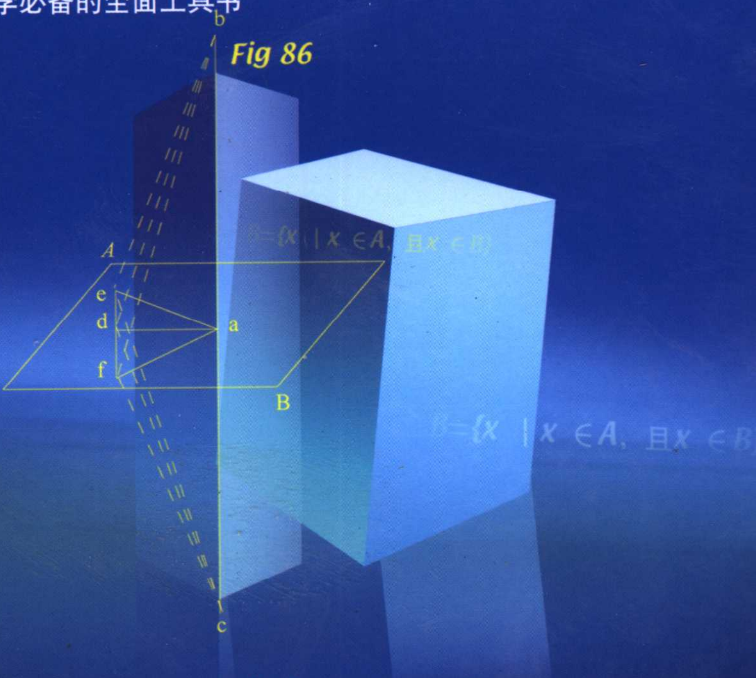
BSK高考命题研究组

超级数学专题题典
简单几何体

□ 紧扣大纲 关注高考

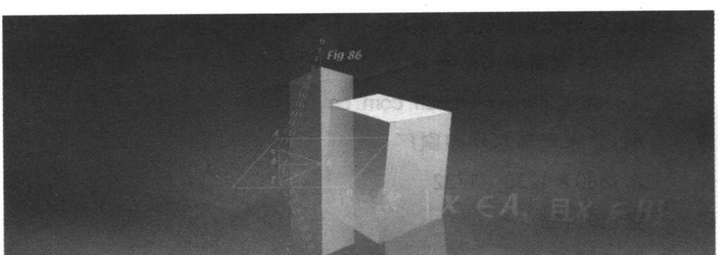
□ 学习数学必备的全面工具书



世界图书出版公司

BSK 高考命题研究组

超级
数学专题题典
简单几何体



世界图书出版公司

上海·西安·北京·广州

图书在版编目(CIP)数据

超级数学专题题典——简单几何体/BSK高考命题研究组编著.
—上海:上海世界图书出版公司,2007.2

ISBN 978-7-5062-5702-2

Ⅰ.超... Ⅱ.B... Ⅲ.简单几何体-高中-习题-升学参考资料
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第153796号

超级数学专题题典——简单几何体

BSK高考命题研究组

出版发行:上海世界图书出版公司

上海市尚文路185号B楼　　邮政编码 200010

公司电话:021-63783016 转发行科

(各地新华书店经销)

http://www.wpcsh.com.cn

印　　刷:北京京都六环印刷厂

开　　本:880×1230　1/32

印　　张:10.125

字　　数:327千字

版　　次:2007年2月第1版 2007年2月第1次印刷

ISBN 978-7-5062-5702-2/G·82

定　　价:11.00元

如发现印刷质量问题,请与印刷厂联系

(质检科电话:010-84498871)

前 言

参考书和教材不同，它并不是学习中的必需品。然而学习好的同学，大部分都看过至少一本参考书，有个别的，甚至看完了市面上所有的参考书，这是为什么呢？

教材都是自成体系，为了配合大纲和课堂教学，其中很多内容讲述得恰到好处，可以说是提供了一个角度很好的剖面。然而要学好一门学科，必须具备三点：首先是清晰的知识框架，其次是翔实的知识内容，再次是巧妙的方法技巧。要达到这三点，从理论上讲，反复阅读教材并练习教材中的习题是可以做到的，只是需要花费较长的时间去领悟。不过，实际情况往往是限于课时进度，同学们用于学习单一科目的时间本就有限，花费在科目内部的具体知识板块的时间更加寥寥，有没有什么捷径可以走呢？答案是没有。虽然没有捷径，但却有另外一条路可供选择，这就是选择合适的参考书。好的参考书能从各种角度去剖析问题，透过现象看本质；或是补充个别知识点，完善整个知识框架；或是通过纵横向比较，揭示出本来就存在，但教科书却未明示的一些规律；或是汇总前人的经验，揭示出你原本就该知道的一些方法技巧。这套《BSK 高中数学专题》正是本着这样的初衷编写的，一共包括函数、数列、不等式等 12 本。

本套书在编排上体现了以下特点：

(1)知识讲解循序渐进

知识点讲解特色突出，全套书中的每一本都分为基础知识和拓展思维两大部分。前一部分针对具体的知识点进行精析细讲，帮助读者牢固扎实地打好知识基础、建立知识体系，使学习、记忆和运用有序化。第二部分“高屋建瓴”，帮助读者在掌握和巩固基础知识的同时，突破难点、提高思维。在力求提高的同时，把握尺度，不出偏题、怪题，使之虽然难度加大，但是并不偏离高考方向。

(2)题目搭配合理有序

习题配备由易到难，层层延伸。基础练习题，能力练习题，历届高考题，精选星级题，3 大部分 6 小块，覆盖高中低档各类题型，层层递进，级级延伸，为复习、备考提供丰富的资料储备；题目讲解不拘一解，详尽规范，引导读者去探究“一题多解”、“多题一解”、“一题多变”和“万变归一”的思路与学习方法，使读者真正能够领悟到举一反三、触类旁通的奥妙。

（3）框架结构明朗清晰

全书按照内容分布各种知识框架图，为读者学习和探索提供参考路标。

（4）成书符合使用习惯

全书采用"知识点讲解"——"对应例题"——"另一个知识点讲解"——"对应例题"的编排模式，更符合授课式的思维习惯。我们还独出心裁地引入了"考频"概念，借助于此知识点在最终高考中所占比例的统计数据来检验自己对这一知识点、这一部分内容，甚至这一类问题的掌握程度，以寻找更合适的复习之道，从而达到优质、有效的复习效果。

（5）自成体系一书多用

本套书完全基于教材，但又不拘泥于教材。基于教材是指教材中的知识点，只要是涉及某专题的，基本上都收录进书，并分别成册；不等同于教材是指本套书并未严格按照教材的章节顺序进行编排，而是把本专题相关内容作为一个子体系加以归纳。这样做的好处不但可以让同学们在短时间内掌握此专题内容，而且还脱离了教材变动的局限性，使全国所有中学生均可选用。

对于正在学习高中数学课程的同学，可以使用本书作为课堂内容的预习复习与补充；对于正在紧张复习，即将投入的高考的同学，使用本书也可作为复习的纲要与熟悉各种题型的战场；而对于高中教育的研究者，本书可以提供一部分研究素材。

由于作者时间和水平所限，疏漏之处在所难免，敬请不吝指正。

BSK 高考命题研究组

2006 年 9 月

目　录

第一篇 知识篇

本专题知识结构图

<table>
<tr><td rowspan="13">简单几何体</td><td rowspan="4">多面体</td><td>多面体简介</td></tr>
<tr><td>棱柱</td></tr>
<tr><td>棱锥与棱台</td></tr>
<tr><td>简单多面体与欧拉公式</td></tr>
<tr><td rowspan="2">旋转体</td><td>圆柱、圆锥与圆台</td></tr>
<tr><td>球</td></tr>
<tr><td rowspan="6">简单几何体的表面积与体积</td><td>截面</td></tr>
<tr><td>表面积与体积的定义与公理</td></tr>
<tr><td>棱柱与圆柱的表面积与体积</td></tr>
<tr><td>棱锥与圆锥的表面积与体积</td></tr>
<tr><td>棱台和圆台的表面积与体积</td></tr>
<tr><td>球的表面积与体积</td></tr>
<tr><td>简单几何体的应用</td><td>简单几何体的应用</td></tr>
</table>

立体几何是高中阶段数学学习的难点之一，它的难不是在于繁复的计算，也不在于艰深的方法，而是在于体系的构造和空间想象能力的拓展. 为什么这么说呢?因为在小学和初中阶段大家建立了牢固的代数观念基础体系，所以高中的代数实际上是初中代数的拓展；但是在几何部分，初中只是建立了基本的平面几何的思想，而且多数是以画图为主，而不是以图形想象为主，平面几何和立体几何的区别就在于平面几何基本上不用怎么去想，可以直接把图画出来，但是立体几何不同，立体几何必须先把空间结构想清楚，然后才能进一步地去想怎样把空间的图形用投影的方法画出来，所以立体几何和平面几何的层次不一样，就像在代数中我们解二次方程和三次方程一样，难度上是有很大的区分的.

虽然如此，但是这也为以前学习不是特别好的同学提供了一个新的机会，因为初中的几何大多数是强调技巧，对于概念的掌握大家实际上是在差不多的水平上，而到了高中几何部分，大家可以通过空间几何的学习进一步掌握和开拓学习方法，很多以前能够用的老方法在这一部分就不一定再适用了，大家可以自己发现新的方法，而且现在的教学体系也的确给予了大家这样的机会，比如说空间向量的引入，如果自己的三角函数部分或者是平面几何部分学的不是太好，那么我们有了替代的方法，就是用向量的计算方法，把几何的东西转化成以代数计算为主的东西，用解析几何的思想解决立体几何的问

题,所以高中的知识面宽了,解决问题的方法也多了.

在讲解篇中,我们着重讲述了传统的立体几何的思维方法,争取先把立体几何的基本概念和想法告诉大家,这样大家才能在解题的时候有基本的依据.另外,我们还强调了基础的方法和基本题型的解法,毕竟只有在掌握了一些方法之后自己才能灵活变通.由于这本书并不是这套书里面立体几何的开始部分,所以我们的讲述以简单几何体的表面积、体积计算为主,辅以借助简单几何体为载体,考查直线和平面的位置关系、距离和角度的综合题.所以我们可以这样说,这本书讲解部分的侧重点在于用分析性很强的语言讲解简单几何体中的平面几何、空间直线和平面理论与简单几何体中的表面积和体积理论.

第一章 多面体

本章知识结构图

<table>
<tr><td rowspan="14">多面体</td><td rowspan="7">多面体</td><td>几何体</td></tr>
<tr><td>多面体</td></tr>
<tr><td>凸多面体和凹多面体</td></tr>
<tr><td>正多面体</td></tr>
<tr><td>拟柱体</td></tr>
<tr><td>数学基本元素中的形元素</td></tr>
<tr><td>表面由正多边形构成的多面体</td></tr>
<tr><td rowspan="7">棱柱</td><td>棱柱</td></tr>
<tr><td>斜棱柱与直棱柱</td></tr>
<tr><td>平行六面体</td></tr>
<tr><td>长方体三度定理及推论
长方体一条对角线长的平方等于一个顶点上的三条棱长的平方和;若长方体对角线与各棱所成的角分别为α、β、γ,与各面所成角的分别为α'、β'、γ',则
$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$,$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$
$\cos^2\alpha'+\cos^2\beta'+\cos^2\gamma'=2$,$\sin^2\alpha'+\sin^2\beta'+\sin^2\gamma'=1$</td></tr>
<tr><td>特殊四棱柱之间的联系</td></tr>
<tr><td>简单几何体中的空间直线与平面</td></tr>
</table>

多面体	棱锥与棱台	棱锥
		正棱锥
		棱锥的斜高
		棱台
		正棱台
		棱台和棱锥相关问题的转化
	简单多面体与欧拉定理	简单多面体
		如何证明欧拉公式
		欧拉公式 设简单多面体的顶点个数为 V、棱数为 E、面数为 F，则有 $V+F-E=2$
		欧拉示性数 欧拉公式中，若令 $f(p)=F+V-E$，那么 $f(p)$ 叫做欧拉示性数
		正多面体的种数 正多面体只有五种：正四面体、正八面体、正六面体、正十二面体和正二十面体

第一节 多面体简介

高考考点与趋势分析

高考中这部分的出题概率不大，若是出题，多为判断类别的客观题，难度不高.

目标 1：了解几何体和多面体的概念；

目标 2：掌握判别能否由面构造一个多面体的方法.

知识点讲解与应用

1. 几何体(考频 3 次，其中，选择题 3 次，填空题 0 次，解答或证明题 0 次)

体是数学基本元素中的一个. 对于一个物体，当只研究它的形状、大小而不考虑其他性质时，我们就说它是几何体，几何体简称为体. 物体的形状大小有时叫做“空间形式”，几何体是只从空间形式的观点来加以考虑的现实物体. 中学几何中研究的几何体只涉及到简单体(由平面围成的)和旋转体(由母线绕轴旋转形成的)及它们的变形. 从运动的观点，“体”可以看成是由“面”运动所占有的空间；而面则可看作是几何体之间的界限.

例 1 试用正三角形纸片经过适当剪拼组成一个正四面体.

分析 正四面体有四个相同的面，那么我们要作出正四面体，就需要在正三角形纸片上剪出四个正三角形. 因此提醒我们可以采用三个中点连线把一个正三角形分成四个相同的小正三角形.

解答 如图 1-1-1 所示，标出 $\triangle ABC$ 各边的中点 D、E、F，然后连结各边的中点 DE、EF、DF，沿它们折起使得 A、B、C 三点重合为 O 就形成一个正四面体 $ODEF$.

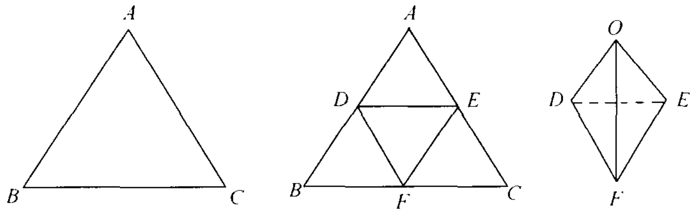


图 1-1-1

点评 这种类似于游戏的题目正是深刻理解空间几何图形的好方法，更可以借此了解一下平面图形与立体图形的相互转化过程.

2. **多面体(考频 1 次，其中，选择题 1 次，填空题 0 次，解答或证明题 0 次)**

由若干个多边形(包括它的平面部分)围成的几何体，叫做多面体. 围成多面体的各个多边形叫做多面体的面，两个面的公共边叫做多面体的棱，若干个面的公共顶点叫做多面体的顶点. 一个多面体至少有四个面. 多面体依照它的面数分别叫做四面体、五面体、六面体等等.

例 2 试构造四面体，使它的四个面都是直角三角形.

分析 考虑到如果三个直角顶点集中到一个顶点上，那么第四个面就只能是锐角三角形，这一点我们稍后会作出证明，所以我们把四个直角分配到两个顶点上.

解答 四面体 $A-BCD$ 中，$CD\perp$ 面 ABC，$AB\perp$ 面 BCD，得到的四面体中 $\angle ACD$、$\angle BCD$、$\angle ABD$、$\angle ABC$ 都是直角，所以就能形成四个直角三角形. 如图 1-1-2.

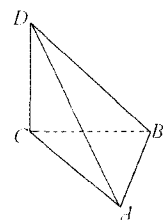


图 1-1-2

点评 注意掌握这种构造的方法，其关键在于直角的分配.

例 3 试证明如果四面体 $ABCD$ 中 AB，AC，AD 两两垂直，那么 $\triangle BCD$ 是锐角三角形.

分析 要证明三角形是锐角三角形，只要证明每个角的余弦大于 0 即可，所以利用余弦定理和勾股定理，本题容易推理.

解答 我们根据锐角三角形的角度定义，任意取 $\triangle BCD$ 中的一个角，比如说 $\angle BCD$.

$$\text{那么 }\cos\angle BCD=\frac{BC^2+CD^2-BD^2}{2BC\cdot CD}$$

$$=\frac{AB^2+AC^2+AC^2+AD^2-AB^2-AD^2}{2\sqrt{AB^2+AC^2}\cdot\sqrt{AC^2+AD^2}}$$

$$=\frac{AC^2}{\sqrt{AB^2+AC^2}\cdot\sqrt{AC^2+AD^2}}>0.$$

因为 $\angle BCD$ 在 $(0,\pi)$ 内，根据三角函数的取值 $\angle BCD$ 是锐角. 同理可证其他的两

个角 $\angle CDB$、$\angle DBC$ 都是锐角，所以 $\triangle BCD$ 是锐角三角形.

点评 本题对例 2 给出了证明，说明了如果三个直角顶点集中到一个顶点上，那么第四个面就只能是锐角三角形，这个结论值得记住.

例 4 如图 1-1-3，四面体 $ABCD$ 中，$\triangle ABC$ 的三边长分别是 $AB=3$，$BC=4$，$AC=5$，面 ACD、ABD、BCD 和面 ABC 所成的夹角度数分别是 $\frac{\pi}{6}$、$\frac{\pi}{4}$、$\frac{\pi}{3}$，求四面体的表面积.

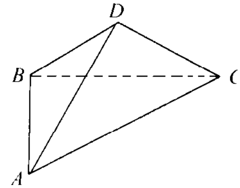


图 1-1-3

分析 四面体的表面积由四个面的面积组成，分别是面 ABC，面 ABD，面 ACD，面 BCD，也就说我们只要求出了这四个面的面积，也就求出了四面体的表面积，故可以考虑使用射影定理.

解答 注意到如图 1-1-4，作出面 BCD 的垂线 DO 之后，连结 OA、OB、OC，就可以得到三个面在 ABC 上的投影，所以根据面积的射影定理，我们就可以得到三个面的面积.

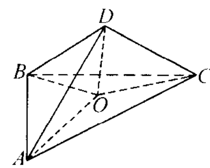


图 1-1-4

在求三个面面积之前，首先要求出 $\triangle OAB$、$\triangle OAC$、$\triangle OBC$ 的面积，首先根据角度关系，我们知道 D 到 AB、AC、BC 的距离之比为 $d_{O-AB} : d_{O-AC} : d_{O-BC} = \cot\frac{\pi}{4} : \cot\frac{\pi}{6} : \cot\frac{\pi}{3}$，

而 $AB : BC : AC = 3 : 4 : 5$，所以

$$S_{\triangle OAB} : S_{\triangle OAC} : S_{\triangle OBC} = 3\cot\frac{\pi}{4} : 5\cot\frac{\pi}{6} : 4\cot\frac{\pi}{3} = 3 : 5\sqrt{3} : \frac{4}{3}\sqrt{3} = 3\sqrt{3} : 15 : 4.$$

由 $S_{\triangle ABC} = \frac{3\times 4}{2} = 6$ 有，$S_{\triangle OAB} = \frac{18\sqrt{3}}{19+3\sqrt{3}}$，$S_{\triangle OAC} = \frac{90}{19+3\sqrt{3}}$，$S_{\triangle OBC} = \frac{24}{19+3\sqrt{3}}$，

进一步可得：$S_{\triangle ADB} = \dfrac{S_{\triangle OAB}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \dfrac{18\sqrt{6}}{19+3\sqrt{3}}$，$S_{\triangle ACD} = \dfrac{S_{\triangle OAC}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \dfrac{60\sqrt{3}}{19+3\sqrt{3}}$.

$$S_{\triangle BCD} = \frac{S_{\triangle OAC}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{48}{19+3\sqrt{3}},$$

故四面体表面积为 $\dfrac{18\sqrt{6}+60\sqrt{3}+48+6\times(19+3\sqrt{3})}{19+3\sqrt{3}} = \dfrac{18\sqrt{6}+78\sqrt{3}+162}{19+3\sqrt{3}}$.

点评 本题考查射影定理的应用，在一些与距离、面积相关的题目中经常要用到此定理.

3. 凸多面体和凹多面体(考频 1 次，其中，选择题 1 次，填空题 0 次，解答或证明题 0 次)

一般地，我们认为，如果一个几何体表面上的任何两个点的连线全在几何体里面，那么图形就是凸的，剩余的情况为凹. 具体到多面体，我们把多面体的任何一个面伸展为平面，如果所有其他各面都在这个平面的同侧，则称这样的多面体叫做凸多面体；如果其他各面分别位于这个平面的两侧，则称为凹多面体.

例 5 $\angle B$ 是不等腰直角 $\triangle ABC$ 的一个角，把 $\angle B$ 围绕中线 AD 旋转 360° 将会形成什么样的图形，是凸的还是凹的？

分析 在 AB 和 BC 边上找到两点 E、F，使得 E、F 到旋转轴 AD 的距离相等，那么实际

上,我们可以看作是如下图形 1－1－6 的旋转,题目就很容易了.

解答 如图 1-1-5 所示,在 $\triangle ABC$ 中,在 AB 和 BC 边上找到两点 E,F,使得 E,F

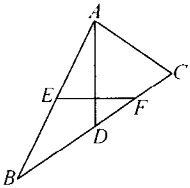


图 1-1-5

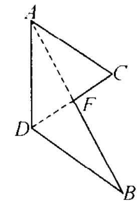


图 1-1-6

到旋转轴 AD 的距离相等,那么实际上,我们可以把它看作是如图 1-1-6 的旋转得到的图形,很显然,绕 AD 旋转后得到的是一个类似于塔状的几何体,注意到 CB' 连线上的所有点都在几何体外面,所以这个几何体是凹的.

点评 判断多面体是凸多面体还是凹多面体,主要是根据定义,把多面体的任何一个面伸展为平面然后看所有其他各面都在这个平面的同侧还是两侧.

4. 正多面体(考频 7 次,其中,选择题 5 次,填空题 1 次,解答或证明题 1 次)

每个面都是相同边数的正多边形,在每个顶点都有同数棱的凸多面体,叫做正多面体.在正多面体里,所有的棱和所有的二面角都是相等的.正多面体只能有五种:用正三角形做面的正多面体只有正四面体、正八面体、正二十面体,它们每个顶点的棱数分别是 3、4、5;用正方形做面的正多面体只有正六面体,它的每个顶点的棱数是 3;用正五边形做面的正多面体只有正十二面体,它的每个顶点的棱数也是 3.不能用边数大于五的正多边形做正多面体的面,否则凸多面角各面角的和将不小于 $360°$,这将与凸多面角的性质定理矛盾.

例 6 如图 1-1-7 为正八面体的上半部分,试求正八面体的相邻两个面所成的二面角的大小.

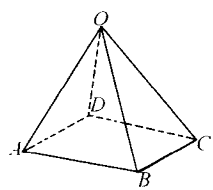


图 1-1-7

分析 为了求出二面角的大小,必须构造出二面角的平面角,所以分别过 A,C 作 OB 的垂线,根据对称性,垂足应该在一点,不妨设成 P,即可求解.

解答 因为我们仅仅考虑角的大小,所以我们不妨假设正八面体的每条边的棱长都是 1.为了求出二面角的大小,必须构造出二面角的平面角,所以分别过 A,C 作 OB 的垂线,根据对称性,垂足应该在一点,不妨设成 P,连结 AC,如图 1-1-8 所示.也就是说,在 $\triangle APC$ 中,$\angle APC$ 就是我们求的二面角的平面角,

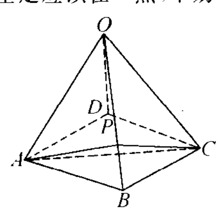


图 1-1-8

根据 $AP = PC = \frac{\sqrt{3}}{2}$,$AC = \sqrt{2}$ 我们得到:

$$\cos\angle APC = \frac{AP^2 + PC^2 - AC^2}{2AP \cdot PC} = \frac{2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\sqrt{2})^2}{2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = -\frac{1}{3},$$

因此 $\angle APC = \pi - \arccos \frac{1}{3}$.

点评 本题考查了平面的二面角的求法在正多面体背景下的应用，只要掌握了二面角的相关知识本题就不难.

例 7 一个正六面体的各面中心是一个正八面体的顶点，试求这个正六面体和正八面体的表面积之比.

分析 假设正六面体的棱长是 1，那么正八面体的棱长就是$\frac{\sqrt{2}}{2}$，然后分别求表面积即可.

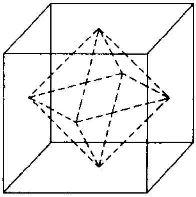


图 1-1-9

解答 如图 1-1-9，假设正六面体的棱长是 1.

那么正八面体的棱长就是$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore S_6 = 1 \times 1 \times 6 = 6, S_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{2} \times 8 = \sqrt{3}$，

所以表面积之比是 $S_6 : S_8 = 6 : \sqrt{3} = 2\sqrt{3} : 1$.

点评 本题的关键在于准确把握题目中的几何图形，通常应该画个图来辅助解题.

5. **拟柱体(考频 0 次，其中，选择题 0 次，填空题 0 次，解答或证明题 0 次)**

所有的顶点都在两个平行平面内的多面体叫拟柱体. 它在这两个平面内的面叫做拟柱体的底面，其余各面叫做拟柱体的侧面. 两底面之间的距离叫做拟柱体的高. 显然，拟柱体的侧面是三角形、梯形或平行四边形. 两底面是矩形，并且它们的对应边平行，这样的拟柱体叫做长方台. 下底面是梯形或平行四边形，上底面变成了与下底面平行的线段，这样的拟柱体叫做楔体. 棱柱、棱锥、棱台都是特殊的拟柱体.

经过拟柱体的高的中点作平行底面的平面截拟柱体所得到的截面叫做拟柱体的中截面.

例 8 已知拟柱体上下底面各有 20 个顶点，而且除了全是上底面或全是下底面上的顶点之外，任何 4 个顶点都不共面，那么拟柱体的侧面包含多少个三角形?

分析 因为任何 4 个顶点不共面，所以侧面只能是全部由三角形构成，注意到以上底面相邻两点连线作为边的三角形有 20 个，下底面相邻两点连线作为边的三角形也有 20 个，所以总共的侧面三角形的个数有 40 个.

解答 拟柱体的侧面包含了 40 个三角形.

点评 本题关键在于对题目中的几何图形的概念有深刻的理解.

例 9 试推导长方台的中截面面积公式.

分析 长方台的中截面也将构成一个长方形，它的两边分别是$\frac{a+s}{2}$，$\frac{b+t}{2}$面积易得.

解答 假设长方台的上底面是边长分别是 a，b 的长方形，下底面是边长分别是 s，t 的长方形，而且 a，s 对应，那么长方台的中截面也将构成一个长方形，它的两边分别是$\frac{a+s}{2}$，$\frac{b+t}{2}$，所以面积是$\frac{(a+s)(b+t)}{4}$.

点评 只要能准确理解截面的相关知识，本题就比较简单.

基础练习题

1. 如图 1-1-10，正三棱锥 $S-ABC$ 的侧棱和底面边长相等，如果 E、F 分别为 AB、SC 的中点，那么异面直线 EF 与 SA 所成的角等于________.

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

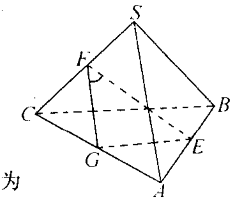


图 1-1-10

2. 设正六棱锥的底面边长为 1，侧棱长为 $\sqrt{5}$，那么它的体积为________.

A. $6\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$　　D. 2

3. 如图 1-1-11，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，若 E、F 分别为 AB、AC 的中点，平面 FEB_1C_1 将三棱柱分成体积为 V_1、V_2 的两部分，那么 $V_1:V_2=$ ________.

4. 一个三角形绕一边的中线旋转 $360°$ 可以形成什么样的多面体？

5. 一个正六面体的各面中心是一个正八面体的顶点，试求这个正六面体和正八面体的体积之比.

6. 一个长方体全面积是 20cm^2，所有棱长的和是 24cm，求长方体的对角线长.

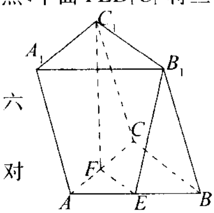


图 1-1-11

（参考答案见 P120）

高屋建瓴

1. **数学基本元素中的形元素**

数学的基本元素分为两类，一类是数元素，一类是形元素. 形的基本元素只有四个：点、线、面、体. 我们就这四个基本元素之间的联系和异同再深入复习一下：

(1) 四个形的基本元素中，最基础的元素是点元素，其他依次为线、面、体；其中高级的元素都可以看作是低级元素在空间的运动轨迹.

(2) 四个形的基本元素，都可看作是点元素的集合.

(3) 四个形的基本元素，除了点之外，其他的三种元素都可以分为两类：

线可以分为直线和曲线，其中曲线可看作是无数条极短的直线（线段）构成，直线则可看作曲率为零的曲线；面可分为平面和曲面，其中平面可看作是直线沿某方向运动而成（运动轨迹），也可看作是许多直线沿一定方向或规则排列而成（直线族），还可看作是处处曲率为零的曲面；曲面可看作是曲线或直线在空间运动而成，也可看作是许多直线或曲线在空间排列而成，还可看作是无数极小的平面的一部分连结组成；体可分为多面体和非多面体，旋转体是非多面体的一种，各面都是平面的一部分，非多面体中

至少有一个面是曲面,非多面体可看作是无数个小的多面体构成的.

(4)形元素之间的关系,在中学阶段,我们只研究位置关系和自身特性,归结到最后是两大问题,一类是特征角问题,一类是长度相关问题.细分下去,特征角问题又可分为平行、垂直、角度问题;长度相关问题又可分为距离、面积、体积问题.

2.表面由正多边形构成的多面体

为了使大家能够更详尽地掌握正多面体的几何特征和空间形状,大家可以参考下图 1-1-12 中是所有的五种正多面体的图形.

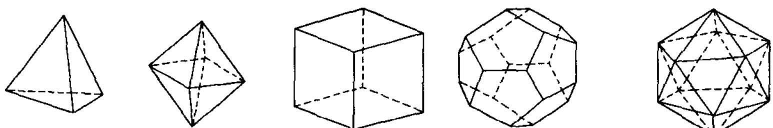


图 1-1-12

其他的以正多边形构成的多面体全都是杂化的,也就是说,正多边形是不纯的,下面是一组化学中常见的空间结构,如图 1-1-13.其中最有名的是 C_{60}. C_{60} 是由 60 个碳原子构成的球形 32 面体,它由 12 个五边形和 20 个六边形构成.其中五边形彼此不相连,只与六边形相连.其实,在化学的最新前沿碳纳米管技术中也要涉及到这种类型的空间多面体结构.

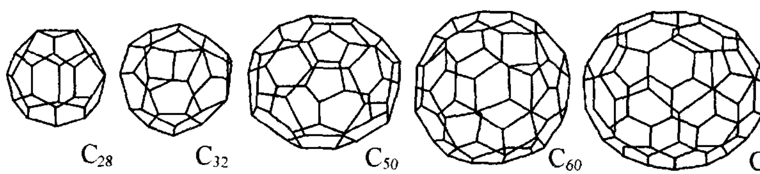


图 1-1-13

能力练习题

1.如果三棱锥 $S-ABC$ 的底面是不等边三角形,侧面与底面所成的二面角都相等,且顶点 S 在底面的射影 O 在 $\triangle ABC$ 内,那么 O 是 $\triangle ABC$ 的________.

A.垂心　　B.重心　　C.外心　　D.内心

2.在棱长为 1 的正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中,M 和 N 分别为 A_1B_1 和 BB_1 的中点,那么直线 AM 和 CN 所成角的余弦值是________.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{2}{5}$

3.一个六面体的各个面和一个正八面体的各个面都是边长为 a 的正三角形,若这两个多面体内切球半径之比是一个既约分数 $\frac{m}{n}$,则积 $m \cdot n =$ ________.

4.分析几种正多面体存在性.