十一五

普通高等教育“十一五”规划教材

大学数学全程解决方案系列

线性代数

（理工类少学时）

杜　红　李　岚
孙淑兰　周永芳　编

莫海平　主审

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"规划教材
大学数学全程解决方案系列

线性代数

（理工类少学时）

杜 红 李 岚 孙淑兰 周永芳 编

莫海平 主 审

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书共6章，内容包括行列式、矩阵及其应用、向量组的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换.各章后配有两套习题，并在书后附有部分习题答案与提示.书后的附录结合Matlab软件给出了几个数学模型的求解过程及相关程序.

本书适合一般高等工科院校各专业学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数:理工类少学时/杜红等 编.—北京:科学出版社，2007

(普通高等教育"十一五"规划教材.大学数学全程解决方案系列)

ISBN 978-7-03-019276-9

Ⅰ.线… Ⅱ.杜… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第110319号

责任编辑:李鹏奇 王 静 杨 然/责任校对:赵燕珍

责任印制:张克忠/封面设计:卢秋红

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2007年8月第一次印刷 印张:9 3/4

印数:1—7 000 字数:179 000

定价:13.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

《大学数学全程解决方案系列》编委会

《大学数学全程解决方案系列》序

目前,高等数学、线性代数、概率论与数理统计等大学数学类公共课的教材版本比较多,其中不乏一些优秀教材,它们在教育部统一的教学规范、教学设计、教学安排等框架内,为全国高等院校师生的教学和学习提供了方方面面的服务.但从另一方面来说,不同区域的高校在师资力量、教学习惯、教学环境、学生来源、学生层次、学生求学目的等方面都存在着不小的差异,由此造成对教材的需求也存在着一些差异.在遵照执行教育部对大学数学类公共课教学的统一要求的前提下,我想,这些差异主要来自于对这些统一要求的具体实施和尝试.

为了更好地提高教学效果,充分挖掘区域内的教学资源,增加区域内教师的交流与互动,优化创新和谐的教研氛围,培育更加适应本地区高校的优秀教材,科学出版社在广泛调研的基础上,组织了黑龙江地区高校最优秀、最有经验的教师,拟编写一套集主教材、教辅、课件为一体的立体化教材,并努力争取进入国家级优秀教材的行列.为此科学出版社、哈尔滨工业大学数学系联合于2006年5月27日在哈尔滨工业大学召开了《大学数学全程解决方案系列》规划教材会议.在这次会议上,大家推荐我作为这套丛书的编委会主任,盛情难却,我想,若能和大家共同努力,团结协作,认真领会教育部的有关精神,凭借科学出版社的优秀品牌,做出一套大学数学类的优秀教材,也的确是一件有意义的事情.

为此,我们编委会成员就这套教材作了几次讨论和交流,希望在以下方面有所突破:

在教学内容上,有较大创新,紧跟时代步伐,从知识点讲述,到例题、习题,都要体现时代的特色.

在教学方法上,充分体现各学校的优秀教学成果,集中黑龙江地区优秀的教学资源,力求代表最好的教学水平.

在教学手段上,充分发挥先进的教学理念,运用先进的教学工具,开发立体化的教学产品.

在教材设计上,节约课时,事半功倍(比如在教材上给学生预留较大的自主空间,让有进一步学习愿望的学生能够自主学习;开发的课件让老师节约课时,精心设计的练习册,让老师节约更多的检查作业的时间).

在教学效果上,满足对高等数学有不同要求的教师、学生,让教师好用,让学生适用.

如今,这套丛书终于要面世了,今年秋季有《微积分(经管类)》、《线性代数(经

管类)》、《线性代数(理工类多学时)》、《线性代数(理工类少学时)》、《概率论与数理统计》、《数学建模》等教材陆续出版.但我想,尽管我们的初衷是美好的,教材中必定还会存在这样那样的问题,敬请各位读者、专家批评指正.

感谢哈尔滨工程大学、哈尔滨理工大学、黑龙江大学、哈尔滨师范大学、哈尔滨商业大学、黑龙江工程学院、黑龙江科技学院、哈尔滨医科大学、齐齐哈尔大学、佳木斯大学、绥化学院、黑龙江农垦职业学院、黑龙江建筑职业技术学院、黑龙江农业工程职业学院等兄弟院校领导的支持,科学出版社高等教育出版中心,哈尔滨工业大学理学院、数学系的领导与老师为这套丛书的出版也付出了努力,在此一并致谢.

王　勇

2007 年 7 月于哈尔滨工业大学

前　言

本书是按照教育部对高等学校工科类本科线性代数课程的基本要求，并结合编者多年的教学实践编写而成的. 本书在注重基本理论知识和基本方法讲解的同时，适当地开拓知识面、注意反映学科的应用，以丰富学生的知识与提高学生的能力. 书中每章配有两套习题，习题(A)重在考查对基本知识的理解，习题(B)重在对基本知识的总结和应用. 书末附有用 Matlab 软件计算的相关命令和解决实际问题的一些数学模型，借以在完成基础理论课学习的基础上，让学生来了解如何应用现代计算手段快速解决实际问题，进而提高其应用理论知识解决实际问题的能力. 书中还给出常用术语的英汉对照，为学生阅读和检索外文文献提供方便.

讲解完本书的 1～5 章需要 32～36 学时，第 6 章可供对数学需求较高的专业选用.

本书由黑龙江科技学院、佳木斯大学、绥化学院三所院校合作编写完成，适用一般高等工科院校各专业学生使用. 本书的编写工作得到了科学出版社的大力支持，黑龙江科技学院宋作忠教授、母丽华教授、蔡吉花教授仔细地审阅了书稿并提出了宝贵的意见，谨在此一并表示衷心的感谢.

尽管编者付出了很多努力，但由于水平所限，书中难免存在着欠缺和不足，恳请各位同行不吝指正，从而使我们能够不断改进、完善与提高.

编　者

2007 年 5 月 8 日

目　　录

第 1 章　行　列　式

行列式(determinant)的理论起源于线性方程组，是一个重要的数学工具，在数学的许多分支及其他学科的研究中都有广泛的应用. 本章主要介绍全排列、逆序数、n 阶行列式的定义，研究 n 阶行列式的性质、计算方法及用行列式求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

1.1　全排列及其逆序数

为了给出 n 阶行列式的概念，这里引入全排列与逆序数的概念.

定义 1.1　把 n 个不同元素排成一列，称为这 n 个元素的全排列(total permutation)，简称排列(permutation).

例如，(1) 自然数 1,2,3 构成的不同排列有 3!，共 6 种：

$$123,231,312,132,213,321.$$

(2) 有 n 个互异元素 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 构成的不同排列有 $n!$ 种.

定义 1.2　在 n 个不同的自然数中，规定从小到大的次序为标准次序. 设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为这 n 个自然数的一个排列. 如果某两个元素的先后次序与标准次序不同时，称这两个元素之间有 1 个逆序(inverse order). 排列中逆序的总和称为排列的逆序数，记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

例如，在 321 这个排列中，构成逆序的数对有 32,31,21，因此 $\tau(321)=3$. 在 51423 这个排列中，构成逆序的数对有 51,54,52,53,42,43，因此 $\tau(51423)=6$.

定义 1.3　逆序数为偶数的排列称为偶排列(even permutation)，逆序数为奇数的排列称为奇排列(odd permutation).

例如，321 为奇排列，51423 为偶排列. 按照逆序数的定义，计算逆序数可以从排列的右边算起，计算一共有多少个大数排列在小数的前面. 例如，我们要求排列 2754613 的逆序数，可以这样计算：

(1) 3 前面有 6,4,5,7 四个大于 3 的数；

(2) 1 前面有 6,4,5,7,2 五个大于 1 的数；

(3) 6 前面有 7 比 6 大；

(4) 4 前面有 5,7 两个大于 4 的数；

(5) 5 前面有 7 比 5 大.

至此，再没有大数排在小数的前面了，于是

$$\tau(2754613) = 4 + 5 + 1 + 2 + 1 = 13,$$

这是一个奇排列.

定义 1.4　把一个排列中某两个元素的位置互换，而其余元素的位置不动，就得到一个新的排列，这样从一个排列到另一个排列的变换称为对换（transposition），元素 i 与 j 的对换记作(i,j). 将两个相邻的元素对换，称为相邻对换.

例如，经过 1,2 对换，排列 321 就变成 312，我们知道 321 是奇排列，而 312 是偶排列，这样施行一次对换改变了排列的奇偶性.

定理 1.1　一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证　先证相邻对换的特殊情形. 即排列

$$\cdots ij \cdots$$

经相邻对换(i,j)，变成排列

$$\cdots ji \cdots$$

比较上面两个排列的逆序数. 显然，i,j 以外的数彼此间的逆序情况在两个排列中是一样的；i,j 以外的数与 i 或 j 的逆序情况在两个排列中也是一样的. 现在看 i，j，若 $i<j$，则经对换(i,j)后，逆序数增加 1，即后一排列的逆序数比前一排列多 1；若 $i>j$，则经对换(i,j)后，逆序数减少 1，即后一排列的逆序数比前一排列少 1. 无论哪种情形，都改变了排列的奇偶性. 这就证明了相邻对换改变排列的奇偶性.

再证一般情形. 设排列

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots$$

经对换(i,j)，变成排列

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots$$

容易看出，这一对换(i,j)可以通过如下 $2s+1$ 次相邻对换来实现. 即将排列

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots$$

经 s 次相邻对换变成如下排列

$$\cdots k_1k_2\cdots k_sij\cdots$$

再经 $s+1$ 次相邻对换变成排列

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots$$

由于每作一次相邻对换便改变排列的奇偶性，而 $2s+1$ 为奇数，因此排列$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots$与排列$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots$的奇偶性相反. 这就证明了在一般情形下，对换改变排列的奇偶性.

推论　奇(偶)排列变成标准排列的对换次数为奇(偶)数.

1.2　二阶行列式和三阶行列式

在许多实际问题中，人们常常会遇到求解线性方程组的问题. 我们在初等数学中曾经学过如何求解二元一次方程组和三元一次方程组. 例如，二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$x_i(i=1,2)$表示未知量，$a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$表示未知量的系数，$b_i(i=1,2)$表示常数项. 当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，用消元法可求得方程组(1.1)的唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.2}$$

1.2.1　二阶行列式

定义 1.5　我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式(second order determinant). 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.4}$$

其中，$a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为行列式的元素. a_{ij} 的下标 i 表示它所在行的序号，称为行标，a_{ij} 的下标 j 表示它所在列的序号，称为列标.

二阶行列式的计算遵循如图 1.1 所示的对角线法则(diagonal principle).

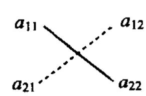

图 1.1

图 1.1 中实线称为行列式的主对角线，虚线称为行列式的副对角线，二阶行列式等于它的主对角线上两个元素的乘积减去副对角线上两个元素的乘积.

根据定义，方程组(1.1)的唯一解可以用行列式的形式表示：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.1)的唯一解可简单表示为 $x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2)$，其中，$D$ 称作方程组(1.1)的系数行列式，$D_j(j=1,2)$，就是用方程组的常数列代替系数行列式的第 j 列所得的行列式.

例 1.1　求解方程组 $\begin{cases} 2x_1-x_2=5, \\ 3x_1+2x_2=11. \end{cases}$

解　计算二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=7,\quad D_1=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix}=21,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}=7,$$

由 $D=7\neq 0$，知方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=3,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=1.$$

例 1.2　设 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$，问：(1)当 λ 为何值时 $D=0$；(2)当 λ 为何值时 $D\neq 0$.

解

$$D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda,$$

若 $\lambda^2-3\lambda=0$，则 $\lambda=0,\lambda=3$. 因此可得：

(1) 当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$ 时，$D=0$；

(2) 当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq 3$ 时，$D\neq 0$.

1.2.2　三阶行列式

对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.5}$$

我们引入三阶行列式的定义.

定义 1.6　我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

称为三阶行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.7}$$

三阶行列式的计算遵循如图 1.2 所示的三角形法则(triangle principle). 三条实线看作是平行于主对角线的联线，实线上的三个元素的乘积赋予"+"号，三条虚线看作是平行于副对角线的联线，虚线上的三个元素的乘积赋予"−"号.

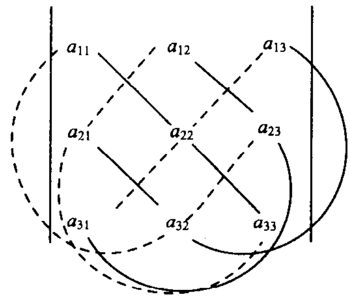

图 1.2

例 1.3 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

解 $D=2\times(-5)\times1+(-4)\times3\times1+1\times1\times(-1)-1\times(-5)\times1-1\times(-4)\times1-2\times(-1)\times3=-8.$

例 1.4 若平面上三条不同的直线 $ax+by+c=0$, $bx+cy+a=0$, $cx+ay+b=0$ 相交于一点，则 $a+b+c=0$.

证 由三条不同的直线相交于一点，有

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=-a^3-b^3-c^3+3abc$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0.$$

因为已知的三条直线为不同的三条直线，所以 a,b,c 不完全相同，故 $a+b+c=0$.

1.3 n 阶行列式

在引入二阶、三阶行列式的概念以后，二元、三元一次方程组的解可以有简单明了的表示，所以我们希望能用行列式把一般的 n 元一次方程组的解表示出来，因此，我们引入 n 阶行列式的概念.

观察二阶行列式和三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

可以发现如下的一些规律：

(1) 项数正好是阶数的阶乘，即二阶行列式的项数为 2!，三阶行列式的项数为 3!；

(2) 每一项都是由每一行每一列的一个元素组成的乘积，而且这些元素是取自不同的行和不同的列；

(3) 带"+"号和"−"号的项数各占一半，而且当行标依自然顺序排好以后，其符号与列标排列的逆序数有关，偶排列的带"+"号，奇排列的带"−"号.

因此，二阶、三阶行列式可分别写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

其中，$\sum\limits_{j_1 j_2}$ 表示对 1,2 两个数的所有排列 $j_1 j_2$ 求和，$\sum\limits_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $j_1 j_2 j_3$ 求和.

根据这个规律，我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.7　n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 n 阶行列式(n-order determinant)，简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$. 它表示所有可能取自不同的行不同的列的 n 个元素乘积的代数和，其值为

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中，$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

或

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

特别地，一阶行列式$|a_{11}|=a_{11}$（注意：这里“| |”不是绝对值）.

例 1.5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 该行列式的特点是主对角线以下的元素全为零（以后称这种行列式为上三角行列式）. 根据定义 $D=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，在此行列式中，当 $j_p<p$ 时，元素 $a_{pj_p}=0$，故在定义式中，可能不为零的项中的任意因子 a_{pj_p} 必须满足 $j_p\geqslant p$，即

$$p_1\geqslant 1, p_2\geqslant 2, \cdots, p_{n-1}\geqslant n-1, p_n\geqslant n.$$

能满足上述关系的列标排列只有一个标准排列 $12\cdots n$，$\tau(12\cdots n)=0$. 故有

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理可得下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

和对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即三角行列式和对角行列式的值都等于主对角线元素的乘积.

例 1.6　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　在 D_n 的 $n!$ 项中,仅剩下一项 $(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$ 可能不为零,该项列标排列的逆序数

$$\tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0 = \frac{n(n-1)}{2},$$

故

$$D_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

1.4　行列式的性质

直接根据行列式的定义来计算 n 阶行列式往往是比较繁琐的. 因此,我们将导出行列式的一些基本性质,利用这些性质不仅可以简化行列式的计算,而且这些性质在行列式的理论研究中也有着非常重要的作用.

定义 1.8　设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将 D 的行与列互换,得到一个新的行列式,记为

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则称 D^{T} 为 D 的转置行列式(transposed determinant).

性质 1　行列式与其转置行列式的值相等,即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

证　设