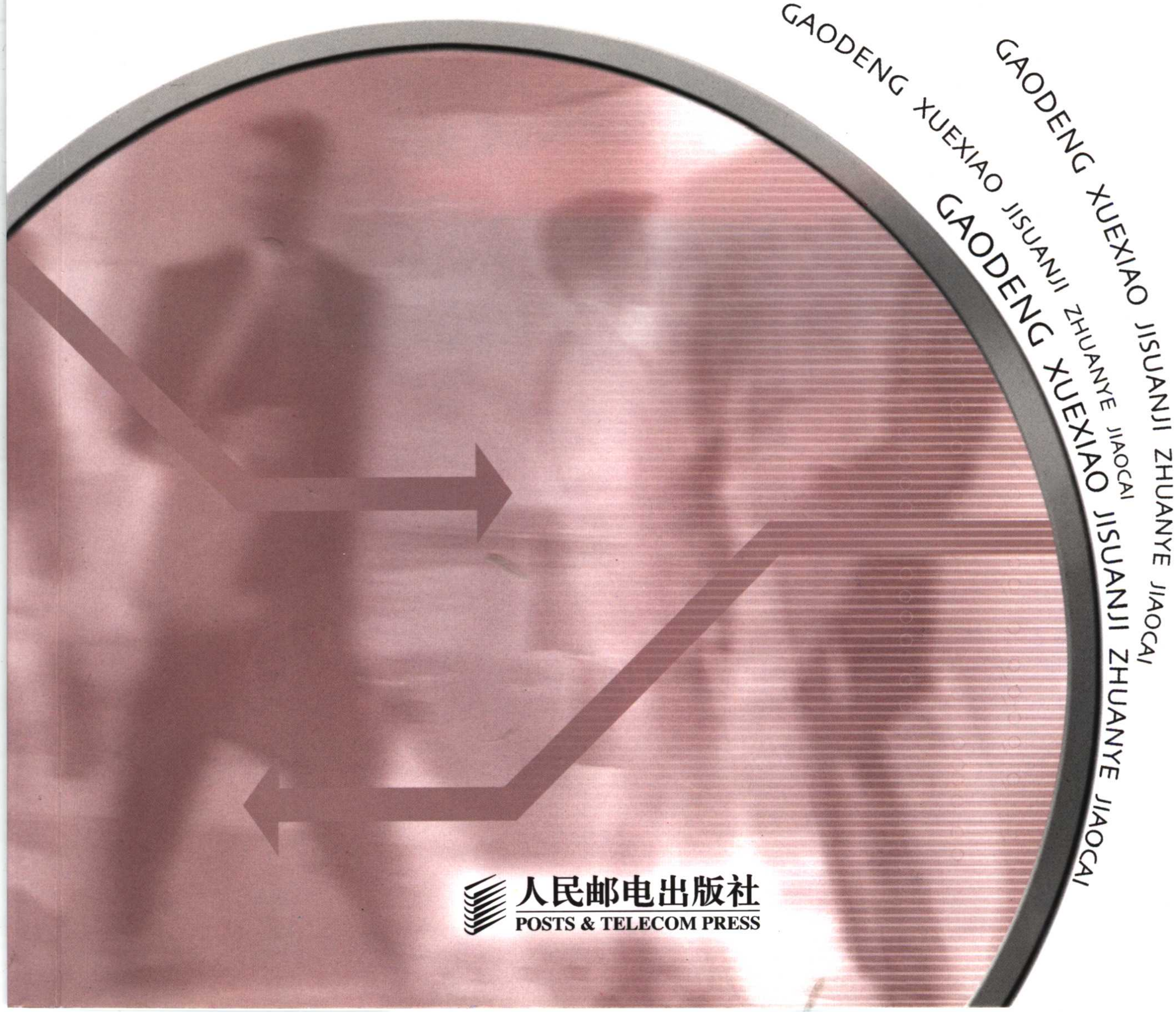
高等学校计算机专业教材

GAODENG XUEXIAO JISUANJI ZHUANYE JIAOCAI

数值计算方法

（第二版）

◎ 刘萍 编



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

数值计算方法

（第二版）

高等学校计算机专业教材

数值计算方法

（第二版）

刘 萍 编

人民邮电出版社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

数值计算方法/刘萍编．—2版．—北京：人民邮电出版社，2007.6
高等学校计算机专业教材
ISBN 978-7-115-15951-9

Ⅰ．数…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．数值计算—计算方法—高等学校—教材　Ⅳ．0241

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第031746号

内容提要

本书是高等学校计算机专业教材。全书共分六章，内容包括：插值方法、贝齐尔曲线和B样条曲线、数值积分、线性代数方程组的解法、线性规划、常微分方程数值解法。本书在叙述基础理论的同时注重现实应用，给出了大量应用实例。为了更好地理解抽象理论，本书设计了数值实验。

本书也可作为普通高等学校计算机专业的教学参考书，也可供计算机应用人员阅读参考。

高等学校计算机专业教材

数值计算方法（第二版）

◆ 编　　刘　萍
　责任编辑　滑　玉

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街14号
　邮编　100061　电子函件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　三河市海波印务有限公司印刷
　新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：11
　字数：258千字　　2007年6月第2版
　印数：1－3 000册　　2007年6月河北第1次印刷

ISBN 978-7-115-15951－9/TP

定价：17.00元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223

第二版前言

随着信息科学和技术的迅猛发展，我国加快了信息技术人才的培养步伐，各高等学校相继增设了计算机、电子信息、通信工程、信息安全等专业。“数值计算方法”课程已经成为这些专业本科生的一门重要的专业基础课程。为了适应教学需要，我们对2002年出版的教材进行了修订，使得这本教材形成以下特色：

一、注重培养学生的几何直观能力。为了使学生掌握数值计算方法，仅仅依靠形式推导是不够的，还应该培养学生的几何直观能力。比如，在“常微分方程数值解法”这章中，本教材的处理方式是将欧拉方法放在方向场中讲解。这使学生首先看到了欧拉折线，然后再给以理论推导。

二、注重培养学生的工程应用能力。为了使学生了解数值计算方法在工程实践中的应用，本教材每章都设计了一节“应用实例”，用于介绍这章所学方法在现实中的应用。比如，在第2章的应用实例中，介绍了复旦大学苏步青教授与有关研究部门合作的例子，将贝齐尔和B样条曲线方法用于汽车外形、涡轮叶片设计的工作。

三、注重培养学生的方法构造能力。如果我们在授课中仅仅满足于学生对数值方法的认可，只需给出最简便的形式推理。但这不能培养学生的方法构造能力，因为学生没有看到方法的产生过程。比如，对牛顿插值公式的推导，最简便的方法就是首先给出插商的定义，然后倒推出牛顿插值公式。但是这样做，学生并不知道为什么会产生插商的概念？本教材处理的方法是，从学生熟悉的1阶公式开始，随着公式递推的进行，自然产生对插商概念的需求。这样，学生经历了概念、公式的产生过程，这对培养学生的方法构造能力是十分有益的。

四、注重培养学生的算法设计能力。从数值公式到编程上机计算，需设计算法流程。为了培养学生的算法设计能力，不宜将流程图直接给出，而是引导学生思考这个转化过程。比如，本教材对埃特今插值算法的介绍，就是从埃特今插值公式向算法转化要考虑的三个问题开始，逐步将埃特今插值公式转变成算法中的公式的。

五、注重学生对抽象概念的理解能力。同阶无穷小量是在高等数学中学习的概念，在介绍数值积分的逐次分半加速法时，需要用到这一概念讨论不同公式的收敛速度。为了使学生对这一抽象概念有直观的了解，本教材设计了数值试验题目，学生通过观察试验结果，可加深对抽象概念的理解。

六、注重对现代数值方法的介绍。在介绍了古典插值方法后，本教材介绍了近代理论：贝齐尔曲线和B样条函数，并为学生设计了编制丰富多彩图形的题目。同样，在介绍了古典的线性代数方程组的解法后，还介绍了广泛应用的近代方法：线性规划。

由于作者水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正。

编　者

2007年2月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 一 版 前 言

按照计算机处理信息的特点，计算机应用可以分成两类。一类是非数值应用，比如科技文献检索、银行自动提款和结算、飞机客票联网预售、派出所户籍管理等。另一类是数值计算，比如天气预报、钢铁厂轧钢控制离线仿真、人造地球卫星的姿态控制、企业投资方案的确定，以及飞机、汽车和船舶的外形设计等。

用数值计算解决实际问题的第一步是建立数学模型。比如，要作数值天气预报，需分析大气中的辐射加热、水汽的相变、近地面层的湍流、地形的强迫力、陆气和海气的耦合作用等等，得到一组多变量偏微分方程的数学模型。通过这组偏微分方程的求解，即可进行天气预报。

建立数学模型之后，还不能用计算机直接求解。因为，高级程序设计语言仅提供了算术四则运算和逻辑运算的功能。在数学模型和实际计算之间，还需设计各类不同的算法作为桥梁。这些算法需将求解过程表示成算术四则运算和逻辑运算的有限序列，这就构成了数值计算方法的研究内容。

从以上粗略的介绍，我们可以归纳出应用数值计算解决问题的步骤是：(1)建立一个描述现实问题的数学模型；(2)选择或构造一个从数学模型到数值计算的有效算法；(3)在计算机上进行数值计算，并将结果以数值方式或图形方式输出。

限于学时，本书只能介绍数值计算方法的主要内容。在取材上，兼顾到传统方法和现代方法，并侧重现实应用中的计算方法。本教材由三部分组成：第一部分是插值理论，包括第 1 章的古典理论与第 2 章的近代理论。这部分内容是计算机辅助设计的数学基础。第二部分是线性方程组求解与线性规划，包括第 4 章的古典理论与第 5 章的近代理论。这部分内容在经济管理和社会生活中有广泛的应用。第三部分是数值积分和微分方程数值求解，由第 3 章与第 6 章构成。这些内容属于古典理论，其中微分方程数值求解在自动控制中有广泛的应用。全书讲授时数为 36 学时，上机 18 学时。

为使读者更好地掌握本书内容，本书的习题中含有证明题、几何作图题和数值计算题三类，并对稍微复杂的题目，设计了数值实验。

编　者

2001 年 12 月

目　　录

第 1 章　插值方法

在生产和科学实验中，函数表达了现实世界物质运动规律的数量关系。对于实际问题中遇到的函数 $y = f(x)$，虽然从原则上说，它在某个区间 $[a,b]$ 上是存在的，但通常是通过实验观测得到的，所以只知道 $[a,b]$ 区间一系列点上的函数值 $y_i = f(x_i)$。对于 x 的其他值，$y = f(x)$ 的变化情况是不知道的。这就表明，只能得到关于 $y = f(x)$ 的一张表 $(x_i,y_i)(i = 0,1,\cdots,n)$，这对于研究物质变化规律很不方便，更不能用它计算未给出点的函数值。

若函数能用一个公式来表示，那么我们研究和分析函数的性质，计算函数值就变得很简单了。由于代数多项式既简单又便于计算，因此人们在实践中早就用代数多项式近似表达复杂的函数或用表格给出的函数，这就是插值法的课题。例如，在观测行星的运动时，得到某时刻 t_i 所对应的行星位置，我们用 s_i 表示（用经度和纬度表示）。要想知道任何时刻 t 的行星位置 s，就必须用插值法。

又如程序控制铣床加工精密工件时，常常是给出工件外形若干点的坐标，要求加工后的外形是光滑的曲线。加工时走刀方向是直线。要得到光滑曲线，就必须计算出外形曲线足够密的点的坐标，用它来控制走刀的方向，以便加工出达到精度要求的工件，这也是插值问题。

再比如，我们在查对数表时，要查的数据在表中找不到，于是就要先找出它相邻的数，再从表的旁边找出其修正值，按一定关系把此相邻的数加以修正，就可求出要找的数。这个关系是如何得到的呢？实际上就是一种插值。

插值法是一种古老的数学方法。早在 1000 多年前，我国历法上已经记载了应用一次插值和二次插值的实例。但由于我国长期处于封建统治下，生产落后，科学也就没有得到重大发展。在欧洲，从 17 世纪末到 18 世纪初，天文学、物理学和力学的发展，使插值法的基本理论逐步完善，其应用也日益增多。特别是 20 世纪 60 年代以后，由于电子计算机的普遍使用，插值法的应用范围也随之扩大。在航空、造船和精密机械加工等部门需求的推动下发展起来的“样条”插值，在实践中得到了广泛应用。

插值法解决的实际问题虽然各式各样，但抽象为数学问题却有它的共同性。最简单的插值方法是一元代数插值，它所研究的问题是：已知列表函数 $f(x_i) = y_i(i = 0,1,\cdots,n)$，求次数不超过 n 的多项式 $p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$，满足 $p_n(x_i) = y_i$。这里，$f(x)$ 称为被插函数；x_i 称为插值节点；$p_n(x)$ 称为函数 $f(x)$ 的 n 次插值多项式。在几何上，这就意味着要找一条代数曲线，该曲线通过给定的一组点 $M_i(x_i,y_i)(i = 0,1,\cdots,n)$，如图 1-1 所示。对于这个问题，拉格朗日（Lagrange）、牛顿（Newton）、埃特金（Aitken）分别给出了不同

的解决方法。

1.1 拉格朗日插值公式

拉格朗日（Lagrange）插值公式（以下统称为 Lagrange 插值公式）的基本思想是，把 $p_n(x)$ 的构造问题转化为 $n+1$ 个插值基函数 $l_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$ 的构造。

1. $n=1$ 的情况

已知函数 $y=f(x)$ 在点 x_0，x_1 上的值为 y_0，y_1，要求多项式 $y=p_1(x)$，使 $p_1(x_0)=y_0$，$p_1(x_1)=y_1$。其几何意义，就是通过两点 $A(x_0,y_0)$，$B(x_1,y_1)$ 作一条直线，如图 1-2 所示。

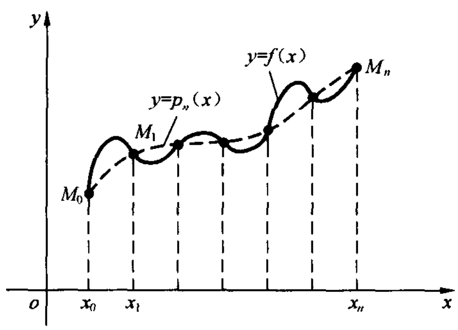


图 1-1　插值多项式

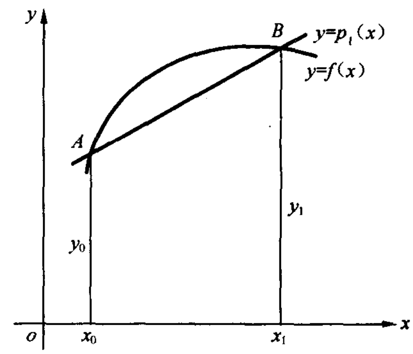


图 1-2　一次插值多项式

由直线两点式可知，通过 A，B 的直线方程为

$$y=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)=p_1(x) \tag{1.1}$$

它也可变形为
$$p_1(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1$$

其中
$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

显然有：　$l_0(x_0)=l_1(x_1)=1,l_0(x_1)=l_1(x_0)=0,p_1(x_0)=y_0,p_1(x_1)=y_1$

我们称 $l_0(x)$ 为点 x_0 的一次插值基函数，$l_1(x)$ 为点 x_1 的一次插值基函数。它们在对应的插值点上取值为 1，而在另外的插值点上取值为 0。插值函数 $p_1(x)$ 是这两个插值基函数的线性组合，其组合系数就是对应点上的函数值。这种形式的插值称作为拉格朗日（Lagrange）插值。它的方法是把 $p_1(x)$ 的构造问题转化为两个插值基函数 $l_i(x)(i=0,1)$ 的构造。这种方法对于 n 较大时，会带来很大的方便。$p_1(x)$ 是 x 的一次（线性）函数，称为一次插值多项式。

当 $|x_0-x_1|$ 很小时，线性插值是经常使用的。如前面提到的程控铣床加工曲线，就是把曲线分成很多小段，在每小段上走刀方向是直线，即用弦代替曲线，实际上就是线性插值。又如我们用函数表计算函数值时，也常用线性插值。

［例 1］　用三位平方根表求平方根 $\sqrt{17.52}$。

解：平方根表如表 1-1 所示。

表 1-1　　平方根表

n	$\sqrt{n}$
17.5	4.183
17.6	4.195

这里，$x_0 = 17.5$，$y_0 = 4.183$，$x_1 = 17.6$，$y_1 = 4.195$。我们求 $x = 17.52$ 时 $f(x) = \sqrt{x}$ 的值。由线性插值公式（1.1），得到

$$p_1(17.52) = 4.183 + \frac{4.195 - 4.183}{17.6 - 17.5}(17.52 - 17.5) = 4.185$$

即
$$\sqrt{17.52} \approx 4.185$$

［例 2］　考虑在区间 $[0.0, 1.2]$ 上的 $y = f(x) = \cos(x)$ 的曲线图，

（a）利用插值节点 $x_0 = 0.0$ 和 $x_1 = 1.2$ 构造一个线性插值多项式 $p_1(x)$。

（b）利用插值节点 $x_0 = 0.2$ 和 $x_1 = 1.0$ 构造一个线性插值多项式 $q_1(x)$。

比较 $p_1(x)$ 和 $q_1(x)$ 对 $y = \cos(x)$ 的逼近效果。

解：
$$p_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1 = 1.000000\frac{x - 1.2}{0.0 - 1.2} + 0.362358\frac{x - 0.0}{1.2 - 0.0}$$
$$= -0.833333(x - 1.2) + 0.301965(x - 0.0)$$

$$q_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1 = 0.980067\frac{x - 1.0}{0.2 - 1.0} + 0.540302\frac{x - 0.2}{1.0 - 0.2}$$
$$= -1.225083(x - 1.0) + 0.635378(x - 0.2)$$

图 1-3（a）所示为 $y = \cos(x)$ 和 $y = p_1(x)$ 在 $[0.0, 1.2]$ 区间的函数曲线对比图，其中节点 $x_0 = 0.0$ 和 $x_1 = 1.2$ 在区间的端点；图 1-3（b）所示为 $y = \cos(x)$ 和 $y = q_1(x)$ 在 $[0.0, 1.2]$ 区间的函数曲线对比图，其中节点 $x_0 = 0.2$ 和 $x_1 = 1.0$ 在区间的内部。

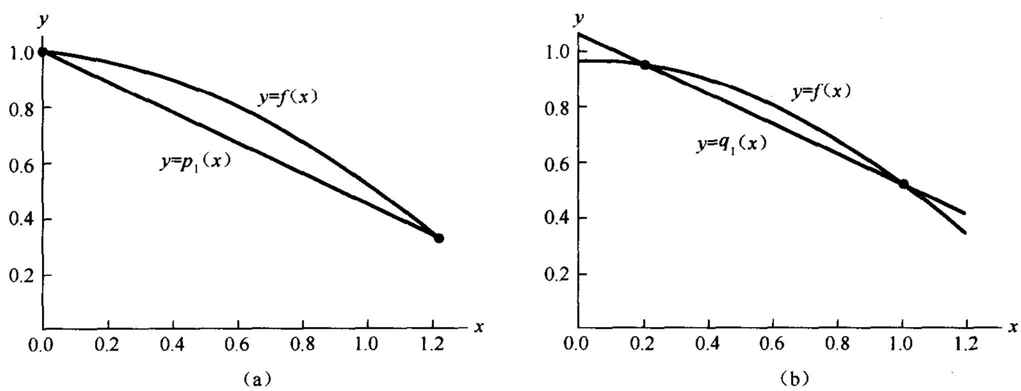


图 1-3　函数曲线对比图

表 1-2 所列为数值计算结果。从表中可见，在 $0.1 \leqslant x_k \leqslant 1.1$ 的范围内，$q_1(x)$ 的误差更

试读结束：需要全本请在线购买：　www.ertongbook.com

小。表中最大误差 $f(0.6) - p_1(0.6) = 0.144157$ 已被 $q_1(x)$ 减小到 $f(0.6) - q_1(0.6) = 0.065151$。

表 1-2　　$y = \cos(x)$ 和线性逼近 $y = p_1(x)$、$y = q_1(x)$ 的比较

x_k	$f(x_k) = \cos(x_k)$	$p_1(x_k)$	$f(x_k) - p_1(x_k)$	$q_1(x_k)$	$f(x_k) - q_1(x_k)$
0.0	1.000000	1.000000	0.000000	1.090008	-0.090008
0.1	0.995004	0.946863	0.048141	1.035037	-0.040033
0.2	0.980067	0.893726	0.086340	0.980067	0.000000
0.3	0.955336	0.840589	0.114747	0.925096	0.030240
0.4	0.921061	0.787453	0.133608	0.870126	0.050935
0.5	0.877583	0.734316	0.143267	0.815155	0.062428
0.6	0.825336	0.681179	0.144157	0.760184	0.065151
0.7	0.764842	0.628042	0.136800	0.705214	0.059628
0.8	0.696707	0.574905	0.121802	0.650243	0.046463
0.9	0.621610	0.521768	0.099842	0.595273	0.026337
1.0	0.540302	0.468631	0.071671	0.540302	0.000000
1.1	0.453596	0.415495	0.038102	0.485332	-0.031736
1.2	0.362358	0.362358	0.000000	0.430361	-0.068003

2. $n=2$ 的情况

线性插值只利用两对值 (x_0, y_0) 及 (x_1, y_1) 求得 $y=f(x)$ 的近似值，误差较大。我们设想再利用一对值来求 $y=f(x)$ 的近似值，结果可能比线性插值好些。设已知函数 $y=f(x)$ 在点 x_0，x_1，x_2 上的值为 y_0，y_1，y_2，要求一个多项式 $y = p_2(x)$，使 $p_2(x_i) = y_i(i = 0,1,2)$。其几何意义就是通过三点 $A(x_0,y_0)$，$B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$ 作一条曲线。若三点不在一直线上，则通过三点的曲线就是抛物线，它是一个二次方程，其一般形式为

$$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \tag{1.2}$$

这里 a_0，a_1，a_2 为待定系数，可由曲线 $y = p_2(x)$ 通过 A，B，C 三点的三元一次联立方程求得。这就需要求联立方程的解，计算较复杂。事实上，二次多项式 $p_2(x)$ 并不一定要写成式 (1.2) 的形式，它可根据给定条件写成更便于计算的形式。比如 Lagrange 插值公式形式

$$p_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2$$

其中

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

则
$$p_2(x_0) = y_0, p_2(x_1) = y_1, p_2(x_2) = y_2$$

$p_2(x)$ 是 x 的二次函数，称为二次插值多项式。通过三点的插值问题称为二次插值或抛物插值。

3. 一般情况

我们看到，两个插值点可求出一次插值多项式 $p_1(x)$ ，而三个插值点可求出二次插值多项式 $p_2(x)$ 。当插值点增加到 $n+1$ 个时，我们可以利用 Lagrange 插值方法写出 n 次插值多项式 $p_n(x)$ ，如下所示：

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}\right) y_k$$

n 次插值多项式 $\mathrm{p}_n(\mathrm{x})$ 是 $\mathrm{n}+1$ 个插值基函数的线性组合，其组合系数就是对应点上的函数值。插值基函数 $l_i(x)(i = 0,1,\cdots,n)$ ，只在 x_i 点取值为 1，在其他插值节点取值为 0，这使得它易于构造。根据它有 n 个零点可知，它为 n 个一次因式的乘积 $A\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(x - x_j)$ ，根据它在 x_i 点取值为 1，确定它的常数 $A = \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)}$ ，最后得到插值基函数 $l_i(x) = \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j}$ 。

利用 Lagrange n 次插值多项式 p_n (x)，在计算机上很容易计算给定点 x 的函数值 y。

Lagrange 插值算法如下：

input x, (x_i, y_i), $i=0, 1, \cdots, n$。

$0 \Rightarrow y$, $0 \Rightarrow k$

L: $1 \Rightarrow t$

$\dfrac{x - x_j}{x_k - x_j} t \Rightarrow t$, $j=0, \cdots, n$, $j\neq k$

$y + t y_k \Rightarrow y$

if $k\neq n$ then $k+1 \Rightarrow k$, goto L

output y。

［例 3］　已知 $f(-1) = 2$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$ ，求 $f(x)$ 的 Lagrange 插值多项式。

解：设 $x_0 = -1, x_1 = 1, x_2 = 2$

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(-1 - 1)(-1 - 2)} = \frac{1}{6}(x^2 - 3x + 2)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)} = -\frac{1}{2}(x^2-x-2)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)} = \frac{1}{3}(x^2-1)$$

$$\begin{aligned} p_2(x) &= l_0(x)2 + l_1(x) + l_2(x) \\ &= \frac{2}{6}(x^2-3x+2) - \frac{1}{2}(x^2-x-2) + \frac{1}{3}(x^2-1) \\ &= \frac{1}{6}(x^2-3x+8) \end{aligned}$$

[例4] 考虑在区间[0.0,1.2]上的$y = f(x) = \cos(x)$的曲线图。

(a) 利用插值节点$x_0 = 0.0$，$x_1 = 0.6$和$x_2 = 1.2$构造一个二次插值多项式$p_2(x)$，

(b) 利用插值节点$x_0 = 0.0$，$x_1 = 0.4$，$x_2 = 0.8$和$x_3 = 1.2$构造一个三次插值多项式$p_3(x)$。

(c) 作图比较$p_2(x)$和$p_3(x)$对$y = \cos(x)$的逼近效果。

解：

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 \\ &= 1.000000\frac{(x-0.6)(x-1.2)}{(0.0-0.6)(0.0-1.2)} + 0.825336\frac{(x-0.0)(x-1.2)}{(0.6-0.0)(0.6-1.2)} \\ &\quad + 0.362358\frac{(x-0.0)(x-0.6)}{(1.2-0.0)(1.2-0.6)} \\ &= 1.388889(x-0.6)(x-1.2) - 2.292599(x-0.0)(x-1.2) \\ &\quad + 0.503275(x-0.0)(x-0.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 \\ &\quad + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3 \\ &= \frac{(x-0.4)(x-0.8)(x-1.2)}{(0.0-0.4)(0.0-0.8)(0.0-1.2)}1.000000 \\ &\quad + \frac{(x-0.0)(x-0.8)(x-1.2)}{(0.4-0.0)(0.4-0.8)(0.4-1.2)}0.921061 \\ &\quad + \frac{(x-0.0)(x-0.4)(x-1.2)}{(0.8-0.0)(0.8-0.4)(0.8-1.2)}0.696707 \\ &\quad + \frac{(x-0.0)(x-0.4)(x-0.8)}{(1.2-0.0)(1.2-0.4)(1.2-0.8)}0.362358 \\ &= -2.604167(x-0.4)(x-0.8)(x-1.2) \\ &\quad + 7.195789(x-0.0)(x-0.8)(x-1.2) \\ &\quad - 5.443021(x-0.0)(x-0.4)(x-1.2) \\ &\quad + 0.943641(x-0.0)(x-0.4)(x-0.8) \end{aligned}$$

图1-4 (a) 是基于节点$x_0 = 0.0$，$x_1 = 0.6$和$x_2 = 1.2$的二次逼近多项式$p_2(x)$和被逼

近函数 $y=f(x)=\cos(x)$ 的曲线图；图 1-4（b）是基于节点 $x_0=0.0$，$x_1=0.4$，$x_2=0.8$ 和 $x_3=1.2$ 的三次逼近多项式 $p_3(x)$ 和被逼近函数 $y=f(x)=\cos(x)$ 的曲线图。从这两幅图可以看出，$p_3(x)$ 对 $y=\cos(x)$ 的逼近效果好于 $p_2(x)$。

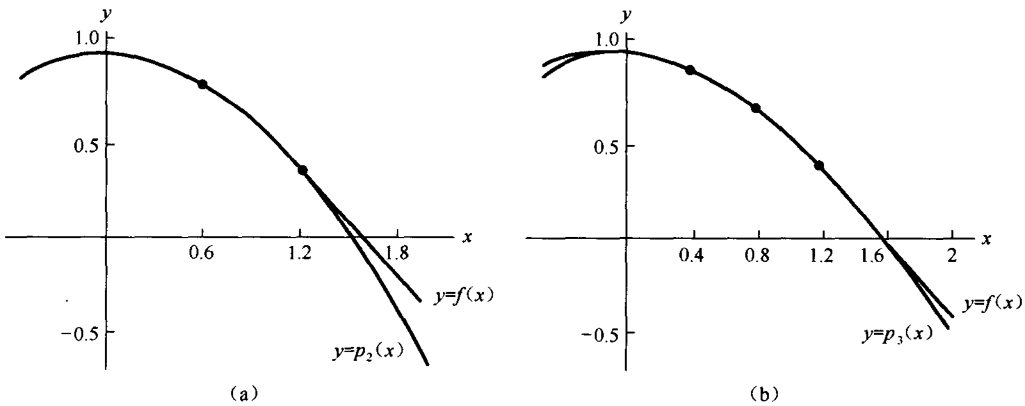


图 1-4　$p_2(x)$ 和 $p_3(x)$ 对 $y=\cos(x)$ 的逼近效果

1.2　牛顿插值公式

Lagrange 插值公式结构紧凑，思路清晰，但当插值节点个数有所变动时，Lagrange 插值基函数 $l_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$ 就要随之发生变化，这在计算实践中是不方便的。Newton 与 Lagrange 不同，他将插值公式设计为递推形式，即

$$p_n(x)=p_{n-1}(x)+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

由于 $p_n(x_i)=p_{n-1}(x_i)=f(x_i)(i=0,1,\cdots,n-1)$，而 $p_n(x_n)=f(x_n)\Rightarrow a_n$，因此，可以得到满足插值条件的多项式 $p_n(x)$。

考虑 $n=1$ 的情况：根据插值条件，插值函数 $p_1(x)$ 应满足 $p_1(x_1)=f(x_1)=y_1$，所以

$$y_1=y_0+a_1(x_1-x_0)$$

$$a_1=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

$$\begin{aligned}p_1(x)&=p_0(x)+a_1(x-x_0)\\&=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)\end{aligned}$$

考虑 $n=2$ 的情况：

$$p_2(x)=p_1(x)+a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

利用 $p_2(x_2)=y_2$ 的条件，可推出

$$\begin{aligned}a_2&=\frac{y_2-p_1(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\\&=\left(y_2-\left(y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x_2-x_0)\right)\right)\frac{1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\end{aligned}$$

$$= \frac{\dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

以上分别给出了 $a_i(i = 1,2)$ 的计算公式，但并没有建立两者的联系。下面对 $a_i(i = 1, 2)$ 进一步分析，从中找出规律性的东西。公式中出现的分式$\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$，$\dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$，实际上是函数增量与自变量增量之比，也就是函数 $y = f(x)$ 在相应区间 $(x_0, x_1)(x_0, x_2)$ 上的平均变化率，我们称它为$f(x)$ 的一阶差商，用

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$f(x_0, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$$

表示。其一般形式为

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \qquad (i \neq j)$$

这样，$a_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f(x_0, x_1)$，就可以用差商的形式表示了。

由于 $a_2 = \dfrac{\dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$，实际上就是一阶差商的差商，用

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_0, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_1}$$

表示，其一般形式为

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_i, x_j) - f(x_j, x_k)}{x_i - x_k} \qquad (i \neq k)$$

称为$f(x)$ 的二阶差商。

差商具有对称性，即各阶差商与点的排列次序无关，这一性质从差商定义即可推出。

$$f(x_i, x_j) = f(x_j, x_i)$$

$$\begin{aligned} f(x_i, x_j, x_k) &= \frac{f(x_i, x_j) - f(x_j, x_k)}{x_i - x_k} \\ &= \frac{1}{x_i - x_k}\left[\frac{f(x_i)}{x_i - x_j} + \frac{f(x_j)}{x_j - x_i} - \frac{f(x_j)}{x_j - x_k} - \frac{f(x_k)}{x_k - x_j}\right] \\ &= \frac{f(x_i)}{(x_i - x_k)(x_i - x_j)} + \frac{f(x_j)}{(x_j - x_i)(x_j - x_k)} \\ &\quad + \frac{f(x_k)}{(x_k - x_i)(x_k - x_j)} \\ &= f(x_j, x_k, x_i) = f(x_k, x_i, x_j) \end{aligned}$$

我们定义 $(n - 1)$ 阶差商的差商为$f(x)$ 的 n 阶差商：

$$f(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\frac{f(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{x_0-x_n}$$

对于差商的对称性质，证明如下：

$k=1$ 时，由一阶差商定义，则

$$f(x_0,x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}+\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}$$

故 $k=1$ 是对的；假定 $k=n-1$ 成立，则 $k=n$ 时，有

$$\begin{aligned}
f(x_0,x_1,\cdots x_n)&=\frac{f(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{x_0-x_n}\\
&=\frac{1}{x_n-x_0}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n-1}(x_k-x_j)}\right]\\
&=\frac{1}{x_n-x_0}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{f(x_k)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)}-\frac{f(x_k)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n-1}(x_k-x_j)}\right)+\frac{f(x_n)}{\prod\limits_{j=1}^{n-1}(x_n-x_j)}-\frac{f(x_0)}{\prod\limits_{j=1}^{n-1}(x_0-x_j)}\right]\\
&=\frac{1}{x_n-x_0}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(x_k-x_0)-(x_k-x_n)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)}f(x_k)\right]+\frac{f(x_n)}{\prod\limits_{j=0}^{n-1}(x_n-x_j)}+\frac{f(x_0)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(x_0-x_j)}\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(x_k)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)}+\frac{f(x_n)}{\prod\limits_{j=0}^{n-1}(x_n-x_j)}+\frac{f(x_0)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(x_0-x_j)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)}
\end{aligned}$$

证明完毕。

由 $a_1=f(x_0,x_1)$，$a_2=f(x_0,x_1,x_2)$，很容易猜想到 $a_3=f(x_0,\cdots,x_3)$。那么，猜想是否正确呢？根据 $p_3(x_3)=y_3$ 的条件，可得

$$y_3=p_2(x_3)+a_3(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$$

$$\begin{aligned}
a_3&=\frac{y_3-p_2(x_3)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\\
&=\frac{y_3-p_1(x_3)-a_2(x_3-x_0)(x_3-x_1)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\\
&=\frac{y_3-y_0-f(x_1,x_0)(x_3-x_0)-f(x_0,x_1,x_2)(x_3-x_0)(x_3-x_1)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\\
&=\frac{f(x_0,x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}-\frac{f(x_1,x_0)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}-\frac{f(x_0,x_1,x_2)}{(x_3-x_2)}\\
&=\frac{\dfrac{f(x_1,x_0)}{(x_1-x_3)}-\dfrac{f(x_0,x_3)}{(x_1-x_3)}-f(x_0,x_1,x_2)}{x_3-x_2}
\end{aligned}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com