沈文选

PINGMIAN JIHE SHITI QUANSHI

哈爾濱工業大學出版社

ZOUXIANG GUOJI SHUXUE AOLINPIKE DE PINGMIAN JIHE SHITI QUANSH

LIJIE QUANGUO GAOZHONG SHUXUE LIANSAI PINGMIAN JIHE SHITI YITIDUOJIE

走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释

历届全国高中数学联赛平面几何试题一题多解

（下）

主　编　沈文选

副主编　杨清桃　步凡　昊凡

哈爾濱工業大學出版社

内容提要

全书对1978~2006年间的全国高中数学联赛(包括全国女子竞赛、西部竞赛、东南竞赛、北方竞赛)、中国数学奥林匹克(CMO,即全国中学生数学冬令营)、中国国家队队员选拔赛中的一百余道平面几何试题进行了诠释,每道试题给出了尽可能多的解法(多的近30种解法)及命题背景,以70个专题讲座的形式对试题所涉及的有关知识或相关背景进行了深入地探讨,揭示了平面几何试题的有关命题途径。该书极大地拓展了读者的视野,可全方位地开启读者的思维,扎实地训练其基本功。该书适合于广大数学爱好者,初、高中数学竞赛选手,初、高中数学教师和中学数学奥林匹克教练员使用,也可作为高等师范院校、教育学院、教师进修学院数学专业开设的"竞赛数学"课座教材及国家级、省级骨干教师培训班参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释.下:历届全国高中数学联赛平面几何试题一题多解/沈文选主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2007.1

ISBN 978-7-5603-2441-8

Ⅰ.走… Ⅱ.沈… Ⅲ.平面几何-高中-解题 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第147214号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 李广鑫 唐 蕾
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16 总印张55 总字数955千字
版　　次 2007年1月第1版 2007年1月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-2441-8
印　　数 1~4000册
定　　价 68.00元

目　　录

第15章 1993 ～ 1994 年度试题的诠释

试题 A1 设一凸四边形 $ABCD$，它的内角中仅有 $\angle D$ 是钝角，用一些直线段将该凸四边形分成 n 个钝角三角形，但除去 A、B、C、D 外，在该凸四边形的周界上，不含分割出的钝角三角形顶点，试证 n 应该满足的充分必要条件是 $n\geqslant 4$.

证法1 设凸四边形 $ABCD$ 中仅有 $\angle D$ 是钝角.

充分性.

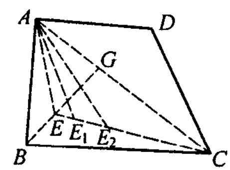


图 15.1

先证：非钝角三角形可分割成三个钝角三角形. 事实上，取锐角 $\triangle ABC$ 的顶点 B，或 Rt$\triangle ABC$ 的直角顶点 B，向对边 AC 作高 BG. 以 AC 为直径向三角形内作半圆，于是 BG 上位于该半圆内的任意点 E 与 $\triangle ABC$ 三顶点连线将 $\triangle ABC$ 剖分成三个钝角三角形 $\triangle ABE$、$\triangle BCE$、$\triangle CAE$.

(i) 如图 15.1，联结 AC，由上知 $\triangle ABC$ 可剖分成三个钝角三角形，连同钝角 $\triangle ACD$，凸四边形 $ABCD$ 可剖分成 4 个钝三角形.

(ii) 如图 15.1，在(i) 的基础上，作 AE_1、AE_2、…，即得新的剖分的钝角 $\triangle AEE_1$、$\triangle AE_1E_2$、…（$\cdots\angle AE_2C>\angle AE_1C>\angle AEC>90°$），凸四边形 $ABCD$ 可剖分为 $n=5,6,\cdots$ 个钝角三角形.

必要性.

先证：非钝角三角形不能剖分成两个钝角三角形. 因为由三角形任一顶点向对边作剖分线段，顶角经剖分不能得钝角，而剖分线段与对边的夹角不能将 $180°$ 角分成两个钝角，所以非钝角三角形不能剖分成两个钝角三角形.

今设凸四边形已被剖分为 n 个钝角三角形. 如果该凸四边形的 4 条边分别属于 4 个不同的钝角三角形，则已有 $n\geqslant 4$. 如果有两条邻边同属于一个钝角三角形（不相邻的两条边不能构成三角形），这时只能是下列两种情况之一：

(i) 该两邻边夹角为钝角 $\angle D$，这时 AC 必为剖分线. 因而非钝角 $\triangle ABC$ 必被再剖分，只能剖分成 3 个或 3 个以上的钝角三角形，连同钝角 $\triangle ADC$，有 $n\geqslant 4$.

(ii) 该两邻边夹角不是 $\angle D$，这时夹角不能是 $\angle B$，因为 $\triangle ABC$ 不是钝角

三角形,因而 BD 是剖分线,并将 $\angle D$ 剖分出一个钝角来,使得上述两邻边作为该钝角三角形的两条边.另一部分为非钝角三角形,它必剖分成3个或3个以上的钝角三角形,故 $n \geqslant 4$.

证法2 充分性:如图 15.2,作对角线 AC,则由题设知,$\triangle ADC$ 是钝角三角形,$\triangle ABC$ 是非钝角三角形,取 $\triangle ABC$ 的费马点 E,则

$$\angle AEB = \angle BEC = \angle CEA = 120^\circ$$

这就把四边形 $ABCD$ 剖分成4个钝角三角形:$\triangle ADC$、$\triangle AEB$、$\triangle BEC$、$\triangle CEA$.

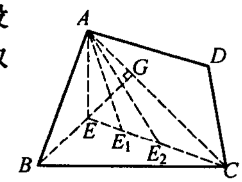


图 15.2

再在 CE 边上取点 E_1、E_2、…,又可把 $\triangle AEC$ 剖分成2,3,… 个钝角三角形 $\triangle AEE_1$、$\triangle AE_1E_2$、….这就把四边形分成了 $n = 5,6,\cdots$ 个钝角三角形.

必要性:易证明一个非钝角三角形不能剖分成2个钝角三角形.

假设已经作出了 n 个钝角三角形的剖分.考虑 CD 边,设它属于已剖分的钝角三角形 $\triangle ECD$,如图 15.3所示,若 E 为点 B,由于 $\triangle BCD$ 为钝角三角形,只有 $\angle BDC$ 为钝角(已设 $\angle D$ 为钝角),从而 $\angle BDA$ 为锐角,$\triangle BDA$ 为非钝角三角形.它不能剖分成2个而只能剖分成3个以上的钝角三角形.连同 $\triangle BCD$,有 $n \geqslant 4$.若 E 为点 A,则 $\triangle ABC$ 为非钝角三角形,同理可知 $n \geqslant 4$.

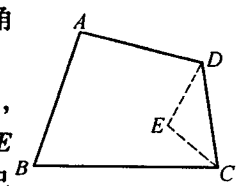


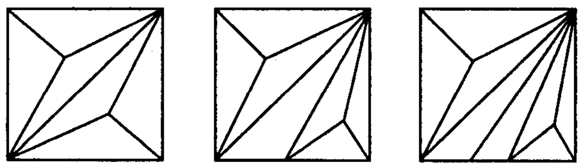
图 15.3

注 (1)对于不熟悉费马点的人,充分性中的点 E 可以这样选取:以 AC 为直径向 $\triangle ABC$ 内作半圆,在高 BG(图 15.1)上取位于半圆内的任一点作为点 E.必要性也可以通过分别证明四边形 $ABCD$ 不可能分成 $n = 1,2,3$ 个钝角三角形而得证.

(2) 该试题命制背景①:该试题经历了很长时间的讨论才得以形成.原始命题十分简洁优美,但难度太大.原始命题是:"用若干直线要将正方形分剖为若干部分,称为割分,试证明正方形被剖分成 n 个钝角三角形的充分必要条件是 $n \geqslant 6$."

① 李名德,王祖樾.一九九三年全国高中数学联赛某些试题的引申与推广[J].中学教研(数学),1993(12):29-33.

证明 充分性:将正方形按对角线剖分,得两个直角三角形,每个直角三角形可剖分成三个钝角三角形.于是一正方形可剖分成 6 个钝角三角形,如果将一直角三角形先剖分出一个钝角三角形,余下的直三角形再剖分出三个钝角三角形.这样正方形可剖分成 7 个钝角三角形.类似对 8,9,… 均可作出.如图 15.4 所示.



(a) (b) (c)

图 15.4

因此,对于任何大于等于 6 的 n,均可将正方形剖分成 n 个钝角三角形.充分性证毕.

必要性:为简述起见,一个正方形剖分成若干钝角三角形,称为“钝角剖分”.

现设正方形已作出了钝角剖分,我们证明所剖分出的钝角三角形个数必大于等于 6.

显然,正方形四个直角顶角,必须都被剖分,否则有直角三角形而非钝角剖分了.四直角剖分必在正方形内部相交,得到“剖分点”.剖分点之间的线段称为“剖分线”.

(1) 正方形不存在“仅有一个内部剖分点”的钝角剖分.

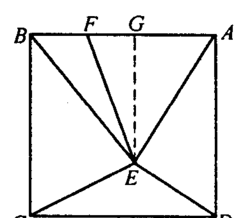


图 15.5

我们反证之.设仅有的一个内部剖分点为 E,如图15.5所示,则剖分四直角顶角的剖分线必交于点 E.显然在点 E 处至少有一个非钝角,不妨设 $\angle AEB$,则 $\triangle AEB$ 为非钝角三角形.若过点 E 再行剖分,比如引剖分线 EF(F 是 AB 边上的新剖分点),则含高 EG 的 $\triangle AEF$ 必是锐角或直角三角形,因此无论怎样剖分,在内部剖分点仅有一个的条件下,不能实现剖分.

(2) 设正方形内部剖分点的个数大于等于 2.

(i) 设 AB、CD 边上除 A、B、C、D 外没有新的剖分点.

由于已完成了对正方形的钝角剖分,所以 AB 应属于某个钝角三角形,设为 $\triangle AEB$.同样,CD 应属于某个钝角三角形,设为 $\triangle CFD$.如图 15.6 所示.

由于 E 处对 AB 所张的角为钝角,所以点 E 在以 AB 为直径的半圆内.类似,F 在以 CD 为直径的半圆内.这样 $\triangle AEB$、$\triangle CFD$ 分离在两个内部不相交的半圆内,这两个三角形相互分离而不相交.

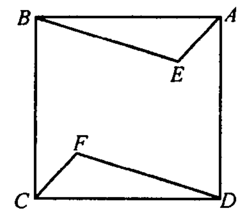


图 15.6

边 AE 或者边 AE 的一段,应属于异于 $\triangle AEB$ 的一个被剖分出的钝角三角形.类似讨论 BE.于是由 $\triangle AEB$ 至少找出了三个剖分的钝角三角形.对 $\triangle CFD$ 同样讨论,又得三个不同的剖分钝角三角形.

如果这六个钝角三角形互不相同,我们就证明了 $n \geqslant 6$.但 BE 与 CF,AE 与 CF 或 BE 与 DF,AE 与 DF 共剖分三角形的情况还是可能的,我们证明在这种情形下,也仍有 $n \geqslant 6$.

BE 与 CF 共剖分三角形的可能情况有三种,如图 15.7 所示.

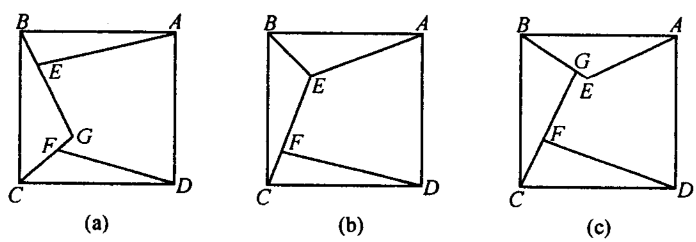


图 15.7

情况(a).五边形 $AEGFD$ 不能剖分成两个钝角三角形.因为若能剖分,只能 E、G、D(或 A、F、G)共线,此时 $\triangle AED$($\triangle AFD$)不可能是钝角三角形.五边形 $AEGFD$ 剖分成钝角三角形时剖分数大于等于 3,故 $n \geqslant 6$.

情况(b).四边形 $AEFD$ 中只有 $\angle AEF$ 是钝角,用它的对角线分成的两个三角形至少有一个不是钝角三角形,所以它剖成钝角三角形的剖分数也不小于 3,故 $n \geqslant 6$.

情况(c).五边形 $AEGFD$ 不能剖分成两个钝角三角形.因为五边形 $AEGFD$ 可剖成两个三角形只当 A、E、F(或 D、E、G)共线时,若 A、E、F 共线,用 AF 剖分成两个三角形,$\triangle AFD$ 和 $\triangle EFG$ 中,由于 $\angle BGC$、$\angle CFD$、$\angle AEB$ 为钝角,故 $\triangle EFG$ 为锐角三角形,不是钝角三角形剖分.同样,若 D、E、G 共线,用 DG 剖分五边形,得到的 $\triangle DFG$ 也不可能是钝角三角形,所以也有 $n \geqslant 6$.

AE 与 CF 共剖分三角形的情形,只可能对角线为剖分线,如图 15.8 所示.

当对角线为剖分线时,对角线将正方形 $ABCD$ 剖成两个直角三角形,而每

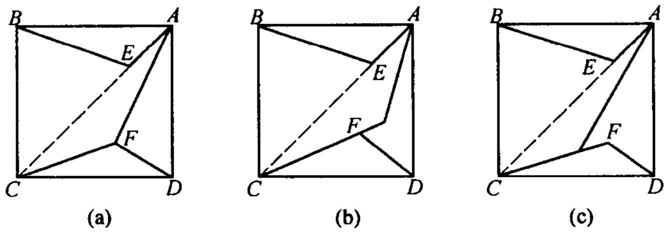


图 15.8

个直角三角形要剖分成钝角三角形剖分数至少为 3,故 $n \geqslant 6$.

BE 与 FD,AE 与 FD 共剖分三角形时,证明类似.

(ii) 正方形 $ABCD$ 的边界上还有新的剖分点,若边界上新剖分点至少有两个,则周界被分成至少六段,且每段(或其部分)分别属于不同的剖分三角形.故 $n \geqslant 6$.

若边界上只有一个新的剖分点,则边界被分成五段,由这五段可以找到五个互不相同的剖分三角形.故剖分数大于等于 5.若剖分数为 5,只可能五个三角形有共同顶点 O(图 15.9),与内部剖分点数大于等于 2 矛盾.所以 $n \geqslant 6$.

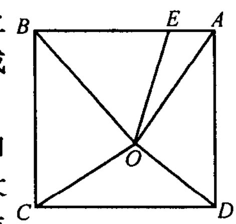


图 15.9

(关于正方形剖分的上述简洁优美命题,由徐士英(浙江师大)提出,并由徐士英、王祖樾(杭州电子工业学院)共同合作完成证明.命题组集体讨论了许多降低难度的方案.现在的命题形式是由过伯祥(舟山师专)提出的.)

试题 A2　水平直线 m 通过圆 O 的中心,直线 $l \perp m$,l 与 m 相交于点 M,点 M 在圆心的右侧.直线 l 上不同的三点 A、B、C 在圆外,且位于直线 m 上方,点 A 离点 M 最远,点 C 离点 M 最近,AP、BQ、CR 为圆 O 的三条切线,P、Q、R 为切点.试证:

(1) l 与圆 O 相切时,$AB \cdot CR + BC \cdot AP = AC \cdot BQ$.

(2) l 与圆 O 相交时,$AB \cdot CR + BC \cdot AP < AC \cdot BQ$.

(3) l 与圆 O 相离时,$AB \cdot CR + BC \cdot AP > AC \cdot BQ$.

证法 1　设圆半径为 r,$OM = x$,$AM = a$,$BM = b$,$CM = c$($a > b > c > 0$).易算得

$$AM^2 + OM^2 - OP^2 = AP^2$$

故有

$$AP^2 = a^2 + x^2 - r^2 = a^2 + t \ (\text{令 } t = x^2 - r^2)$$

$$AP = \sqrt{a^2 + t}$$

同理

$$BQ = \sqrt{b^2 + t}, CR = \sqrt{c^2 + t}$$

令 $$G = (AB \cdot CR + BC \cdot AP)^2 - (AC \cdot BQ)^2$$

则 $$G = [(a-b)\sqrt{c^2+t} + (b-c)\sqrt{a^2+t}]^2 - (a-c)^2(b^2+t) =$$
$$[(a-b)\sqrt{c^2+t} + (b-c)\sqrt{a^2+t}]^2 - [(a-b)+(b-c)]^2(b^2+t) =$$
$$(a-b)^2(c^2+t) + (b-c)^2(a^2+t) + 2(a-b)(b-c)\sqrt{c^2+t}\sqrt{a^2+t} -$$
$$(a-b)^2(b^2+t) - (b-c)^2(b^2+t) - 2(a-b)(b-c)(b^2+t) =$$
$$-(a-b)^2(b^2-c^2) + (b-c)^2(a^2-b^2) +$$
$$2(a-b)(b-c)[\sqrt{(c^2+t)(a^2+t)} - b^2 - t] =$$
$$(a-b)(b-c)[-(a-b)(b+c) + (a+b)(b-c) +$$
$$2\sqrt{(c^2+t)(a^2+t)} - 2b^2 - 2t] =$$
$$2(a-b)(b-c)[-(ac+t) + \sqrt{(c^2+t)(a^2+t)}]$$

相切时,有 $x = r$,从而 $t = 0, G = 0$,式(1)成立.

相交时,$0 < x < r$,于是 $t < 0$,又点 C 在圆外,故 $x^2 + c^2 > r^2, t = x^2 - r^2 > -c^2 > -a^2$,从而 G 式中根号内为正数,且 $ac + t > 0$.于是通过两端平方及 $t < 0$,可验证$\sqrt{(c^2+t)(a^2+t)} < ac + t$,即 $G < 0$.式(2)成立.

相离时,$x > r$,于是 $t > 0$,同样可验证$G > 0$,式(3)成立.

证法 2

(1) 相切如图 15.10 所示.

由圆的切线定理,可知 $AP = AM, BQ = BM, CR = CM$.于是欲证之(1)式成为

$$AB \cdot CM + BC \cdot AM = AC \cdot BM \qquad (1')$$

由于 $AM = AB + BC + CM$,(1′)之左方等于

$$AB \cdot CM + BC(AB + BC + CM) =$$
$$(AB + BC)(BC + CM) = AC \cdot BM$$

因此式(1′)成立.

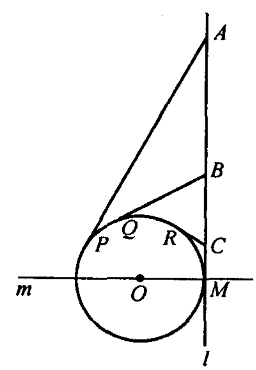


图 15.10

(2) 相交如图 15.11 所示.

由圆切割线定理,有

$$AP^2 = AD \cdot AE, BQ^2 = BD \cdot BE, CR^2 = CD \cdot CE$$

故 $$G = (AB \cdot CR + BC \cdot AP)^2 - (AC \cdot BQ)^2 =$$
$$AB^2 \cdot CR^2 + BC^2 \cdot AP^2 - AC^2 \cdot BQ^2 +$$
$$2AB \cdot BC \cdot CR \cdot AP = AB^2 \cdot CD \cdot CE +$$

$$BC^2 \cdot AD \cdot AE - AC^2 \cdot BD \cdot BE + 2AB \cdot BC\sqrt{AD \cdot AE \cdot CD \cdot CE}$$

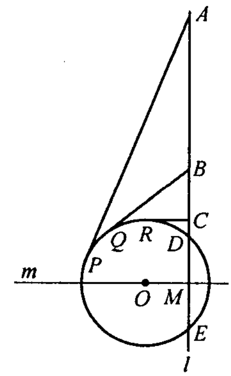


图 15.11

类似(1′),可得

$$AB \cdot CE + BC \cdot AE = AC \cdot BE$$

于是

$$\begin{aligned} G = {} & AB \cdot CD(AC \cdot BE - BC \cdot AE) + \\ & BC \cdot AD(AC \cdot BE - AB \cdot CE) - \\ & AC \cdot BD(AB \cdot CE + BC \cdot AE) + \\ & 2AB \cdot BC\sqrt{AD \cdot AE \cdot CD \cdot CE} \end{aligned}$$

类似(1′),又有

$$BC \cdot DE + CD \cdot BE = BD \cdot CE$$

$$AB \cdot DE + BD \cdot AE = AD \cdot BE$$

故

$$\begin{aligned} G = {} & AB \cdot AC(CD \cdot BE - BD \cdot CE) + AC \cdot BC(AD \cdot BE - BD \cdot AE) - \\ & AB \cdot BC(CD \cdot AE + AD \cdot CE - 2\sqrt{CD \cdot AE \cdot AD \cdot CE}) = \\ & AB \cdot AC(-BC \cdot DE) + AC \cdot BC(AB \cdot DE) - \\ & AB \cdot BC(\sqrt{CD \cdot AE} + \sqrt{AD \cdot CE})^2 < 0 \end{aligned}$$

(3) 相离如图 15.12 所示.

我们设法将 AP、BQ、CR 这些线段汇集在一个三角形中.

易知

$$AP^2 = AM^2 + OM^2 - OP^2$$

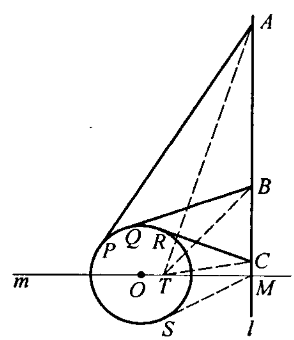


图 15.12

再由点 M 向圆 O 作切线 MS,点 S 为切点,并在直线 m 上取点 T,使 $MT = MS$.于是

$$AP^2 = AM^2 + OM^2 - OS^2 = AM^2 + MS^2 = AM^2 + MT^2 = AT^2$$

从而 $AP = AT$.同理 $BQ = BT$,$CR = CT$.

在 $\triangle ATC$ 中,如图 15.13 所示,我们证明

$$AB \cdot CT + BC \cdot AT > AC \cdot BT$$

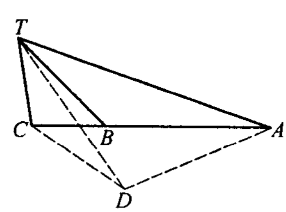


图 15.13

事实上,如图作辅助线使 $\angle TCD = \angle TBA$,$\angle BAD = \angle BTA$,于是 $\triangle TCD \backsim \triangle TBA$,$\triangle TCB \backsim \triangle TDA$.从而

$$AB \cdot CT = CD \cdot BT, BC \cdot AT = DA \cdot BT$$

$$AB \cdot CT + BC \cdot AT = CD \cdot BT + DA \cdot BT = (CD + DA)BT > AC \cdot BT$$

将 $AP = AT, BQ = BT, CR = CT$ 代入,即得

$$AB \cdot CR + BC \cdot AP > AC \cdot BQ$$

证法 3 (由葛洲坝六中姚季新给出)在上述证法 2 中,(1) 的证明较易,(2)、(3) 的证明难度大一些.下面的证法,其实(2) 和(3) 都可通过技术性处理转化为下列命题:

若 $0 < \alpha < \beta < \gamma < \frac{\pi}{2}$,则有

$$\sin(\gamma - \alpha) < \sin(\beta - \alpha) + \sin(\gamma - \beta) \quad (*)$$

我们先来看其中的(2),若直线 l 与圆 O 相交,证明

$$AB \cdot CR + BC \cdot AP < AC \cdot BQ$$

设直线 l 与圆 O 的交点为 D、E,以 M 为圆心,以 MD 为半径作圆 M,并设圆 M 的半径为 $r(r = MD)$,过点 A、B、C 分别作圆 M 的切线 AP', BQ', CR'(P'、Q'、R' 为切点),如图 15.14 所示.

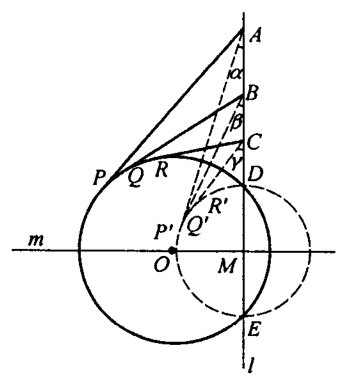


图 15.14

由 $AP^2 = AD \cdot AE, AP'^2 = AD \cdot AE$,于是 $AP' = AP$,同理有 $BQ' = BQ, CR' = CR$.

又设$\angle MAP' = \alpha, \angle MBQ' = \beta, \angle MCR' = \gamma$,则有 $0 < \alpha < \beta < \gamma < \frac{\pi}{2}$,这时

$$AB \cdot CR = (AM - BM)CR' = r(\csc\alpha - \csc\beta)r\cot\gamma = \frac{r^2(\sin\beta - \sin\alpha)\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

同理

$$BC \cdot AP = \frac{r^2(\sin\gamma - \sin\beta)\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

$$AC \cdot BQ = \frac{r^2(\sin\gamma - \sin\alpha)\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

欲证 $AB \cdot CR + BC \cdot AP < AC \cdot BQ$,只要证

$$(\sin\beta - \sin\alpha)\cos\gamma + (\sin\gamma - \sin\beta)\cos\alpha < (\sin\gamma - \sin\alpha)\cos\beta$$

移项并用差角的正弦公式即化为

$$\sin(\gamma - \alpha) < \sin(\beta - \alpha) + \sin(\gamma - \beta)$$

这就化为命题(*)的结论.

其中的(3) 为若直线 l 与圆 O 相离，证明：$AB \cdot CR + BC \cdot AP > AC \cdot BQ$. 如图15.15所示.

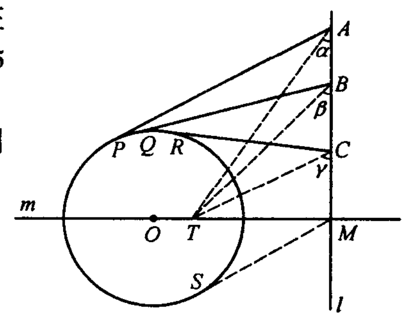


图 15.15

过点 M 引圆 O 的切线 MS(S 为切点). 则因为

$$AP^2 = AO^2 - OP^2 = AM^2 + MO^2 - OS^2 = AM^2 + MS^2$$

在 MO 上截取 $MT = MS$，则 $AP^2 = AM^2 + MT^2 = AT^2$，于是 $AT = AP$，同理可得 $BT = BQ$，$CT = CR$.

又设 $\angle MAT = \alpha$，$\angle MBT = \beta$，$\angle MCT = \gamma$，则有 $0 < \alpha < \beta < \gamma < \frac{\pi}{2}$，并设 $MT = a$，那么

$$AB \cdot CR = (AM - BM)CT = a(\cot \alpha - \cot \beta)a\csc \gamma = \frac{a^2\sin (\beta - \alpha)}{\sin \alpha\sin \beta\sin \gamma}$$

同理

$$BC \cdot AP = \frac{a^2\sin (\gamma - \beta)}{\sin \alpha\sin \beta\sin \gamma}$$

$$AC \cdot BQ = \frac{a^2\sin (\gamma - \alpha)}{\sin \alpha\sin \beta\sin \gamma}$$

欲证 $AB \cdot CR + BC \cdot AP > AC \cdot BQ$，即只要证

$$\sin (\beta - \alpha) + \sin (\gamma - \beta) > \sin (\gamma - \alpha)$$

这还是命题(＊)的结论.

这样不管直线 l 与圆 O 是相交还是相离，不同两类问题的结论都成立，通过处理、转化，化归为同一个命题(＊)的证明. 这是数学命题证明的一种常用方法，也是研究数学问题中的一种比较理想的思考方法.

下面仅剩下命题(＊)的证明，事实上，由 $0 < \alpha < \beta < \gamma < \frac{\pi}{2}$，有

$$0 \leqslant \left|\beta - \frac{\alpha + \gamma}{2}\right| < \frac{\gamma - \alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$$

由余弦函数在$[0, \frac{\pi}{4})$内为减函数，有

$$\cos \left|\beta - \frac{\alpha + \gamma}{2}\right| > \cos \frac{\gamma - \alpha}{2}$$

即

$$\cos \left(\beta - \frac{\alpha + \gamma}{2}\right) > \cos \frac{\gamma - \alpha}{2}$$

又 $\sin\dfrac{\gamma-\alpha}{2}>0$,有

$$2\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\cos\left(\beta-\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)>2\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}$$

利用积化和差公式即得

$$\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma-\beta)>\sin(\gamma-\alpha)$$

这就完成了我们的证明.

下面的两种证法由罗增儒教授给出①.

为了行文的方便,设 $MA=a,MB=b,MC=c(a>b>c>0),OM=x>0$,圆半径为 $r,d=x^2-r^2$.则

$$AP=\sqrt{AO^2+OP^2}=\sqrt{AM^2+OM^2-OP^2}=\sqrt{a^2+x^2-r^2}=\sqrt{a^2+d}$$

$$BQ=\sqrt{b^2+d}$$

$$CR=\sqrt{c^2+d}$$

证法4 将求证式转化为确定 I 的符号.作差

$$I=AB\cdot CR+BC\cdot AP-AC\cdot BQ=$$

$$(a-b)\sqrt{c^2+d}+(b-c)\sqrt{a^2+d}-(a-c)\sqrt{b^2+d}=$$

$$(b-c)(\sqrt{a^2+d}-\sqrt{b^2+d})-(a-b)(\sqrt{b^2+d}-\sqrt{c^2+d})=$$

$$\frac{(b-c)(a^2-b^2)}{\sqrt{a^2+d}+\sqrt{b^2+d}}-\frac{(a-b)(b^2-c^2)}{\sqrt{b^2+d}+\sqrt{c^2+d}} \quad ①$$

(1)l 与圆 O 相切时,$d=0,I=0$,命题成立.

(2)l 与圆 O 相交时,$d<0$,由 $a>b>c>0$ 知

$$\frac{c^2}{c^2+d}>\frac{b^2}{b^2+d}>\frac{a^2}{a^2+d}>1$$

有

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+d}}>\frac{b}{\sqrt{b^2+d}}>\frac{a}{\sqrt{a^2+d}}>1$$

得

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+d}}>\frac{b+c}{\sqrt{b^2+d}+\sqrt{c^2+d}}>\frac{b}{\sqrt{b^2+d}}>$$

$$\frac{a+b}{\sqrt{a^2+d}+\sqrt{b^2+d}}>\frac{a}{\sqrt{a^2+d}}$$

---

① 罗增儒.1993年高中联赛最后一题新解[J].中等数学,1994(1):14-15.

代入①,得

$$I=(a-b)(b-c)\left(\frac{a+b}{\sqrt{a^2+d}+\sqrt{b^2+d}}-\frac{b+c}{\sqrt{b^2+d}+\sqrt{c^2+d}}\right)<0$$

(3) l 与圆 O 相离时, $d>0$, 由 $a>b>c>0$, 知

$$0<\frac{c^2}{c^2+d}<\frac{b^2}{b^2+d}<\frac{a^2}{a^2+d}<1$$

有

$$0<\frac{c}{\sqrt{c^2+d}}<\frac{b}{\sqrt{b^2+d}}<\frac{a}{\sqrt{a^2+d}}<1$$

得

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+d}}<\frac{b+c}{\sqrt{b^2+d}+\sqrt{c^2+d}}<\frac{b}{\sqrt{b^2+d}}<$$

$$\frac{a+b}{\sqrt{a^2+d}+\sqrt{b^2+d}}<\frac{a}{\sqrt{a^2+d}}$$

代入①,得

$$I=(a-b)(b-c)\left(\frac{a+b}{\sqrt{a^2+d}+\sqrt{b^2+d}}-\frac{b+c}{\sqrt{b^2+d}+\sqrt{c^2+d}}\right)>0$$

证法 5　(1) l 与圆 O 相切时, $d=0$, 可直接验证.

(2) l 与圆 O 相交时, $d<0$. 作三角变换

$$AM=\frac{\sqrt{|d|}}{\cos\alpha},BM=\frac{\sqrt{|d|}}{\cos\beta},CM=\frac{\sqrt{|d|}}{\cos\gamma}$$

其中

$$0<\gamma<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

则有

$$AP=\sqrt{|d|}\tan\alpha,AP^2=AM^2-|d|$$

$$BQ=\sqrt{|d|}\tan\beta$$

$$CR=\sqrt{|d|}\tan\gamma$$

从而

$$I=(AM-BM)CR+(BM-CM)AP-(AM-CM)BQ=$$

$$AM(CR-BQ)+BM(AP-CR)+CM(BQ-AP)=$$

$$|d|\left(\frac{\tan\gamma-\tan\beta}{\cos\alpha}+\frac{\tan\alpha-\tan\gamma}{\cos\beta}+\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{\cos\gamma}\right)=$$

$$\frac{d[\sin(\beta-\gamma)-\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\alpha-\beta)]}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}= \qquad ①$$

$$\frac{d\left[2\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-2\beta+\gamma}{2}-\sin(\alpha-\gamma)\right]}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=$$