奥博丛书

高中数学奥林匹克系列

浙江奥数网 www.zjaoshu.com

西泠印社出版社

三角函数

【张金良 编著】

奥博丛书

高中数学奥林匹克系列

一试系列

1.解析几何　　虞金龙 编著
2.数列与数学归纳法　　蔡小雄 编著
3.集合与函数　　李惟峰 编著
4.三角函数　　张金良 编著
5.立体几何　　吴国建 编著
6.复数与向量　　吕峰波 编著
7.不等式　　郑日锋 编著
8.排列组合与概率统计　　许康华 编著

二试系列

1.平面几何　　过伯祥 编著
2.不等式与最值　　石世昌 编著
3.组合数学　　徐士英 编著
4.初等数论　　冯祖铭 编著
5.解题研究　　单 墫 编著
6.我怎样解题　　单 墫 编著
7.中学数学竞赛导引　　常庚哲 严镇军 编著
8.数学奥林匹克大集　　黄宣国 编著
9.奥林匹克数学方法选讲　　黄国勋 编著
10.解数学竞赛题的常用策略　　王连笑 编著
11.奥林匹克数学教育的理论和实践　　冯跃峰 编著
12.数学奥林匹克试题背景研究　　刘培杰 编著
13.数学奥林匹克概论　　朱华伟 编著
14.国际数学奥林匹克研究　　熊 斌 田廷彦 编著

奥 博
教 育

奥博丛书
高中数学奥林匹克系列
浙江奥数网 www.zjaoshu.com
西泠印社出版社

三角函数

【张金良、沈顺良○编著】

1234567890123456
012478+7866
234556−4534574.45678786
4534234/43454
213746785467894567
123786453453.1448678
453678964523454(1256456
2123156486115
654651564864

图书在版编目(CIP)数据

高中数学联赛一试. 三角函数/张金良,沈顺良主编. 一杭州:西泠印社出版社,2006.6

(奥博丛书)

ISBN 7-80735-077-6

Ⅰ.高... Ⅱ.①张...②沈... Ⅲ.三角课—高中—解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 064128 号

张金良：浙江省教育厅教研室高中数学教研员，特级教师，浙师大教育硕士兼职导师。长期从事数学教学与竞赛辅导工作，在《数学通报》等全国公开发行的刊物上发表论文50余篇，主编合编20多种教学用书，是“浙江省劳动模范”、“全国苏步青数学教育奖”获得者。

奥博丛书之高中数学奥林匹克一试系列

本册主编　张金良　沈顺良
丛书总策划　徐　莹
丛书审稿　王祖樾　李名德　徐士英　王航平
业务联系　地址：浙江省杭州市学院路 83 号 221 室
电话：0571－85028528　85021510
传真：0571－85028578

丛书序言

一本武功秘籍！

找到它，勤加练习，就能成为武林高手。

这是金庸等人常写的故事。

这套奥博丛书，其中就有若干本或许可以称为解题秘籍。当然，得到它之后，要成为解题高手，还得注意：

一、勤加练习。因为解题是实践性的技能，只能通过模仿和实践来学到它。

二、循序渐进。孔子说："欲速则不达。"不能操之过急。一个问题或一种方法，彻底弄清楚了，再往下看。切忌囫囵吞枣，食而不化。

三、不要迷信书本。"尽信书，则不如无书。"作者也有可能出错。"乾坤大挪移"第七层心法的一十九句就是"单凭空想而想错了的。"其实要成为真正的高手，不能依赖秘籍，而要自创新招。

这套奥博丛书，不只是解题的秘籍。它的作者阵营庞大，视角不尽相同，写法各有特点。或综述，或专题；或讲思想，或谈策略；或提供翔实材料，或介绍背景知识；……。

据我了解，奥博丛书原本并不是一套丛书。它既没有预先设定的宏伟的出书规划，也不能保证其中的每一本都同样精彩。时间，才是考验它们的唯一准则。它不像其他丛书那样，追求在同一时间出齐；而是细水长流，渐渐汇聚成河。除已出的、即出的十余种外，想必还会继续推出新的品种。

开卷有益。相信这套丛书能很好地普及数学知识，增加读者对数学的理解，提高数学的品味(taste)，也就是鉴赏能力。祝愿这套丛书能够伴随读者度过一段愉快的时光。

单　墫

2006 年 3 月 16 日

目　录

第 1 章　三角概念及公式

1.1　任意角三角函数　/ 1
1.2　三角函数公式　/ 6

第 2 章　三角函数的化简和求值

2.1　直接化简和求值　/ 15
2.2　条件化简和求值　/ 24
2.3　求角　/ 37

第 3 章　三角函数的性质

3.1　三角函数的单调性　/ 43
3.2　三角函数的奇偶性　/ 53
3.3　三角函数的周期性　/ 57

第 4 章　三角函数的最值

第 5 章　三角恒等式的证明

第1章 三角概念及公式

1.1 任意角三角函数

知识要点

1. 角的度量：角度制、弧度制及角度与弧度的互化；扇形的弧长和扇形的面积.

2. 角的表示：任意角的表示，象限角和终边相同角的集合表示，将 $2k\pi$，$k\pi$，$\frac{k\pi}{2}$，…作为基本角，可以直观地刻画和表示角的终边.

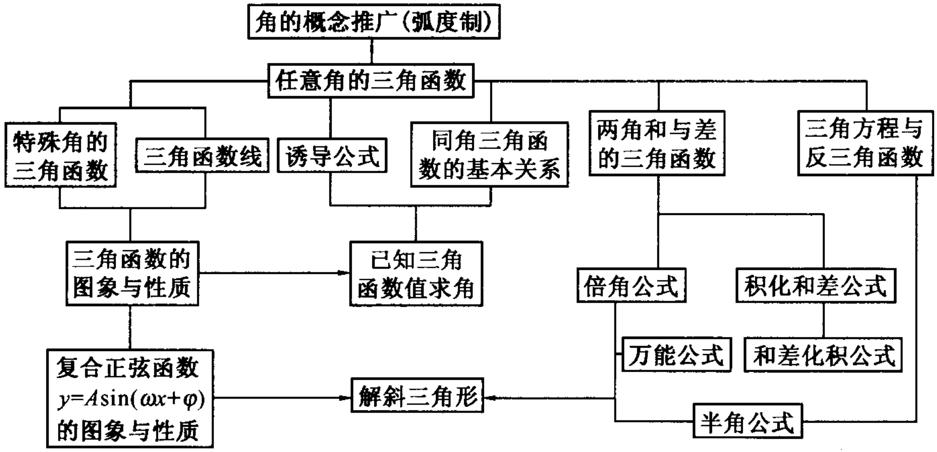
(1) 终边相同的角是指与某个角 α 具有同终边的所有角，它们彼此相差 $2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即$\{\beta \mid \beta=2k\pi+\alpha, k\in\mathbf{Z}\}$，根据三角函数的定义，终边相同的角的各种三角函数值都相等.

(2) 区间角是介于两个角之间的所有角，如 $\alpha\in\left\{\alpha \mid \frac{\pi}{6}\leqslant\alpha\leqslant\frac{5\pi}{6}\right\}=\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$.

(3) 象限角 α 的终边落在第几象限，就称 α 是第几象限角.

(4) α，$\frac{\alpha}{2}$，2α 之间的关系：如若 α 终边在第一象限，则 $\frac{\alpha}{2}$ 终边在第一或第三象限，并且各是其中的一半区域；2α 终边在第一或第二象限或 y 轴正半轴.

3. 三角函数相关知识关系表



例题精解

例 1 若角 A 与角 B 的终边关于 y 轴对称,则 ( )

A. $A=90^\circ$　　B. $A+B=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\cdot 108^\circ, n\in\mathbf{Z}$

C. $A+B=2n\cdot 180^\circ, n\in\mathbf{Z}$　　D. $A+B=(2n+1)\cdot 180^\circ, n\in\mathbf{Z}$

分析 由于角 A 与角 B 的终边关于 y 轴对称,则 $A=n\cdot 360^\circ+180^\circ-B$ $(n\in\mathbf{Z})$,故选 D.

例 2 设 θ 是第二象限角,则必有 ( )

A. $\tan\frac{\theta}{2}>\cot\frac{\theta}{2}$　　B. $\tan\frac{\theta}{2}<\cot\frac{\theta}{2}$

C. $\sin\frac{\theta}{2}>\cos\frac{\theta}{2}$　　D. $\sin\frac{\theta}{2}<\cos\frac{\theta}{2}$

解 由于 α 是第二象限角,$\alpha\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi\right)$,所以 $\frac{\alpha}{2}\in\left(k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$,则可得 $\tan\frac{\theta}{2}>1$,故选 A.

例3 集合 $M=\{x\mid x=k\pi\pm\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{x\mid x=k\cdot\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$,则 M,N 之间的关系为________.

分析 1 集合 M 表示终边在一、三象限平分线和二、四象限平分线上的角,集合 N 表示终边在坐标轴的四个方向、四个象限平分线上的角,故 $M\subseteq$

N.

分析 2 对集合 N 中的 k 按 $4n,4n+1,4n+2,4n+3$ 进行讨论，容易得出 $M\subseteq N$.

注 在理解和表示终边角的集合时，如果能将 $2k\pi,k\pi,\frac{k\pi}{2},\cdots$ 作为基本角，分别对应于终边在 x 轴正方向、x 轴上、坐标轴上、$\cdots$ 的角，用 $2k\pi+\alpha$，$k\pi+\alpha,\frac{k\pi}{2}+\alpha,\cdots$ 可以直观地刻画和表示任意角的终边的集合.

例 4 若角 x 的终边过点 $(-4m,3m)(m\neq 0)$，则 $2\sin x+\cos x$ 的值为________.

解 由于 $x=-4m,y=3m$，则 $r=5|m|$，

当 $m>0$ 时，$\sin x=\frac{y}{r}=\frac{3m}{5m}=\frac{3}{5}$，$\cos x=\frac{x}{r}=\frac{-4m}{5m}=-\frac{4}{5}$，$2\sin x+\cos x=\frac{2}{5}$.

当 $m<0$ 时，$\sin x=\frac{y}{r}=\frac{3m}{-5m}=-\frac{3}{5}$，$\cos x=\frac{x}{r}=\frac{-4m}{-5m}=\frac{4}{5}$，$2\sin x+\cos x=-\frac{2}{5}$.

故 $2\sin x+\cos x=\frac{2}{5}$ 或 $-\frac{2}{5}$.

例 5 已知锐角 x 的终边上一点 A 的坐标为 $(2\sin 3,-2\cos 3)$，则 x 的弧度数为________.

解 首先 $r=2$，$\begin{cases}2\cos x=2\sin 3\\2\sin x=-2\cos 3\end{cases}$，

而 $\begin{cases}\cos x=\sin 3=\sin(\pi-3)=\cos\left(3-\frac{\pi}{2}\right)\\\sin x=-\cos 3=\cos(\pi-3)=\sin\left(3-\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$，

其中 $3-\frac{\pi}{2}$ 为锐角，所以 $x=3-\frac{\pi}{2}$.

说明 本题是三角函数定义与诱导公式的综合.

例 6 若 $\sin\frac{x}{2}=\frac{3}{5}$，$\cos\frac{x}{2}=-\frac{4}{5}$，则 x 角终边在第________象限.

分析　如果仅从正余弦的正负来看，$\frac{x}{2}$ 是第二象限角，即 $2k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<2k\pi+\pi,\ k\in\mathbf{Z}$，这样只能得到 x 在三、四象限或 y 轴负半轴上. 其实由于 $\frac{x}{2}$ 的正余弦值是确定的，因此可以将其范围缩小一半，即由 $\frac{3}{5}<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 得 $2k\pi+\frac{3\pi}{4}<\frac{x}{2}<2k\pi+\pi$，

从而得到 $4k\pi+\frac{3\pi}{2}<x<4k\pi+2\pi$，即 x 角终边在第四象限.

例 7　已知一个扇形周长为 12，面积为 8，则其中心角等于________.

解　设扇形的中心角为 x，半径为 r，则 $2r+xr=12$ 且 $\frac{1}{2}r^2x=8$，解得 $x=1$ 或 4.

例 8　已知一个扇形的周长为 $c(c>0)$，当扇形的中心角为多大时，它有最大面积？最大面积是多少？

解　扇形的半径为 r，中心角为 x，扇形的面积为 S，则 $c=2r+xr$，$r=\frac{c}{2+x}$，所以 $S=\frac{1}{2}r^2x=\frac{c^2x}{2x^2+8x+8}=\frac{c^2}{2x+\frac{8}{x}+8}\leqslant\frac{c^2}{2\sqrt{2x\cdot\frac{8}{x}}+8}=\frac{c^2}{16}$，当 $2x=\frac{8}{x}$，即扇形中心角为 2 弧度时，扇形有最大面积 $\frac{c^2}{16}$.

例 9　已知 a,b,c 为实数，$f(x)=a\sin^2x+b\sin x+c$，且满足(1) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=381$；(2) $\{f(x)\}_{max}=444$；(3) $\{f(x)\}_{min}=364$，求 $f(x)$ 的解析式.

分析　由 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=381$ 得 $a+2b+4c=1524$，分四种情况：

(1) 当 $\left|\frac{b}{2a}\right|\geqslant 1$ 且 $b>0$ 时，$\begin{cases}a+b+c=444\\a-b+c=364\end{cases}$，再与 $a+2b+4c=1524$ 联立无解.

(2) 当 $\left|\frac{b}{2a}\right|\geqslant 1$ 且 $b<0$ 时，$\begin{cases}a+b+c=364\\a-b+c=444\end{cases}$，再与 $a+2b+4c=1524$ 联立得 $a=4,b=-40,c=400$.

(3) 当 $a>0$ 且 $\left|\dfrac{b}{2a}\right|<1$ 时,$\begin{cases}\dfrac{4ac-b^2}{4a}=364\\ a\pm b+c=444\end{cases}$,再与 $a+2b+4c=1524$

联立无解.

(4) 当 $a<0$ 且 $\left|\dfrac{b}{2a}\right|<1$ 时,$\begin{cases}\dfrac{4ac-b^2}{4a}=444\\ a\pm b+c=364\end{cases}$,再与 $a+2b+4c=1524$

联立无解.

综合可得 $f(x)=4\sin^2 x-40\sin x+400$.

任意角三角函数练习

1 $P(-3t,-4t)$是角 A 终边上不同于原点的一点,求 A 的正弦、余弦和正切值.

点 M 在角 A 的终边的反向延长线上,且$|OM|=1$,则 M 的坐标为 ( )

A. $(\cos A,\sin A)$　　B. $(\cos A,-\sin A)$

C. $(-\cos A,\sin A)$　　D. $(-\cos A,-\sin A)$

3 角 A 的终边落在直线 $y=3x$ 上,且 $\sin A>0$,点 $P(m,n)$ 是角 A 终边上一点,P 到原点 O 的距离为 $\sqrt{10}$,则 $m-n=$ ________.

已知 $|\sin\theta|=-\sin\theta$, $|\cos\theta|=-\cos\theta$ 且 $\sin\theta\cos\theta\neq 0$,则点 $P(\tan\theta,\sin\theta)$ 在第________象限.

5 适合 $\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}+\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}=-2\csc x$ 的角的集合为________.

给出下列命题(1) 若 $\alpha\neq\beta$,则 $\sin\alpha\neq\sin\beta$,(2) 若 $\sin\alpha\neq\sin\beta$,则 $\alpha\neq\beta$,(3) 若 $\sin\alpha>0$,则 α 为第一或二象限角,(4) 若 α 为第一或二象限角,则 $\sin\alpha>0$. 上述四个命题中,正确的命题有 ( )

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

1.2 三角函数公式

知识要点

1. 同角三角函数间的基本关系：倒数关系、商数关系、平方关系.

2. 诱导公式：$\frac{k}{2}\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$与$\alpha$的三角函数关系.一般公式为$\sin\left(\frac{k}{2}\pi+\alpha\right)=\begin{cases}(-1)^{\frac{k}{2}}\sin\alpha & k\text{是偶数}\\(-1)^{\frac{k-1}{2}}\cos\alpha & k\text{是奇数}\end{cases}$ $\cos\left(\frac{k}{2}\pi+\alpha\right)=\begin{cases}(-1)^{\frac{k}{2}}\cos\alpha & k\text{是偶数}\\(-1)^{\frac{k+1}{2}}\sin\alpha & k\text{是奇数}\end{cases}$

$\tan\left(\frac{k}{2}\pi+\alpha\right)=\begin{cases}\tan\alpha & k\text{是偶数}\\-\cot\alpha & k\text{是奇数}\end{cases}$变化规律奇变偶不变，符号看象限.通过诱导公式可以将三角函数中的角的形式化简，或者将其中的不同角的形式化为相同形式.

3. 三角函数的其他常用公式：

半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\qquad\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

积化和差

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

和差化积

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

万能公式

$$\sin2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \quad \cos2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \quad \tan2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

三倍角公式

$$\sin3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 4\sin(60^\circ-\alpha)\sin\alpha\sin(60^\circ+\alpha)$$

$$\cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 4\cos(60^\circ-\alpha)\cos\alpha\cos(60^\circ+\alpha)$$

一个重要等式

$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$，其中 $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$，$\theta$ 由点 (a, b) 所在的象限与比值确定.

例题讲解

例 1 已知 $\sin2\theta = a$，$\cos2\theta = b$，$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$，给出 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ 值的五个答案：

① $\dfrac{b}{1-a}$；② $\dfrac{a}{1-b}$；③ $\dfrac{1+b}{a}$；④ $\dfrac{1+a}{b}$；⑤ $\dfrac{a-b+1}{a+b-1}$.

其中正确的是 ( )

A. ①②⑤　　B. ②③④　　C. ①④⑤　　D. ③④⑤

分析 因为 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$，所以角的范围不会在公式的运用中增加限制条件.

由于 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \tan\dfrac{\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{2}$，再运用半角的正切公式等可以得到正确答案为 C.

说明 在运用三角公式过程中，如果没有$0<\theta<\frac{\pi}{4}$的角度范围限制，则还要考虑是否等价.

例2 已知向量$\boldsymbol{a}=(2\cos\alpha,2\sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(3\cos\beta,3\sin\beta)$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$60°$，则直线$x\cos\alpha-y\sin\alpha+\frac{1}{2}=0$与圆$(x-\cos\beta)^2+(y+\sin\beta)^2=\frac{1}{2}$的位置关系是 ( )

A. 相切 B. 相交

C. 相离 D. 随α,β的值而定

解 由于$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$60°$，所以$\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$，圆心$(\cos\beta,-\sin\beta)$到直线$x\cos\alpha-y\sin\alpha+\frac{1}{2}=0$的距离为：$d=\left|\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta+\frac{1}{2}\right|=1>\frac{\sqrt{2}}{2}$，故选C.

例3 $f(x)=a\sin(\pi x+\theta)+b\cos(\pi x+\varnothing)$，其中$a,b,\theta,\varnothing$都是非零常数，且满足$f(2005)=-1$，则$f(2006)=$

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

解 因为$f(2005)=-1$，所以$a\sin(2005\pi+\theta)+b\cos(2005\pi+\varnothing)=-1$，

得到$a\sin\theta+b\cos\varnothing=1$；

而$f(2006)=a\sin(2006\pi+\theta)+b\cos(2006\pi+\varnothing)=a\sin\theta+b\cos\varnothing=1$，故选C.

例4 设$f(x)=\begin{cases}\sin\pi x(x<0)\\ f(x-1)+1(x\geqslant 0)\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}\cos\pi x\left(x<\frac{1}{2}\right)\\ g(x-1)+1\left(x\geqslant\frac{1}{2}\right)\end{cases}$，

试求$g\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+g\left(\frac{5}{6}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)$的值.

解 因为$f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(-\frac{2}{3}\right)+1=\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+1=-\frac{\sqrt{3}}{2}+1$，

$f\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(-\frac{1}{4}\right)+1=\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right)+1=-\frac{\sqrt{2}}{2}+1$，

$g\left(\frac{1}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$g\left(\frac{5}{6}\right)=g\left(-\frac{1}{6}\right)+1=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+1=\frac{\sqrt{3}}{2}+1$,

故原式 $=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\frac{\sqrt{2}}{2}+1=3$.

例 5 已知向量 $\boldsymbol{m}=(1,1)$，向量 $\boldsymbol{n}$ 与向量 $\boldsymbol{m}$ 的夹角为 $\frac{3}{4}\pi$，且 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-1$.

(1) 求向量 $\boldsymbol{n}$；(2) 若向量 $\boldsymbol{n}$ 与向量 $\boldsymbol{q}=(1,0)$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$，向量 $\boldsymbol{p}=\left(2\sin A,\ 4\cos^2\frac{A}{2}\right)$，求 $|2\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}|$ 的值.

解 (1) 设 $\boldsymbol{n}=(x,y)$，由 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-1$，有 $x+y=-1$. ①

由 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 $\frac{3}{4}\pi$，有 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|\cdot\cos\frac{3}{4}\pi$.

$\therefore |\boldsymbol{n}|=1$，则 $x^2+y^2=1$. ②

由 ①② 解得 $\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$，即 $\boldsymbol{n}=(-1,0)$ 或 $\boldsymbol{n}=(0,-1)$.

(2) 由 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 垂直知 $\boldsymbol{n}=(0,-1)$.

$2\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}=\left(2\sin A,\ 4\cos^2\frac{A}{2}-2\right)=(2\sin A,\ 2\cos A)$,

$\therefore |2\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}|=\sqrt{4\sin^2A+4\cos^2A}=2$.

例 6 设 α 为一个给定的锐角，则关于 x 的方程 $(\sin\alpha)^x+(\cos\alpha)^x=1$ 的实数解共有几个？

分析 本题可运用公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 来分析得到. 根据 α 为一个给定的锐角，$0<\sin\alpha<1$，$0<\cos\alpha<1$；当 $x<2$ 时，$(\sin\alpha)^x+(\cos\alpha)^x>(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1$；

当 $x>2$ 时，$(\sin\alpha)^x+(\cos\alpha)^x<(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1$；

当 $x=2$ 时，$(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^x=(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1$.

故方程为一解.

例 7 设 $f(x)=\begin{cases}\tan x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)\\ \cot x\left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right)\end{cases}$，若有 $t_1=(1-2a)\pi$，$t_2=2a\pi$，使得 $f(t_1)>f(t_2)$ 成立，求实数 a 的取值范围.

解 由 $f(t_1)>f(t_2)$，可按单调性分为三种情形，