普通高等教育“十一五”国家级规划教材

微积分

WEIJIFEN

（上册）

张学奇◎编著

中国人民大学出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

微积分

WEIJIFEN

（上册）

张学奇◎编著

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分/张学奇编著.
北京：中国人民大学出版社，2007.10
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
ISBN 978-7-300-08460-2

Ⅰ.微…
Ⅱ.张…
Ⅲ.微积分-高等学校-教材
Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 133569 号

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
微积分
张学奇　编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	三河市汇鑫印务有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本	**版　　次**	2007 年 9 月第 1 版
印　　张	34.25 插页 2	**印　　次**	2007 年 9 月第 1 次印刷
字　　数	628 000	**定　　价**	39.80 元(上、下册)

前　　言

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，我们依据经济类、管理类各专业对微积分课程的教学要求，在总结微积分课程教学改革成果，吸收国内外同类教材的优点，结合我国高等教育发展趋势的基础上编写了本书。

本书的编写以强化概念理解、渗透数学思想，突出数学应用、培养建模能力，体现教育理念、提高教学质量为指导，力求实现理论教学与实际应用、知识传授与能力培养的和谐统一，教育理念与学生发展、学习数学与运用数学的有机结合。与现行同类教材相比，本书注重突出以下特点：

优化构建教学内容与课程体系。在考虑课程的基础性、系统性与逻辑性的基础上，注意体现微积分的思想性和应用性，微积分与经济管理等学科的交叉与渗透，对教学内容与课程体系进行适当调整，整体体现加强基础、培养能力、重视应用的原则。

强化概念的理解。从问题出发，呈现概念的形成过程和背景知识，突出概念的思想性，通过几何化、数值化、解析化和描述化的方法强化概念的理解。如对极限、连续、导数、微分和定积分等重点概念的处理。

突出微积分基本思想和知识内在特征。如辩证思想、数形结合、线性代替、函数逼近等。对重要概念、定理、法则用辩证的观点进行剖析和评注，把握知识内在特征。

突出数学建模能力的培养。围绕着函数、变化率、函数最值、定积分、微分方程、差分方程等主题，强调数学概念与经济管理问题的联系。结合课程内容编写了应用研究、模型案例、模型应用等专题，通过有步骤、专题式的建模过程学习，逐步培养学生用数学的意识、获取新知识的能力和数学建模能力，适应经济、金融、管理等学科的专业需要。

体现数学素质教育、数学文化教育和科学精神培养。配合教学内容编写了一些经典实例、数学家简介、读写练习等内容，提高学生的学习兴趣、学习积极性和数学意识，使学生感到数学就在身边，受到数学素养的熏陶。

注重教材结构上的严谨、逻辑上的清晰、叙述上的通俗易懂。教材在编排上体现教学思想与教学方法，教师好使，学生好用，有利于教与学双方的使用和教

学质量的提高。

强调基础解题能力与数学建模能力的训练。注意例题与习题的设计与编选，例题典型，习题覆盖面宽、题型丰富、难易适度，按节配有适量的基本练习题，每章配有练习题 A 与 B、数学建模题、课外读写题。A 类题可以用于检测对基本教学内容的掌握情况，B 类题可供学有余力的读者选用；数学建模题、课外读写题可作为课外学习选用，书末附有答案与提示，便于检查参考。

全书内容包括函数，极限与连续，导数与微分，一元函数微分学应用，积分，多元函数微积分，无穷级数，常微分方程，差分方程，以及应用研究、模型案例、模型应用等课外学习专题。参考教学时数为 120 学时，标有※号的内容要另行安排学时。

为了使学生更好地掌握微积分内容，提高学生分析问题和解决问题的能力，拓展学生的学习空间，我们还编写了配套的辅导教材，该辅导教材包括：以题型分析、思路讲解、方法概括为主的解题指导；课程内容、数学建模与数学软件相结合的数学实验。辅导教材与主教材相辅相成，解题指导帮助学生理清解题思路，把握解题规律；数学实验使抽象概念形象化、计算简单化、知识生动化，使学生受到用数学软件求解数学模型的能力训练，辅导教材起到了对课程的同步辅导与延伸的作用。

为适应教育信息化发展的需要，我们结合现代化教育手段编制了与教材配套的多媒体课件与素材库(放在中国人民大学出版社的网站(www.crup.com.cn)的资源中心处)。该多媒体课件注重教学设计，以问题为先导，设计教学情景与活动，将教师启发性教学思想融合在课件的设计之中，使教学内容动态化与思维过程可视化。教学资源库为教师自主组织教学创造了条件。

参加本书编写的还有夏建业、陈锡祯两位教授。在本书的编写过程中我们参阅了国内外一些优秀教材，从中受到了有益的启发，吸取了先进的经验，本书的出版受到了中国人民大学出版社策划编辑潘旭燕的支持与帮助，在此表示感谢!

限于编者的水平，加之时间仓促，本书难免存在不足之处，殷切期望专家、同行和读者批评指正，使本书不断完善和提高。

张学奇

2007 年 3 月

目　录

第一章　函　数

世界上万物都是运动变化的，对变化问题的研究反映在数学上就是函数关系，微积分研究的对象就是函数. 本章我们主要复习函数的概念、函数的特性、反函数与复合函数、初等函数等内容.

第一节　函数的概念

微积分研究的对象是函数，其研究范围为实数域，在此先概述学习本课程所必须具备的实数知识与函数概念.

一、实数

1. 实数与绝对值

实数由有理数与无理数两大类数组成，全体实数构成的集合称为实数集，记为 **R**；全体正实数的集合记为 $\mathbf{R}^+$. 全体非负整数构成的集合为自然数集，记为 **N**；全体整数构成的集合记为 **Z**.

数轴是定义了原点、方向和单位长度的直线. 由于全体实数与数轴上的所有点一一对应，所以可以用数轴上的点表示实数.

设 x 是一个实数，则记号 $|x|$ 表示 x 的**绝对值**，定义为

$$|x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}.$$

数 x 的绝对值的几何意义是表示数轴上从原点 O 到点 x 的距离.

设 x 和 y 是两个实数，由绝对值的定义得

$$|x-y| = \begin{cases} x-y & x \geqslant y \\ y-x & x < y \end{cases}.$$

几何上，$|x-y|$ 表示数轴上两点 x 和 y 的距离.

设 $a > 0$，由绝对值的定义，有下述等价关系式：

$|x|<a$ 等价于 $-a<x<a$，或记为 $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$；

$|x|>a$ 等价于 $x<-a$ 或 $x>a$，或记为 $|x|>a \Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$.

绝对值有下列性质：设 x 和 y 是任意两个实数，则有：

(1) $|x|\geqslant 0$； (2) $|-x|=|x|$；

(3) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$； (4) $|x\pm y|\leqslant |x|+|y|$；

(5) $||x|-|y||\leqslant |x-y|$； (6) $|xy|=|x|\cdot|y|$.

2. 区间与邻域

设 a，$b\in\mathbf{R}(a<b)$，则满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 所成的集合，称为以 a，b 为端点的**开区间**，记为 (a, b)，即 $(a, b)=\{x\mid a<x<b\}$.

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 所组成的集合，称为以 a，b 为端点的**闭区间**，记为 $[a, b]$，即 $[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$.

此外，还有以 a，b 为端点的**半开半闭区间**：

$$(a, b]=\{x|a<x\leqslant b\} \quad 和 \quad [a, b)=\{x|a\leqslant x<b\}.$$

上述几类区间长度是有限的，称为**有限区间**，$b-a$ 称为**区间长度**. 除此之外，还有几类无限区间：

$$(a, +\infty)=\{x|\ x>a\};\ [a, +\infty)=\{x|x\geqslant a\};$$
$$(-\infty, b)=\{x|\ x<b\};\ (-\infty, b]=\{x|x\leqslant b\};$$
$$(-\infty, +\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}.$$

除了区间概念外，为了讨论函数的局部性态，还常用到邻域的概念，它是由某点附近的所有的点组成的集合.

设 x_0 为实数，$\delta>0$，区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$（或满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的 x）称为**点 x_0 的 δ 邻域**（见图 1—1），记为 $U_\delta(x_0)=\{x|x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\}$，$x_0$ 称为**邻域中心**，δ 称为**邻域半径**.

点集 $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$（或满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x）称为**点 x_0 的去心邻域**（见图 1—2），记为 $U^\circ(x_0)=\{x|x\in(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)\}$.

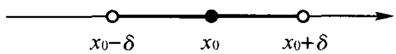

图 1—1

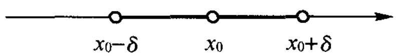

图 1—2

为了书写方便，书中使用了下列逻辑符号：

符号 $\forall$ 表示“任意”；$\exists$ 表示“存在”；符号 $A\Leftrightarrow B$ 表示“命题 A 与 B 等价”，

或“命题 A 与 B 互为充要条件”；符号 $\Rightarrow$ 表示“推得”.

二、变量与函数

所谓变量就是指在某一过程中不断变化的量. 例如，变速运动物体的速度；某地区的温度；某种产品的产量、成本和利润；世界人口总数等等.

时间是最典型的变量，自然界中很多变量的变化都依赖于时间. 例如，自由落体运动的距离 s 与时间 t 的关系为 $s=\frac{1}{2}gt^2$.

现实世界中的变量不是孤立的、静止的，它要与周围相关的变量发生关系，变量间的相互确定的依赖关系抽象出来就是函数概念，函数概念是运动变化和对立统一等观点在数学中的具体体现，用它可以描述现实世界中的变量关系.

1. 函数的定义

人们对函数概念的认识过程是一个逐步抽象和深化的过程，在 17 世纪，绝大部分函数是通过曲线引进和研究的. 牛顿曾用“流量”一词表示变量和函数，莱布尼茨用“函数”一词表示任何一个随着曲线上的点变动而变动的量，欧拉用记号 $f(x)$ 表示一个函数，从此，函数概念成为微积分的一个基本概念. 18 世纪后，随着微积分的发展，函数概念逐步清晰、准确，最终发展为现代的函数概念的经典定义，函数概念的现代定义是以集合论为基础的映射形式.

定义 1① 设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 上的一个非空子集，如果有 D 到 $\mathbf{R}$ 上的一个映射（对应规则）f，使得对于每个 $x\in D$，通过映射 f 都有唯一确定的数 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的**函数**，x 称为 f 的**自变量**，y 称为**因变量**，函数记作

$$f:D\to\mathbf{R},\ x\to y,\ x\in D,$$

其中 D 称为函数 f 的**定义域**，记作 $D(f)$，D 中的每一个 x 根据映射 f 对应于一个 y，记作 $y=f(x)$，称为函数 f 在 x 的函**数值**，全体函数值的集合

$$f(D)=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D\}\subset\mathbf{R}$$

称为函数 f 的**值域**，如图 1—3 所示.

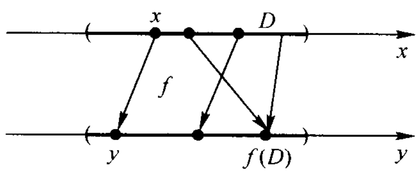

图 1—3

需要指出的是，严格地说，f 和 $f(x)$ 的含义是不同的，f 表示映射或对应规则，而 $f(x)$ 表示函数值，但为了叙述方便

① 函数的这个定义是德国数学家狄利克雷（P. G. L. Dirichlet，1805—1859）于 1837 年在他的一篇讨论函数的文章中引进的.

通常用 $f(x)$ $(x\in D)$ 表示函数.

直观上，也可以将函数想象为一个机器，如果 x 在 f 的定义域中，则当 x 输入这个机器 f 时，机器会通过对应规则产生一个输出结果 $f(x)$，定义域看成所有输入集合，值域看成所有输出集合，如图1—4. 我们使用的计算器就是借助机器理解函数的典型例子.

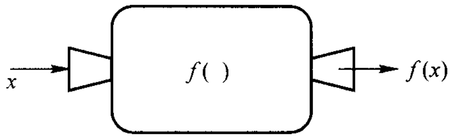

图 1—4

若函数在某个区间上的每一点都有定义，则称这个函数在该区间上有定义.

在坐标平面上，函数可以用图形表示，设函数 $y=f(x)(x\in D)$，则称平面点集 $C=\{P(x, f(x))|x\in D\}$ 为函数 $y=f(x)(x\in D)$ 的**图形**. 一般地，一个函数确定一个图形，反之，如果图形上不同的点其横坐标也不同(或平行于 y 轴的直线与曲线只有一个交点)，则这个图形确定一个函数(见图 1—5).

例 1 设 $y=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$，其图形如图 1—6，它确定了一个函数，称为符号函数，记为 $y=\operatorname{sgn}x$，其定义域为实数集 $\mathbf{R}$，值域为 $\{-1, 0, 1\}$.

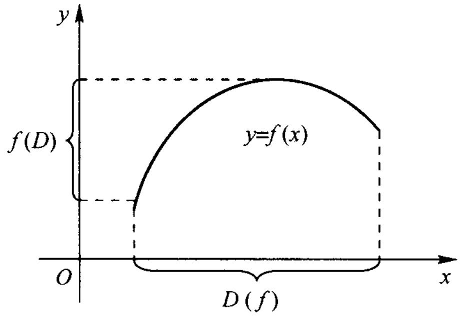

图 1—5

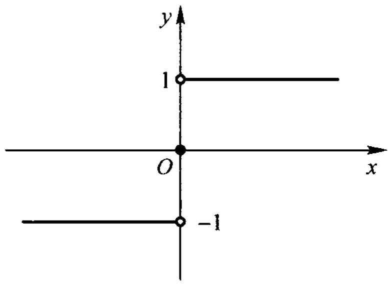

图 1—6

2. 函数的两个要素

函数的对应规则和定义域称为函数的两个要素. 一个函数只要定义域和对应规则给定，则函数也就确定了.

(1) 函数定义域的确定就是确定使得函数有意义的自变量的取值范围. 对于实际问题的定义域，通常由实际问题的性质而定.

例 2 求函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解　这是求两个函数之和的定义域，先分别求出每个函数的定义域，然后求其公共部分即可.

$\sqrt{x^2-x-6}$ 的定义域必须满足 $x^2-x-6\geqslant 0$，即 $(x-3)(x+2)\geqslant 0$，

解得　　$x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -2$，

而　　$\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 定义域是 $\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$，即 $-7\leqslant 2x-1\leqslant 7$，

解得　$-3\leqslant x\leqslant 4$，

这两个函数的定义域的公共部分是 $-3\leqslant x\leqslant -2$ 与 $3\leqslant x\leqslant 4$.

于是，所求函数的定义域是 $-3\leqslant x\leqslant -2$ 与 $3\leqslant x\leqslant 4$.

例 3　已知存款的月利率为 $k\%$，现存入银行 a 元本金，按复利计算，记第 n 个月后的存款余额为 $C(n)$，则 $C(n)=a(1+k\%)^n$. 它给出了存款余额与存款时间的关系，其定义域为 $D(C)=\{n|n\in N^+\}$.

(2) 两个函数相等的充分必要条件是其定义域、对应规则分别相同，即若两个函数 $y=f(x)(x\in D_1)$ 和 $y=g(x)\ (x\in D_2)$，则

$$f=g\Leftrightarrow D(f)=D(g)\quad 且\quad f(x)=g(x),\ x\in D(f).$$

例 4　说明函数 $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 是否相同.

解　因为 $y=\ln x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $y=2\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，因此，$y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 不是相同的函数.

3. 函数的表示法

函数的表示方法一般有三种：表格法、图像法和公式法. 表格法就是将自变量与因变量的对应数据列成表格来表示函数关系；图像法就是用平面上的曲线来反映自变量与因变量之间的对应关系；公式法就是写出函数的解析表达式和定义域，此时对于定义域中每个自变量，可按照表达式中所给定的数学运算确定对应的因变量. 下面用实例分别说明函数的表示方法.

例 5　2002 年 2 月 21 日国务院公布的活期储蓄的利率表如下：

时间	3 个月	6 个月	1 年	2 年	3 年	5 年
年利率(%)	1.71	1.89	1.98	2.25	2.52	2.79

这个表格确定了储蓄时间与利率之间的函数关系，这种用表格形式表示函数的方法称为函数的表格表示方法，简称**表格法**.

例 6　王先生到郊外去散步，他匀速前进，离家 10 分钟，他发现一骑车人的自行车坏了，他帮助这个人把自行车修好，20 分钟后继续散步. 请把王先生离家

的距离关于时间的函数用图形描述出来.

解 王先生离家的距离关于时间的函数图形如图 1—7 所示，这种用图形表示函数的方法称为函数的图像表示方法，简称**图像法**.

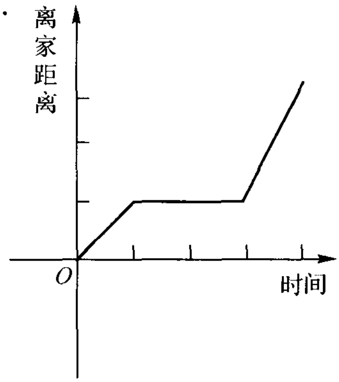

图 1—7

例 7 制作一个容积为定数 V 的圆柱形无盖水箱，其底面单位面积造价为 a，侧面单位面积造价为底面单位面积造价的 2 倍，试将总造价表示成底半径 r 的函数.

解 设圆桶用料的总造价为 P，则

$$P = a\pi r^2 + 2a \cdot 2\pi rh.$$

因为圆桶体积 $\pi r^2 h = V$ 是定数，由 $\pi r^2 h = V$，解出 $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$，则

$$\begin{aligned} P &= a\pi r^2 + 2a \cdot 2\pi rh = a\pi r^2 + 4a\pi r \frac{V}{\pi r^2} \\ &= \pi a r^2 + \frac{4aV}{r} \quad (0 < r < +\infty). \end{aligned}$$

这里用公式表示了圆桶用料的总造价 P 与底半径 r 的函数关系.

在用公式法表示函数时，有一种分段表示函数的情形，即一个函数在它的定义域的不同部分，其表达式不同，需用多个不同的表达式表示同一个函数，这样的函数习惯上称为**分段函数**.

例 8 某商品的单价因购买量的不同而不同，其购买量与价格如下表：

购买量 x (kg)	$0 < x \leqslant 100$	$100 < x \leqslant 200$	$200 < x \leqslant 500$	$x > 500$
单价 y(元 /kg)	50	49	48	46

则价格与购买量之间的关系可以由下面的函数来表达：

$$f(x) = \begin{cases} 50x & 0 < x \leqslant 100 \\ 49x & 100 < x \leqslant 200 \\ 48x & 200 < x \leqslant 500 \\ 46x & x > 500 \end{cases}.$$

分段函数的定义域通常来讲是各分段自变量取值的并集；求分段函数的函数值时，应把自变量代入相应的取值范围上的表达式里进行计算；分段函数的图像由每一个分段区间的图像合并而成.