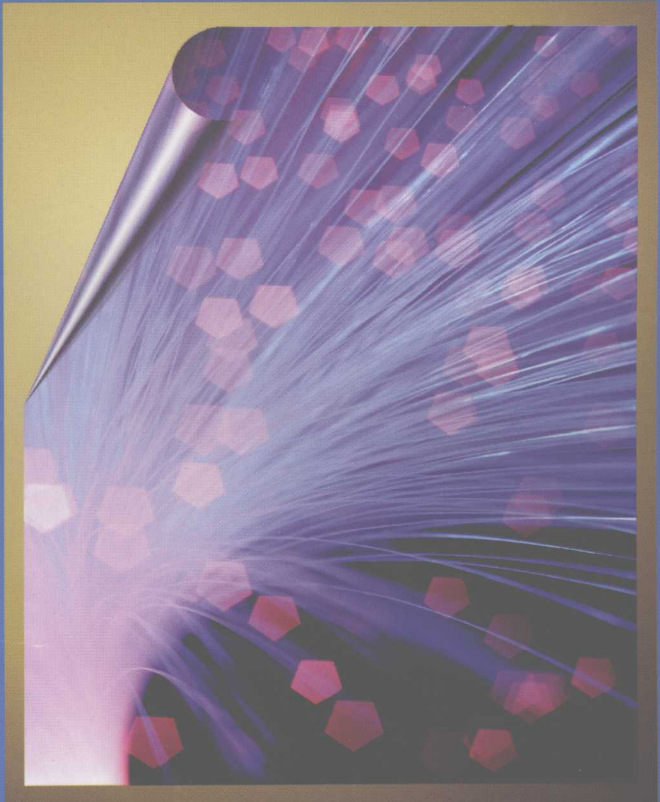
21世纪高等职业教育规划教材

高等数学（工科）

● 宋然兵　王开帅　主编



苏州大学出版社

21 世纪高等职业教育规划教材

高等数学(工科)

宋然兵　王开帅　主编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:工科/宋然兵,王开帅主编. —苏州:苏州大学出版社,2007.7
21世纪高等职业教育规划教材
ISBN 978-7-81090-915-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①宋…②王… Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第116254号

高等数学(工科)

宋然兵 王开帅 主编

责任编辑 李 娟

苏州大学出版社出版发行

(地址:苏州市干将东路200号 邮编:215021)

丹阳兴华印刷厂印装

(地址:丹阳市胡桥镇 邮编:212313)

开本787mm×1 092mm 1/16 印张16 字数400千

2007年7月第1版 2007年7月第1次印刷

ISBN 978-7-81090-915-0 定价:24.00元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换

苏州大学出版社营销部 电话:0512-67258835

本书编委会

主　编　宋然兵　　王开帅

副主编　嵇金山

编　委　（以姓氏笔画为序）

马　林　马　敏　于正权　王开帅

冯　梅　刘　涛　宋然兵　张安宁

俞　宁　黄亚玲　龚汉坤　嵇金山

管颂东

前 言

近年来，高等职业教育获得了飞速的发展. 为了培养适应社会的应用型人才，很多高职院校都进行了新一轮的教学改革. 面对这样的形势，我们结合多年的教学经验和教学改革的实践编写了本书.

在编写过程中，我们充分考虑到高职高专院校开设高等数学的目的和功能，将高等数学作为一门文化基础课与以学生够用为度结合起来；将为学生的专业学习服务与学生的终生学习和未来发展结合起来，力求编写出符合高职高专课程改革趋势和教学实际需求的教材.

本书编写的指导思想是：一是强调微积分思想方法的教育，使学生学会运用微积分的观点来看问题；二是拉近微积分与实际的距离，通过联系实际的方式来建立数学的概念，使学生身临其境；三是降低理论深度和运算的难度，着眼于基本训练. 围绕这样的指导思想，本书具有如下特色：贴近生活，联系实际；简明扼要，浅显易懂；强调基础，注重方法.

本书融入了我们多年进行高职高专数学教学与改革的成果，为课时安排提供了较大的弹性，以面向学生确定教学内容、面向学生确定教学框架，适合于 50～100 学时的教学计划.

本书可作为高职高专工科类各专业高等数学教材，也可作为成人高校、自学考试的教材与参考用书.

本书由宋然兵、王开帅任主编，嵇金山任副主编，参加编写的还有马敏、冯梅等.

在本书的编写过程中，得到了有关专家和教师的大力支持，在此一并表示感谢！同时也真诚地希望使用者提出宝贵意见，以便再版时完善.

编 者

2007 年 6 月

Contents 目录

第一章

极限与连续

高等数学是运用无限、运动的思想，为解决变化率、物体运动规律、求图形面积等实际问题而产生的科学，而极限和连续是高等数学中的两个最基本也是最重要的概念.本章将在回顾函数概念的基础上，进一步讨论初等函数的极限与连续的定义、性质、运算等.

第一节　初等函数

一、函数的概念及性质

“变量”是数学中常用的一个重要的概念，它反映了客观世界运动和变化的特征.时间变量(t)、速度变量(v)、路程变量(s)等都是我们非常熟悉的变量.

函数即是描述两个或两个以上变量之间对应关系的一种数学模型.两个变量 x,y 之间的对应关系模型通常记为 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 等，其中 f,g 为对应法则，x 为自变量，y 为因变量.自变量的取值范围 D 称为函数的定义域，因变量的取值范围 M 称为函数的值域.函数 f 在某一点 x_0 的函数值记为 $f(x_0)$.

对应法则和定义域是函数的两个要素.只有两个要素都相同，函数才相同.

有一种特殊形式的函数，自变量在定义域内不同的范围中取值时，与因变量的对应关系，即函数的表达式(解析式)不同，我们称这种函数为分段函数.

例 1　设 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & 1<x\leqslant 3, \\ 1, & x=1, \\ -1, & -3\leqslant x<1, \end{cases}$ 试计算 $f(2)$，$f(1)$，$f(-2)$，并作图.

解　此函数为分段函数，定义域为$[-3,3]$，可分别计算得

$f(2)=5$，$f(1)=1$，$f(-2)=-1$.

分段函数作图时可分区间作图，$f(x)$的图形如图 1-1.

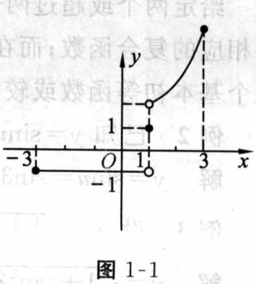


图 1-1

关于一个特殊的定义“邻域”，我们在此也作说明.设 $a,\delta\in\mathbf{R}$，且 $\delta>0$，我们把数集 $\{x\,|\,|x-a|<\delta, x\in\mathbf{R}\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，

记为 $U(a,\delta)$;另外,我们把不包含 a 的数集 $\{x|0<|x-a|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$ 称为点 a 的空心 δ 邻域,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$.

用区间表示,即为 $U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$, $\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.

显然,在一般情况下,当自变量 x 变化时,与之对应的唯一的因变量 y 也会随着变化.我们根据这种变化情况,可以给出函数的如下几个性质.

1. 单调性:若函数在某个区间内,自变量增加时因变量也随着增加,则称该函数为此区间内的单调上升(增加)函数,区间为单调上升(增加)区间;反之,若自变量增加时因变量随着减少,则称该函数为此区间内的单调下降(减少)函数,区间为单调下降(减少)区间.

2. 有界性:若存在某正数 M,使得函数在其定义区间上的所有函数值的绝对值小于 M,则称该函数为其定义区间上的有界函数.

3. 奇偶性:若函数 $y=f(x)$在其关于原点对称的定义区间上恒有 $f(-x)=f(x)$,则称此函数为偶函数,若恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称此函数为奇函数.

4. 周期性:若有正数 T,使得函数 $y=f(x)$在其定义区间上恒有 $f(x\pm T)=f(x)$,则称此函数为周期函数,且周期为 T.可以验证,若 T 为函数 $y=f(x)$的周期,则 T 的正整数倍也为此函数的周期.我们通常把其中最小的周期称为其周期.

对于基本初等函数,即幂函数 $y=x^\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$、指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$、对数函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$、三角函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$ 和反三角函数 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$,它们的图象和性质我们要非常熟悉,后面会经常用到,这里不一一列举.

二、复合函数

定义 1 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,且 $\varphi(x)$的值域与 $y=f(u)$的定义域的交非空.那么,y 通过中间变量 u 建立了关于 x 的函数,我们把这个函数称为是由函数 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,记为

$$y=f[\varphi(x)].$$

图 1-2 描述了变量 x,u,y 之间的传递关系.

跟四则运算一样,复合也是一种运算,是函数之间的一种运算.而由定义 1 可知,有些函数可以进行复合,有些函数不可以进行复合.例如,$y=\arcsin u$,$u=x^2+3$ 就不可以进行复合,因为前者的定义域与后者的值域的交集为空集.

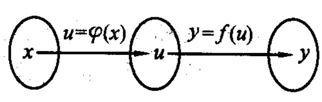


图 1-2

给定两个或超过两个有变量传递关系的函数,我们只要把中间变量依次代入,就可以得到相应的复合函数;而在后面微分与积分的运用中,我们更多的是要把一个复合函数分解为几个基本初等函数或较简单的函数,即给出复合函数的复合过程.

例 2 已知 $y=\sin u$, $u=3x$,试写出复合函数 y.

解 $y=\sin u=\sin 3x$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

例 3 设 $y=\sqrt{1+u^2}$,$u=\tan v$, $v=2x$,试写出复合函数 y.

解 $y=\sqrt{1+\tan^2 2x}=|\sec 2x|$.

此复合函数的中间变量有两个.

例 4　写出复合函数 $y=e^{5x}$ 的复合过程.

解　即将 $y=e^{5x}$ 分解为几个基本初等函数或简单函数,方法是看复合函数的运算过程或读出复合函数的过程.

显然,给出自变量 x,先计算 $5x$,设值为 u,即 $u=5x$,然后再计算 e^u,即 $y=e^u$,故 $y=e^{5x}$ 是由 $y=e^u$, $u=5x$ 复合而成的.

而读出复合函数时,则为"y 等于 e 的……",此时就把 $5x$ 设为 u.

但是下面这个例子就不好用"读"的方法.

例 5　写出复合函数 $y=\cos^3(2x+1)$ 的复合过程.

解　按照计算过程,显然可得 $y=\cos^3(2x+1)$ 是由 $y=u^3$, $u=\cos v$, $v=2x+1$ 复合而成的.

例 6　写出 $y=\ln(\arctan\sqrt{x+1})$ 的复合过程.

解　复合过程为 $y=\ln u$, $u=\arctan v$, $v=\sqrt{w}$, $w=x+1$.

三、初等函数

定义 2　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和复合而形成的,且能用一个解析式表示的函数,称为初等函数.

例如,$y=2+\cos x$,$y=\dfrac{\sin x}{x+1}$, $y=\cos^3(2x+1)$ 等都是初等函数.

分段函数一般不是初等函数,但分段函数也是微积分中要讨论的一类重要函数.

习题 1-1

1. 作出四个反三角函数的图象.
2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1-x}{\sqrt{4-x^2}}$;　　(2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$;

(3) $y=\ln[\ln(\ln x)]$;　　(4) $y=\sqrt{e^{2x}-1}$;

(5) $y=\begin{cases}1-x, & -1\leqslant x<0,\\ 1+x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$

(6) 设 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$,求 $f(\sin x)$ 的定义域.

3. 设 $f(3-2x)=\dfrac{x}{1+x}$,求 $f(x)$,$f[f(x)]$,$f(0)$.
4. 判断函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上的单调性.
5. 判断下列函数的有界性:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$;　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$,$x\in[1,+\infty]$;

(3) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$；　　(4) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$；

(5) $f(x)=\sin x+\cos x$；　　(6) $f(x)=\tan x$.

6. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$；　　(2) $f(x)=x^5-x+3$；

(3) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$；　　(4) $f(x)=g(x)+g(-x),x\in(-\infty,+\infty)$.

7. 写出下列函数的复合函数 $y=f(x)$：

(1) $y=u^2,u=\ln x$；　　(2) $y=e^u,u=\sqrt{v},v=\sin x$；

(3) $y=\arccos u,u=\frac{1}{v},v=1+3x$；　　(4) $y=\tan u,u=\sqrt[3]{v},v=1-x^2$.

8. 写出下列函数的复合过程：

(1) $y=\frac{1}{1+4x}$；　　(2) $y=(3-2x)^5$；

(3) $y=\tan^2\frac{x}{3}$；　　(4) $y=\cos\sqrt{\ln x}$；

(5) $y=3^{\arctan\frac{1}{x}}$；　　(6) $y=\sec(1+x^2+x^4)$.

第二节　极限定义

一、“无限接近”的记号

函数值及单调性、有界性等是函数的静态或总体性质. 现在我们要用无限和运动的思想来定量地研究函数的变化特征.

我们看数列$\{a_n\}$：$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$，当项数 n 越来越大时，对应的项 a_n 的值越来越小，与数 0 越来越接近，那么，我们就说“当 n 无限增大时，a_n 无限趋近于 0”.

我们再看函数 $y=2x$，若 x 依次取值 0.9，0.99，0.999，0.9999，…，或取值 1.1，1.01，1.001，1.0001，…，向数 1 无限趋近时，函数值 y 依次取值 1.8，1.98，1.998，1.9998，…，或 2.2，2.02，2.002，2.0002，…都向数 2 无限趋近.

现在给出记号“$\to$”，它就表示“无限趋近于”或“无限接近于”.

下面列出自变量的几种无限变化的情况及相应的记号.

1. “自然数 n 的取值无限增大”记为“$n\to\infty$”.

2. “实数 x 的绝对值无限增大”记为“$x\to\infty$”，此时可理解为数轴上的点 x 离原点越来越远，包含向数轴的正向和负向运动. 若 x 只向数轴的正向无限运动，则记为“$x\to+\infty$”，反之，记为“$x\to-\infty$”.

3. “实数 x 的值无限趋向于一个确定的值 x_0”，记为“$x\to x_0$”，此时可理解为实数 x 与 x_0 的差越来越小，当然实数 x 既取大于 x_0 的值，也取小于 x_0 的值，即实数 x 从 x_0 左右两个方向无限趋近于 x_0. 若实数 x 只从 x_0 左边($x<x_0$)无限趋近于 x_0，则记为“$x\to x_0^-$”，反之，

记为“$x\to x_0^+$”.

二、极限定义

定义 1 若数列$\{a_n\}$当项数 n 无限增大时，a_n 无限趋近于一个确定的常数 A，那么就称这个数列存在极限且为 A，记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

根据上述极限的定义，一个数列若有极限，极限值必唯一.

对于比较简单而又十分重要的几类数列的极限，我们可以通过观察得知：

1. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$；

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0\ (p>0)$；

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{q^n}=0\ (|q|>1)$.

当然，并不是所有的数列极限都存在，例如，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 极限不存在，$\lim\limits_{n\to\infty}2^n$ 极限也不存在. 因为当 n 无限增大时，都找不到一个确定的常数 A，使得 $a_n\to A$.

定义 2 若当$|x|$无限增大，即 $x\to\infty$时，函数 $f(x)$无限地趋近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限，记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

将定义中的“∞”换成“$+\infty$”或“$-\infty$”，有类似的结论，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

根据定义 2，我们观察函数 $y=\frac{1}{x}$ 和 $y=2^x$ 的图象(图 1-3 和图 1-4)，可以得到如下极限：

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$；

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}2^x$不存在，$\lim\limits_{x\to\infty}2^x$不存在.

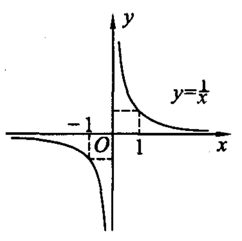


图 1-3

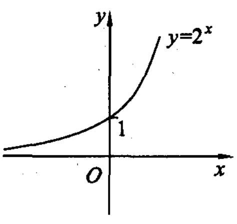


图 1-4

通过上面两个函数的极限情况，我们可以得到如下结论：

当且仅当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$极限都存在且相等时，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$极限才存在，即有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

例 1 讨论函数 $f(x)=\frac{|x|}{x}$在 $x\to\infty$时的极限.

解 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x}=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x|}{x}=1$,因为极限值不相等,所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{|x|}{x}$极限不存在.

例 2 讨论函数 $y=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x<0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x\to\infty$时的极限.

解 因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$,所以$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

定义 3 若当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$无限地趋近于一个确定的常数 A,那么就称数 A 为当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

根据定义 3,考察函数 $y=x-1$ 在当 $x\to 2$ 时的极限. 通过图 1-5可知,不管 x 从小于 2 的方向趋近于 2,还是从大于 2 的方向趋近于 2,函数 $y=x-1$ 的值总是趋近于 1,所以有

$$\lim_{x\to 2}(x-1)=1.$$

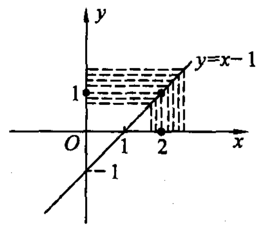


图 1-5

对于常值函数 $y=C$,我们有

$$\lim_{x\to x_0}C=C.$$

现考察函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$的图象(图 1-6),可以得到$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$. 但是我们发现,函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$在 $x=1$ 处无意义,无函数值. 所以我们得到结论,函数在某一点的极限是否存在与函数在该点的函数值是否存在无关,也与函数取什么样的函数值无关(若定义函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$在 $x=1$ 处的函数值为 3,或是其他值,函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$在 $x=1$ 处的极限值仍为 2).

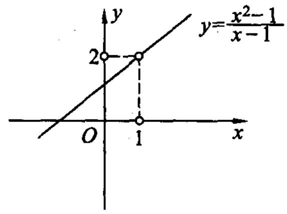


图 1-6

实际上,函数在某一点的极限仅与函数在该点左右附近的状态有关. 譬如,我们可以说函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$在 $x=1$ 处的极限仅与函数在开邻域 $\mathring{U}(1,\delta)$里的状态有关.

定义 4 若当 $x\to x_0^+$ 时,函数 $f(x)$无限地趋近于一个确定的常数 A,那么就称数 A 为当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的右极限,记为

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

若当 $x\to x_0^-$ 时,函数 $f(x)$无限地趋近于一个确定的常数 A,那么就称数 A 为当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的左极限,记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A.$$

显然,只有当函数在某点的左、右极限都存在且相等时,函数在该点的极限才存在,即

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

例 3 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0,\\ 1+x, & x>0\end{cases}$ 当 $x\to 0$ 时的极限.

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=1$.
所以，当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限存在，且为 1，即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

一般情况下，我们计算初等函数在某一点的极限时不需要讨论左右极限，只有计算分段函数或含绝对值的函数在分界点的极限时，才须讨论左、右极限．看下面的例子．

例 4 已知 $f(x)=\begin{cases}x+3, & x\geqslant 1,\\ 4, & 0<x<1,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+3)=5$.
而计算 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 时需要讨论左、右极限，因为左、右极限都为 4，易知 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=4$.

例 5 设 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，计算 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}1=1$.
因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

习题 1-2

1. 怎样理解“趋近”和“无限趋近”？
2. 函数在某点的函数值是否决定了函数在该点的极限值？试举例说明.
3. 试说明左、右极限与极限的关系.
4. 试判断下列极限是否存在？

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n\pi)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$.

5. 根据极限定义，用观察法写出下列数列或函数的极限：

(1) $a_n=\dfrac{3}{n}$；　　(2) $a_n=\dfrac{1}{e^n}$；

(3) $a_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$；　　(4) $a_n=(-1)^n\dfrac{1}{5^n}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}2$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}3^{-x}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$；

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$；　　(10) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$；

(11) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x$；　　(12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{x-1}$.

6. 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$，试求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ \sin x, & 0\leqslant x<\pi,\\ 1, & x\geqslant\pi,\end{cases}$ 试求此函数分别在 -1、0、$\dfrac{\pi}{2}$、π、4 的极限.

第三节　极限的运算及两个重要极限

如何求函数极限？利用上一节介绍的极限的定义只能观察出极其简单的函数的极限，对于较复杂的函数就不易得到结果了. 下面我们来介绍和学习几种基本的极限类型和相应的求极限方法.

一、极限的四则运算法则

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则有：

法则 1. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$；

法则 2. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$；

法则 3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$.

(证明略)

上述法则对 x_0 取无穷大等其他值及对于有限个函数的运算都成立. 注意法则运用是有条件的，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$.

例 1　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n}+2\right)$.

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n}+2\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}2=0+0+2=2$.

例 2　求$\lim\limits_{x\to 3}(x^2+3x-1)$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 3}x^2+\lim\limits_{x\to 3}3x-\lim\limits_{x\to 3}1=9+3\lim\limits_{x\to 3}x-1=8+9=17$.

例 3　求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\times\left(3-\dfrac{1}{x^2}\right)\right]$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\times\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{x^2}\right)=1\times 3=3$.

例 4　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{2x^2+5}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{2x^2+5}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(x+1)}{\lim\limits_{x\to 0}(2x^2+5)}=\dfrac{1}{5}$.

下面我们看条件不满足时的例子.

例 5　求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

解　显然分母的极限为零，不能直接利用四则运算中的除法法则，但是我们发现分子和分母有共同的极限为零的因子$(x-1)$，可以将其消去，再利用四则运算法则计算极限. 故

原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$.

此类极限我们把它归为“$\frac{0}{0}$”型，即分子和分母的极限都为 0，且可以消去分母的零因子. 这种求极限的方法我们称为“消去法”.

例 6　求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x+3}+2)=2+2=4.$

例 7　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{2n^2+n+7}$.

解　通过观察，我们发现分子和分母的极限都不存在，不能直接利用四则运算法则. 当然我们不能说此题的极限不存在，我们可以对函数进行“同除”的变形，然后再求极限.

分子、分母同除以 n^2，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{2n^2+n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{7}{n^2}}=\frac{3}{2}.$$

此类极限称为“$\frac{\infty}{\infty}$”型，求极限方法是“同除法”.

例 8　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{2x^2+x+7}$.

解　分子、分母同除以 x^2 即可. 故

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}=\frac{3}{2}.$$

例 9　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x+3^x}{2^x-3^x}$.

解　分子、分母同除以 3^x，得

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}=\frac{1}{-1}=-1.$$

注意同除时是同除以较大的一项.

二、两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

观察易知，分子分母的极限都为零，是“$\frac{0}{0}$”型. 但是我们不能利用“消去法”求出极限.

现在我们由不等式 $\sin x<x<\tan x, x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，得