教育部高职高专规划教材辅导用书

高等数学—线性代数

GAODENGSHUXUEXIANXINGDAISHU

学习指导

XUEXIZHIDAO

编著 张全

中国财政经济出版社

教育部高职高专规划教材辅导用书

高等数学
——线性代数学习指导

张全　编著

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．线性代数学习指导/张全编著．—北京：中国财政经济出版社，2007．9

教育部高职高专规划教材辅导用书

ISBN 978－7－5095－0251－8

Ⅰ．高… Ⅱ．张…Ⅲ．①高等数学－高等学校：技术学校－教学参考资料②线性代数－高等学校：技术学校－教学参考资料 Ⅳ．013 0151．2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 107387 号

中国财政经济出版社出版

URL：http：//www．cfeph．cn

E－mail：jiaoyu@cfeph．cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮政编码：100036

发行电话：88190616 88190655（传真）

北京慧美印刷有限公司印刷 各地新华书店经销

787×960 毫米 16 开 13.75 印张 224 000 字

2007 年 9 月第 1 版 2007 年 9 月北京第 1 次印刷

定价：17.00 元

ISBN 978-7-5095-0251-8/O.0010

（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　言

本书是《高等数学——线性代数》的配套学习指导书，每章都由下列内容组成：第一部分为内容提要，包括学习要点以及重点难点．第二部分为学习要求，第三部分为原教材《高等数学—线性代数》的全部练习题详解，包括分析与解答．第四部分为同步练习．由于高职高专学生有可能接受继续教育，所以本书对近年来高等教育自学考试高等数学（二）线性代数部分试题也进行了详细的分析与解答，学生可以将这一部分作为综合练习与自测题使用。高等教育自学考试是国家组织的权威性的标准化综合考试，由专家命题，考题非常具有代表性．

学生在使用本书时应首先自己努力完成练习，然后再参考题解，以便开拓自己的思路，切忌不做练习就直接看答案．考虑到大多数读者的需要，书中的习题解答基本上采用常规的方法．但是，线性代数这门课程的特点就在于它的灵活性，本书所对应的教材在编排习题时也有意安排了许多比较灵活的习题，因此，我们在处理习题时兼顾了解题方法的灵活性与多样性，许多习题我们都给出了多个解法．对于一些有技巧性的方法，读者不必感到高深莫测，只要熟练掌握基本知识，多做习题，自然可以熟能生巧，达到得道忘技的程度．

编　者

2007年4月

目录

第一章

三维空间的向量　平面与直线

一、内 容 提 要

本章内容包括三维向量及其运算、平面方程、直线方程.

向量的定义：

几何形式：既有大小又有方向的量，其大小称为**长度**或**模**，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模用 $|\boldsymbol{a}|$ 表示；

代数形式：三元有序数组 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$；其中 a_i 称为 $\boldsymbol{a}$ 的第 i 个**分量**. $i=1, 2, 3$.

(a_1, a_2, a_3) 同时也是向量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标系 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 下的**坐标**.

向量**相等**：

几何形式：大小相等，方向一致；

代数形式：对应分量相等.

零向量的定义：零向量用 $\boldsymbol{o}$ 表示

几何形式：模为零的向量；

代数形式：$(0, 0, 0)$.

$\boldsymbol{a}$ 的**负向量** $-\boldsymbol{a}$ 的定义：

几何形式：与原向量长度相等，方向相反的向量；

代数形式：$-\boldsymbol{a}=(-a_1, -a_2, -a_3)$.

向量加法——向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的定义：

几何形式：将向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点，以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，$\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量（称为三角形法则）；

代数形式：对应分量相加.

数乘向量——实数 k 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $k\boldsymbol{a}$ 的定义：

几何形式：规定 $k\boldsymbol{a}$ 是个向量，其长度与方向规定如下：$|k\boldsymbol{a}| = |k||\boldsymbol{a}|$；若 $k>0$，$k\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，若 $k<0$，$k\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反.

代数形式：$k\boldsymbol{a}=(ka_1, ka_2, ka_3)$.

$\boldsymbol{r}$ 可以表示为 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的**线性组合** $\boldsymbol{r}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$，并且表示方法是惟一的. 三元有序数组 (a, b, c) 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标，记作 $\boldsymbol{r}=(a, b, c)$.

无论几何形式或代数形式的向量及其线性运算所满足的性质是完全一致的.

八条线性运算公理系统：

(1) 加法满足交换律；

(2) 加法满足结合律；

(3) 对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{a}$；

(4) 在三维空间中任意向量都存在负向量；

(5) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；

(6) $(kl)\boldsymbol{a}=k(l\boldsymbol{a})$；$k, l$ 是任意两个实数；

(7) $(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$；

(8) $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$.

几条主要性质：

零向量的惟一性——在全部三维向量中，只存在惟一一个零向量.

负向量的惟一性——任意向量只有惟一一个负向量.

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$；

对于任意实数 k，$k\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}$；

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$；

消去律：如果 $k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$，那么，$k=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$ 中至少有一个成立.

向量的减法：

规定 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，向量减法不被看作是个独立的运算. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的几何意义是将 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点，以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量.

向量的内积：

几何形式：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$；

代数形式：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$；

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

两向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是：

存在不全为零的实数 λ_1, λ_2, 使 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$.

三向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是：

存在不全为零的实数 λ_1, λ_2, λ_3, 使 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{o}$.

直线上所有向量可以被这条直线上一个非零向量线性表出，并且表示方法是惟一的.

平面上所有向量可以被这个平面上两个不共线的向量线性表出，并且表示方法是惟一的.

空间任意向量可以被三个不共面的向量线性表出，并且表示方法是惟一的.

平面方程与直线方程

平面的点法式方程：$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.
向量 $\boldsymbol{n}=(a, b, c)$称为平面的法向量，a, b, c 不同时为 0.

平面的一般方程：$ax+by+cz+d=0$.

平面的法式方程：$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(ax+by+cz+d)=0$.

直线的一般方程：

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}\quad(a_1, b_1, c_1 \text{ 与 } a_2, b_2, c_2 \text{ 不成比例})$$

直线的点向式方程(**亦称对称式方程或标准方程**)：

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

向量 $\boldsymbol{r}=(m, n, p)$称为直线的方向向量，m, n, p 不同时为 0.

直线的参数方程：

$$\begin{cases}x=x_0+\lambda m\\ y=y_0+\lambda n\\ z=z_0+\lambda p\end{cases}$$

直线参数方程的向量形式：$(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+\lambda(m, n, p)$

空间两点 $A(a_1, a_2, a_3)$、$B(b_1, b_2, b_3)$ 之间的距离：

$$d(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(a_i - b_i)^2}$$

空间一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 Π：$ax+by+cz+d=0$ 的距离：

$$d(M_0, \Pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

平面与平面的位置关系

平面 Π_1：$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ 的法向量为：$\boldsymbol{n}_1=(a_1, b_1, c_1)$，

平面 Π_2：$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 的法向量为：$\boldsymbol{n}_2=(a_2, b_2, c_2)$，

若 $\boldsymbol{n}_1 \neq \lambda\boldsymbol{n}_2$，两平面相交．

若 $\boldsymbol{n}_1 = \lambda\boldsymbol{n}_2$，两平面平行，此时若 Π_1 上的点满足 Π_2，两平面重合．

直线与直线的位置关系

设直线 l_1 与 l_2 的方程分别为

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$

两直线共面：1. 重合：$\boldsymbol{r}_1 /\!/ \boldsymbol{r}_2 /\!/ \overrightarrow{M_1M_2}$；其中 $\boldsymbol{r}_1=(m_1, n_1, p_1)$，$\boldsymbol{r}_2=(m_2, n_2, p_2)$

2. 平行而不重合：$\boldsymbol{r}_1 /\!/ \boldsymbol{r}_2$ 但与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 不共线；

3. 相交：$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 不共线但方程 $\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2=\overrightarrow{M_1M_2}$ 有解．

异面：$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 不共线且方程 $\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2=\overrightarrow{M_1M_2}$ 无解．

直线与平面的位置关系

直线 l 的方程为 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$，$\boldsymbol{r}=(m, n, p)$

平面 Π 的方程为：$ax+by+cz+d=0$，$\boldsymbol{n}=(a, b, c)$

1. 直线与平面相交：$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\neq 0$；
2. 直线在平面上：$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=0$，$ax_0+by_0+cz_0+d=0$；
3. 直线在平面外：$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=0$，$ax_0+by_0+cz_0+d\neq 0$.

二、学习要求

第一章的研究对象是三维向量空间，首先讨论三维空间的向量及其运

算，然后利用向量方法讨论平面与空间直线．这部分内容本来不包括在传统的线性代数教材之中，但是，了解三维空间却可以帮助我们更好地掌握线性代数的知识．线性代数的主要研究对象是 n 维向量空间，三维空间只不过是一个背景材料．但是，三维空间却是一个直观的、可以触摸的空间．线性代数本来就是人们对三维空间的研究结果的推广，是从三维空间这个直观的材料上抽象出来的．长期以来，我国的线性代数教学完全脱离几何，使得这门学科以抽象著称，让很多人望而生畏．这种情况近年来有很大的改善，随着高等学校数学基础课教学体系改革的深入，线性代数的教学越来越融入几何的内容．读者在学习第一章的内容时，首先要形象地了解三维空间中向量的概念，建立起一个几何的三维向量空间，其中向量的定义，向量的运算——加法、数乘、内积，以及长度、角度等都是使用几何的手段建立的，但是在引进坐标系之后，这个几何的对象就神奇地转化为代数的对象，了解这个过程可以帮助读者在后面学习线性代数的其他内容时可以借助于直观的背景材料．

在本章中读者应该注意到，三维向量及其相关概念以几何形式与代数形式出现．几何形式直观，便于理解，而代数形式简捷，并且可以容易地推广到高维空间．这两种形式通过向量在坐标系下的坐标联系起来．学生在学习这一章时要充分利用三维空间的直观形象，结合中学立体几何知识，使得对三维空间有充分的认识．要理解三维向量从几何表示向代数表示的过渡，理解坐标系在这一过程中所起的作用．

三、教材习题详解

练习一

1. 以一个圆的圆心为起点，圆周上各点为终点的向量是否相等？

分析：根据向量相等的定义，只有长度相等、方向一致的向量才是相等的．

解答：任何两个都不相等．因为方向不一致．(参看图 1－1)

2. 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，求 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$．

分析：这是利用向量加法的三角形法则用给定的向量表示其他向量．

解答：如图 1－2，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}$．

∵ 平行四边形对角线互相平分，

∴ $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$；$\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$；$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

∴ $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

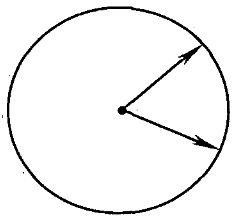

图 1-1

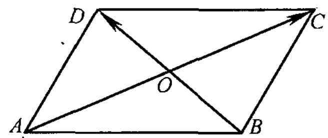

图 1-2

3. 讨论下列式子成立的几何条件.

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

(4) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；(5) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$；(6) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$.

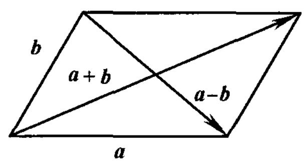

图 1-3

分析：这是关于向量的模的一些等式与不等式，应该利用向量加法的几何法则借助图形加以讨论.

解答：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 分别是以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为两邻边的平行四边形对角线(参看图 1-3)，

(1) 只有平行四边形是矩形时，对角线相等. 所以，当且仅当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

通过比较两条对角线的长度，可以知道：

(2) $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}><\frac{\pi}{2}$；

(3) $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>\geqslant\frac{\pi}{2}$；

参看图 1-4，将 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 放在同一直线上观察，可以看出：

(4) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同向；

(5) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 反向且 $|\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|$；

(6) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 反向.

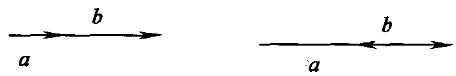

图　1-4

4. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 都是非零向量，并且任意两个不共线，但 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线. 证明：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{o}$.

分析：向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是：存在不全为零的实数 λ_1, λ_2，使 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$. 此题中，由于三个向量都不是零向量，所以，也可以使用数轴原理.

证明：$\because$ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/\boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})/\!/\boldsymbol{a}$, 并且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{o}$

$\therefore$ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mu\boldsymbol{a}$.

两式相减，得到：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{c}-\mu\boldsymbol{a}$.

即：$(1+\mu)\boldsymbol{a}=(1+\lambda)\boldsymbol{c}$.

$\because$ $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不共线，

$\therefore$ $1+\lambda=0$, $1+\mu=0$,

$\lambda=-1$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$. 即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$

5. 用向量方法证明梯形两腰中点连线平行于底边并等于两底边和的一半.

分析：参考教材第一章第一节例 1，将梯形中有关线段表示成向量，然后将用两腰中点连线作成的向量用其他向量的线性组合表示，利用向量的相等关系消去梯形的腰.

证明：如图 1-5：

$\because$ $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$,

$\therefore$ $2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED})+(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CF})$.

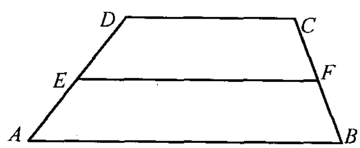

图　1-5

$\because$ E, F 分别为 AD, BC 中点，

$\therefore$ $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED}=\boldsymbol{o}$, $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{o}$.

$\therefore$ $\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.

因为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 是同向的向量，

$$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|$$

即 EF 平行于底边并等于两底边和的一半.

6. $A(1,\ -1,3)$, $B(-2,0,5)$, $C(4,\ -2,1)$ 三点是否共线?

分析:考查三点是否共线,可以将这三点连接成两个向量,如果这两个向量共线,由于它们有一个公共点,那么,这三点在同一直线上.

解答:$\overrightarrow{AB}=(-3,1,2)$, $\overrightarrow{AC}=(3,\ -1,\ -2)$. $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}$,

所以 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$. 三点共线.

7. 证明:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2)$

分析:此题实际上是平面几何中余弦定律的一个变化. 利用向量内积的性质以及$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 将等式右边展开即可.

证明:等式右边 $=\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2)$

$$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}))$$

$$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}))$$

$$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

8. $A(4,1,9)$, $B(10,\ -1,6)$, $C(2,4,3)$;证明三角形 ABC 是等腰三角形.

分析:等腰三角形两边相等,所以,只要求出三角形三边长度进行比较即可.

证明:$|AB|^2=(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2=49$, $|AC|^2=(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2=49$,

$\because$ $|AB|=|AC|$

$\therefore$ 三角形 ABC 是等腰三角形.

9. $\boldsymbol{a}=(1,2,1)$, $\boldsymbol{b}=(-1,1,1)$;$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=8$, 求 $\boldsymbol{c}$.

分析:9-12 题都是将所给几何条件转化成代数方程,然后求解方程或方程组,求出未知向量的坐标. 常用的结论有:两向量正交的充分必要条件是内积等于零,两向量共线的充分必要条件是对应分量成比例等.

第 9 题解答:设 $\boldsymbol{c}=(x,\ y,\ z)$

$\because$ $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$, 并且 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=8$,

$$\therefore \begin{cases} x+2y+z=0 \\ -x+y+z=0 \\ x-2y+z=8 \end{cases}$$

解得 $\boldsymbol{c}=(1,\ -2,\ 3)$

10. $\boldsymbol{a}=(k,\ 4,\ -1)$, $\boldsymbol{b}=(-1,\ 2,\ l)$. k、l 为何值时, $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$? k、l 为何值时, $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$?

解答: 令 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 得到 $-k+8-l=0$, 即 $k+l=8$ 时 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;

令 $\frac{k}{-1}=\frac{4}{2}=\frac{1}{l}$, 得到 $k=-2$, $l=-\frac{1}{2}$ 时, $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

11. $a=(4,\ -3,\ 5)$, 在 XOY 平面上求向量 $\boldsymbol{b}$, 使 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 并且 $|\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{b}|$.

解答: 设 $\boldsymbol{b}=(x,\ y,\ z)$

$\because$ $\boldsymbol{b}$ 在 XOY 平面上, $\therefore z=0$;

$\because$ $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,

$\therefore$ $4x-3y=0$;

$\because$ $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,

$\therefore$ $x^2+y^2=4^2+3^2+5^2$.

$\therefore$ $\boldsymbol{b}=\pm\sqrt{2}(3,\ 4,\ 0)$

12. $\boldsymbol{a}=(2,\ 1,\ -1)$, $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$, 求 $\boldsymbol{b}$.

解答: 设 $\boldsymbol{b}=(x,\ y,\ z)$

$\because$ $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,

$\therefore$ $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$;

$\because$ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3=3$,

$\therefore$ $2x+y-z=3$;

$\therefore$ $\boldsymbol{b}=\left(1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

13. 用向量方法证明直径上的圆周角是直角.

分析: 用向量去证明一个角是直角通常是通过将这个角的两边作成向量, 证明这两个向量正交. 一点 C 在以 O 点为圆心, r 为半径的圆上的充分必要条件是 C 点到 O 点的距离等于 r. 此题的关键是如何将直径表示出来.

证法一: 参考图 1-6

设 AB 为圆 O 的直径，C 点在圆上，则向量

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{o},\ |\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$$

$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC},\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}.$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}&=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\\&=-(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\\&=-(\overrightarrow{OA}^2-\overrightarrow{OC}^2)=0,\end{aligned}$$

即$\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$.

此题也可以使用坐标来证明.

方法二：参考图 1－7

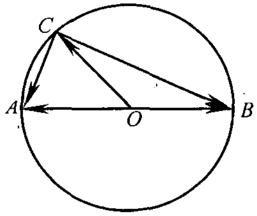

图 1－6

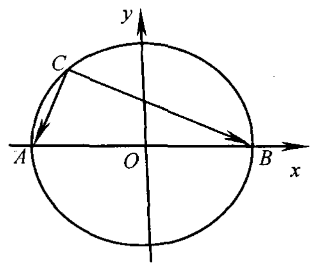

图 1－7

建立坐标系$[O;x,\ y]$，使 O 点为圆心，直径 AB 在 x 轴上，设圆 O 的半径为 r. 则 A、B、C 三点坐标分别为$(-r,\ 0)$，$(r,\ 0)$，$(x,\ y)$；C 点在圆 O 上的充分必要条件是 $x^2+y^2=r^2$.

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(x+r,\ y)\cdot(x-r,\ y)=x^2-r^2+y^2=0.$$

即$\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$.

14. 用向量方法证明三角形三条高交于一点.

分析： 证明三条高交于一点就是证明三条高所在的直线交于一点，通常证明三条直线交于一点可以将此三个直线方程联立，求证解惟一. 但是此题是个一般性问题，方程的系数只能用字母表示，因此，这样处理比较麻烦. 我们换一个思路，先让两条高交于一点，然后作第三个顶点与此交点的连线，证明这条连线垂直于第三边.

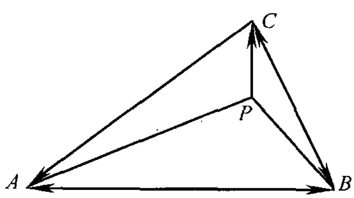

图 1－8

证明： 设三角形 ABC 的顶点坐标分别为 A，B，C，三条对边用向量表示

分别为：$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{AB}$.

设 A，B 两顶点的高交于一点 P，作向量$\overrightarrow{PC}$；以下证明$\overrightarrow{PC}\perp\overrightarrow{AB}$.

分别记　$\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC}$为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，

则$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

$\because$　$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{CA}$，

$\therefore$　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$，$\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0$，

即 $\boldsymbol{ac}=\boldsymbol{ab}$，$\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{ba}$，

$\therefore$　$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=0$，

即 $\overrightarrow{PC}\perp\overrightarrow{AB}$.

利用内积在几何上表示投影这一概念，读者不难从几何的角度理解上述证明.

15. $A(4, \sqrt{2}, 1)$，$B(3, 0, 2)$. 求$\overrightarrow{AB}$的模与方向余弦.

解答：$\overrightarrow{AB}=(-1, -\sqrt{2}, 1)$，

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2;$$

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)=\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

16. 求经过三点 $M_1(2, -1, 3)$，$M_2(0, -1, 2)$，$M_3(1, 0, 3)$ 的平面方程. 讨论若三点在同一直线上时，求平面方程过程中会发生什么问题?

解答：方法一：待定系数法

设此平面方程为 $ax+by+cz+d=0$，将三点坐标代入，得到 $a=\frac{d}{5}$，$b=\frac{d}{5}$，$c=-\frac{2d}{5}$，取 $d=5$，得到所求平面方程为：

$$x+y-2z+5=0.$$

方法二、作点法式方程：

设所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a, b, c)$，

$\because$　$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_1M_2}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_1M_3}$

$\therefore$　$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0$，

得到方程组

$$-2a-c=0,\quad -a+b=0$$

取 $a=1$，得到一组解 $\boldsymbol{n}=(1, 1, -2)$，取点 $M_1(2, -1, 3)$，得到点法