走进高中

初高中数学知识衔接

主编
周祝光
曹兵

四川出版集团
四川辞书出版社

走进高中

初高中数学知识衔接

CHUGAOZHONG SHUXUE ZHISHI XIANJIE

主 编:周祝光 曹 兵

编 委:汪波澜 郑 兵 胡宗祥
谢发超 金 涛 蒲 宁
曹 戈 刘秀屏 许小兰
付小华 杨志勇 周宏燕
梁如均 童咏慧 卢道华

四川出版集团
四川辞书出版社

图书在版编目（CIP）数据

初高中数学知识衔接/周祝光、曹兵主编. —成都：四川出版集团：四川辞书出版社，2007.4
（走进高中）
ISBN 978-7-80682-304-0

Ⅰ. 初… Ⅱ. 周… Ⅲ. 数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第016834号

走进高中

初高中数学知识衔接

Chugaozhong Shuxue Zhishi Xianjie

主　编　周祝光　曹兵

策　　划　王劲松　杨　斌
责任编辑　王劲松
复　　审　唐谨怀
终　　审　方光琅
检　　查　曾　真
封面设计　武　韵
版式设计　王　跃
责任印制　严红兵
责任校对　张晓梅　罗丽娟　殷桂蓉
出版发行　四川出版集团
　　　　　四川辞书出版社
地　　址　成都市三洞桥路12号
邮政编码　610031
印　　刷　成都蜀通印务有限责任公司
开　　本　850 mm×1168 mm　1/32
版　　次　2007年4月第1版
印　　次　2007年4月第1次印刷
印　　张　6
书　　号　ISBN 978-7-80682-304-0
定　　价　9.00元

前 言

刚跨入高中阶段时，学生们都信心十足、求知欲旺盛，都有把高中课程学好的愿望。但经过一段时间的学习，他们普遍感觉高中课程并不像初中那样简单易学，特别是理科，更显得枯燥、乏味、抽象。在做习题或实验时，他们常常感到茫然不知从何下手，很多学生的成绩较之初中时期出现了严重的滑坡现象。形成这种现象的原因有多种，其中最主要的原因是：没有解决好初高中学科之间的知识衔接问题。我们知道，由于实行义务教育和素质教育，现行初中教材内容的难度、深度和广度大大降低了，那些在高中学习中经常应用到的知识，都转移到高一阶段补充学习，这就造成了初高中知识的断层。另外，初中教材中每一新知识的引入往往与学生日常生活实际很贴近，比较形象，学生一般都容易理解、接受和掌握。相对而言，高中课程的特点是：概念抽象，定理严谨，逻辑性强，教材叙述比较严谨、规范，注重抽象思维，知识难度加大。并由于所学内容多，所以教学进度一般较快，从而增加了教与学的难度。这样，不可避免地造成许多学生不适应高中阶段的学习，而影响成绩的提高。

初中和高中的学习属于两个不同的学段，其中既有知识的断层，也必有衔接的规律可循。高一年级是初高中结合的平台，高一的起步关系到整个高中阶段的成败。教学大纲也要求高中一年级的学生在学习高中理科新知识前，首先要进行若干课时初中知识的复习。这实质上是让学生初步完成初高中知识的过渡，过渡得好，学生就可以扎实地迈好从初中到高中的第一步。

我们编写这套丛书的目的就是为了帮助教师、家长和学生清楚地分析高一学生学习困难的原因，从学生心理、知识、能力等方面为学生架设“阶梯”，使学生都能顺利越过这一知识“台阶”。这有助于学生巩固已学旧知识，又对他们新知识的学习有帮助，从而使他们尽快适应高中阶段的学习。

目 录

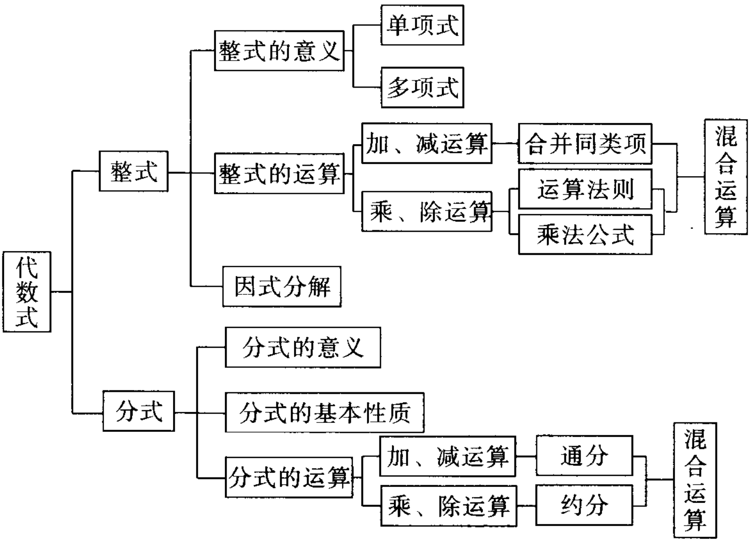
第1单元 代数式的恒等变形

—— 本单元知识导学 ——

现有两个代数式 A、B，如果对于其中所含字母的一切允许值，它们对应的值都相等，则称这两个代数式恒等，记作 $A=B$. 把一个代数式换成另一个和它恒等的代数式，叫做代数式的恒等变形. 恒等变形是代数的最基本知识，是学好中学数学的基础，恒等变形不改变问题的本质，而只改变问题的形式，这就要求我们在恒等变形的过程中必须遵循各运算律和运算法则，并按各运算律和运算法则在其定义域内进行变形. 到目前为止，我们所学到的关于数与式的运算律主要有：加法交换律、结合律；乘法交换律、结合律以及乘法对于加法的分配律. 运算法则主要有：有理数的运算法则、绝对值的运算法则、整式的运算法则、幂的运算法则以及分式的运算法则、根式的运算法则等等. 此外，还有一些基本的公式、定理和一些重要的数学方法，如乘法公式、等式的性质、不等式的性质、因式定理以及配方法、换元法和待定系数法等等. 这些都是进行因式分解和其他恒等变形的基本依据和基本手段，必须熟练掌握，并且能够灵活应用. 我们在平时的学习中要善于积累和总结变形经验，在复杂的问题面前能够准确快速地找到变形方

向，提高解题的效率.

本单元知识内容



初中知识回顾

一、整式

1. 整式：单项式和多项式统称为整式
2. 整式运算法则

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$（m、n 都是整数），

$(a^m)^n = a^{mn}$（m、n 都是整数），

$(ab)^n = a^n b^n$（n 为整数），

$a^m \div a^n = a^{m-n}$（$a \neq 0$，m、n 都是整数），

$m(a+b+c) = ma + mb + mc$，

$(m+n)(a+b)=ma+mb+na+nb$,

$a^0=1$,

$a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}(a\neq 0$, p 为正整数).

二、因式分解

1. 因式分解：把一个整式化为几个整式的乘积形式

2. 因式分解的基本方法

(1)提公因式法 $ma+mb+mc=m(a+b+c)$.

(2)运用公式法 常见公式有：

①$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$,

②$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$,

③$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$,

④$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$,

⑤$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$,

⑥$a^3+b^3+c^3-3ab=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$,

$=\dfrac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]$,

⑦$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$,

⑧$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$ (n 为正奇数),

$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})$ (n 为正偶数),

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$,

(3)分组分解法 (4)配方法、添项拆项法

(5)十字相乘法 (6)待定系数法

(7)利用综合除法，因式定理分解因式

定理1 余式定理：多项式$f(x)$除以$(x-a)$所得的余数恰

等于$f(a)$.

定理2 因式定理：多项式$f(x)$含有因式$(x-a)$的充分必要条件为$f(a)=0$.

推论1 如果整系数多项式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$有因式$px-q$，即有有理数根$\frac{q}{p}$($p$、$q$是互质整数)，那么$p$一定是首项系数$a_n$的约数，$q$一定是常数项$a_0$的约数.

推论2 若多项式$f(x)$的系数和为0，则$f(x)=(x-1)g(x)$

推论3 若多项式$f(x)$的偶次项系数之和等于奇次项系数之和，则$f(x)=(x+1)g(x)$

(8)利用对称式、轮换式分解因式

对称式：若一个多项式中的任意两个字母互换后，如其余多项式不变，则称这个多项式是关于这些字母的对称式，如$x+y$，x^2-xy+y^2.

轮换式：若一个多项式中含有的字母x、y、z轮换(把x换成y，y换成z，z换成x)后，多项式保持不变，则称此多项式是关于这些字母的轮换式，如$x^2y+y^2z+z^2x$.

性质1 对称式一定是轮换式，但轮换式不一定是对称式.

性质2 次数不超过2的轮换式，一定是对称式.

性质3 两个对称式的和、差、积、商(能整除时)一定是对称式；两个轮换式的和、差、积、商(能整除时)一定是轮换式.

三、分式

1. 分式：用A，B表示两个整式，如果B中含有字母，则式子$\frac{A}{B}$叫做分式，其中$B\neq0$.

2. 分式性质：$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M}$，$\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}$($M$为不等于零的整

式).

3. 分式运算：①同分母加减$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$；

②异分母加减$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}$(关键在于先找到最简公分母).

4. 分式变形常用方法：(1)参数法；(2)整体代入法；(3)主元法.

高中知识衔接

高中代数部分是以函数为主线展开学习的，研究函数的性质，比如研究函数的定义域、值域，解一元高次不等式，三角函数的恒等变形等等，都需要同学们具有较强的代数式恒等变形的能力. 对于代数式恒等变形的问题，要抓住为什么要变形？怎样变形？用什么方法变形. 只有经过理性思维，反复训练，才能切实提高代数式变形的能力.

例题精讲

例1　分解因式　(1)$2x^2-5xy-3y^2+3x+5y-2$；

思路点拨　由于原式是关于x、y的二次式，若是能够分解，必分解为两个x、y的一次式之积. 又由于$2x^2-5xy-3y^2$采用十字相乘法分解得$(2x+y)(x-3y)$，所以分解的两个一次式必是$(2x+y+a)(x-3y+b)$的形式，其中字母a、b是待定系数. 再根据$(2x+y+a)(x-3y+b)=$原式，运用左右两边对应项的系数相等，求出a，b的值. 这种方法称为待定系数法.

解：$\because 2x^2-5xy-3y^2=(2x+y)(x-3y)$

$\therefore$ 原式 $=(2x+y+a)(x-3y+b)$

$\therefore 2x^2-5xy-3y^2+3x+5y-2=2x^2-5xy-3y^2+(a+2b)x+(b-3a)y+ab$

$$\therefore \begin{cases} a+2b=3, \\ b-3a=5, \\ ab=-2, \end{cases} \therefore \begin{cases} a=-1, \\ b=2. \end{cases}$$

$\therefore$ 原式 $=(2x+y-1)(x-3y+2)$.

小结点评 1. 待定系数法的理论依据 设多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$

(1)若 $f(x)=g(x)$，那么 $a_i=b_i(i=0、1、2\cdots n)$，即同类项系数对应相等.

(2)若 $f(x)=g(x)$，那么对 x 的任何共同允许取值 x_0，均有 $f(x_0)=g(x_0)$.

2. 待定系数法解决问题的程序：①根据题意，设出含待定系数的恒等式；②由上述理论依据得出待定系数的方程(组)；③解出待定系数；④给出答案.

(2) $a^3+b^3+c^3-3abc$；

思路点拨 原式中出现有 a^3+b^3 的形式，应通过添项构造 $(a+b)^3$ 的形式去解题.

解：$a^3+b^3+c^3-3abc=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab]$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

小结点评 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ 在分解因式的题目中可以直接作为公式来运用.

(3) $x^2-2xy-8y^2-x-14y-6$；

解法一：原式 $=x^2-(2y+1)x-(8y^2+14y+6)$

$=x^2-(2y+1)x-2(4y+3)(y+1)$

$=(x-4y-3)(x+2y+2)$

解法二：原式 $=(x-4y)(x+2y)-(x+14y)-6$

$=(x-4y-3)(x+2y+2)$

解法三：原式 $=(x-4y-3)(x+2y+2)$

小结点评 解法一是先运用主元法将原式看作关于 x 的二次三项式，然后再运用十字相乘法. 解法二是基于发现前三项 $x^2-2xy-8y^2$ 能分解成 $(x-4y)(x+2y)$ 的前提下，进一步灵活运用十字相乘法. 解法三是运用双十字相乘法. $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ 若能分解为 $(a_1x+c_1y+f_1)(a_2x+c_2y+f_2)$，则应有 $a_1a_2=a$，$c_1c_2=c$，$f_1f_2=f$，而且 $a_1c_2+a_2c_1=b$，$a_1f_2+a_2f_1=d$，$c_1f_2+c_2f_1=e$. 于是可分别分解 a、c、f 为 $a_1\cdot a_2$、$c_1\cdot c_2$、$f_1\cdot f_2$ 且满足上述关系，这种作法称为双十字相乘法.

(4) $(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc$.

思路点拨 这是一个关于 a、b、c 的对称式，当 $a=-b$ 时，原式 $=0$. 而又由因式定理知，原式含有因式 $(a+b)$，由于这是一个对称式，则原式还含有因式 $(b+c)(c+a)$，所以原式含有三次因式 $(a+b)(b+c)(c+a)$. 由于原式也是三次式，故原式与 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 至多相差一个常数因数.

解：$\because$ 此式是一个关于 a、b、c 的对称式，而 $a=-b$ 时，原式 $=0$.

由因式定理及对称性知，$(a+b)(b+c)(c+a)$ 是原式的因式，因此设 $(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc=k(a+b)(b+c)(c+a)$，

令 $a=b=c=1$，则有 $8=8k$，$k=1$.

故原式 $=(a+b)(b+c)(a+c)$.

小结点评 在解题过程中，运用到了特殊值法，设 $a=b=c=1$，实际上取其他值也可以，以简单为准；也可以运用比

较法，展开等号两边多项式，比较同类项的系数也可以求得.

例2 (1)已知△ABC的三边分别为a、b、c，且$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}=3$，试判断△$ABC$的类型.

思路点拨 本题题设简洁，但证明有较大难度，由于$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$是关于$a$、$b$、$c$的轮换式，所以可以猜想$a=b=c$.

解：设$\frac{b}{a}=m^3$，$\frac{c}{b}=n^3$，$\frac{a}{c}=k^3$，则$m^3+n^3+k^3=3$.

$\because \frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}=m^3n^3k^3=1$,

$\therefore mnk=1$. ①$\therefore m^3+n^3+k^3=3mnk$.

$\because (m+n+k)(m^2+n^2+k^2-mn-nk-\mathrm{km})=m^3+n^3+k^3-3mnk$，且$m+n+k\neq0$.

$\therefore m^2+n^2+k^2-mn-nk-\mathrm{km}=0$，$\therefore m=n=k$. ②

由①②知$m=n=k=1$，$\therefore a=b=c$.

$\therefore$ △ABC为等边三角形.

(2)若$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$，证明：$x+y=z$.

思路点拨 根据条件，如果要分离出x、y、z，只有应用参数法. 可设连比等于参数k，为证明等式创造条件.

证明：设$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}=k$，则$x=k(a-b)$，$y=k(b-c)$，$z=k(c-a)$，

$\because x+y=k(a-b)+k(b-c)=k(a-c)=-k(c-a)$,

$\therefore x+y=-z$.

小结点评 解此题关键是运用参数法引入参数k，统一条件，化分式为整式，这种方法是解以连比式为条件的题目的首选方法.

(3)已知$4x^3-4x^2y-xy^2+y^3=0$，求$\frac{x^2+y^2}{xy}$的值.

思路点拨 已知条件不能求出x、y的具体数值，而已知条件是一个三项齐次式，而待求式是一个分式，其分子、分母都为二次齐次式. 也就是说并不一定要求出x、y的具体数值，可以找到x、y之间的关系，这时可以将已知等式和待求式同时变形.

解：由题意知$4x^3-4x^2y-xy^2+y^3=0$，且$y\neq0$，

$\therefore 4(\frac{x}{y})^3-4(\frac{x}{y})^2-(\frac{x}{y})+1=0.$

设$\frac{x}{y}=z$，则原式变形为$4z^3-4z^2-z+1=0$，

$4z^2(z-1)-(z-1)=0$，$(z-1)(2z+1)(2z-1)=0.$

$\therefore z=1$或$z=\frac{1}{2}$或$z=-\frac{1}{2}$. 又$\because \frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=z+\frac{1}{z}$，

$\therefore$原式的值为2或$\frac{5}{2}$或$-\frac{5}{2}$.

小结点评 此题运用了换元法，把变量x与y的相除关系换成了变量z，将二元(x, y)问题，转化为了一元(z)问题.

例3 (1)已知：$(x-3)^5=a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+a_6$.

求：1)$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$；

2)$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$.

思路点拨 根据已知，无法求出a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6的具体值，所以就应首先考虑整体代入法，要出现$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$，那么必须令$x=1$.

解：1)$\because (x-3)^5=a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+a_6$①

令$x=1$，则①式可化为$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=(1-3)^5=-32$②

2)令$x=0$，则①式可化为$a_6=-243$③

由②③得 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-32-(-243)=211$

小结点评 此题采用的是特殊值法与整体代入法相结合的方法进行求解.

(2)已知：$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2$.

求证：$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

思路点拨 本题条件式只有一个，而结论有两个（$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$，$\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$），所以可以考虑应用非负数的性质来解决.

证明： 据题意得 $a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2bcyz+2acxz$，

即 $a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2-2abxy-2bcyz-2acxz=0$，

配方得 $(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2=0$.

$\because (bx-ay)^2\geqslant0$；$(cy-bz)^2\geqslant0$；$(az-cx)^2\geqslant0$，

$$\therefore\begin{cases}bx-ay=0,\\cy-bz=0,\\az-cx=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}\frac{x}{a}=\frac{y}{b},\\\frac{y}{b}=\frac{z}{c},\\\frac{z}{c}=\frac{x}{a},\end{cases}\quad 即\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

小结点评 若干个非负数之和等于0，那么每一个非负数分别等于零.

例4 计算 $(3x^4+7x^3-15x-20)\div(x+2)$ 的结果.

思路点拨 多项式除以多项式，可采用综合除法.

解： $x+2=x-(-2)$

$$\begin{array}{r|rrrrr|}
-2 & 3 & +7 & +0 & -15 & -20 \\
 & & -6 & -2 & +4 & +22 \\
\hline
 & 3 & 1 & -2 & -11 & +2
\end{array}$$