缺省逻辑的扩充

傅　丽◎著

缺省逻辑的
QUESHENG LUOJI DE KUOCHONG
扩充

中国科学技术出版社
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

青海民族学院学术丛书
青海民族学院院长基金资助项目
青海民族学院博士基金资助项目（06D003）

缺省逻辑的扩充

傅　丽　著

中国科学技术出版社
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·北　京·
BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

缺省逻辑的扩充/傅丽著. —北京：中国科学技术出版社，2006.8
ISBN 7-5046-4424-2

Ⅰ. 缺...　Ⅱ. 傅...　Ⅲ. 数理逻辑-研究　Ⅳ. O14

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 076479 号

自 2006 年 4 月起本社图书封面均贴有防伪标志，未贴防伪标志的为盗版图书。

责任编辑　程安琦　孙卫华
封面设计　鲁　筱　杨　军
责任校对　林　华
责任印制　安利平

中国科学技术出版社出版
北京市海淀区中关村南大街 16 号　邮政编码：100081
电话：010-62103210　传真：010-62183872
http：//www.kjpbooks.com.cn
科学普及出版社发行部发行
北京长宁印刷有限公司印刷
*
开本：787 毫米×960 毫米　1/16　印张：8　字数：140 千字
2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷　定价：22.00 元

序

与其他学科相比较，数学学科以其严密性而著称．这种严密性扎根于它的逻辑基础．然而正如 Morris Kline 在他的《古今数学思想》一书的末尾所说的那样：“过分追求严密性，将引入绝境而失去它的真正意义．数学仍然是活跃而富有生命力的，但是它只能建立在实用的基础上”．其实，说到底数学只是对现实世界的一种理想化了的描述．以逻辑学中最基本的 MP 规则（即 Modus Ponens, 分离规则）为例，该规则说从 p 和 $p \longrightarrow q$ 可得出 q．把这一规则用来处理数学问题是清楚无误的，比如，设 C 代表奇次实系数多项式之集，p 代表“$f \in C$”, q 代表“f 有实根”, 则 $p \longrightarrow q$ 成立，这时如果 f 是实系数 3 次方程，则 p 成立，所以由 MP 规则立即推出 f 有实根．但把 MP 规则用于现实世界的具体对象时往往就会遇到麻烦．比如，用 C 表示鸟类之集，p 代表“$f \in C$”, q 代表“f 会飞”, 则通常认为 $p \longrightarrow q$ 成立．设 f 是鸵鸟，则 p 成立，那么由 MP 规则将得出鸵鸟会飞的错误结论．当然，我们并不是说 MP 规则有什么问题，而是指把 MP 规则用于现实世界中的具体问题时可能会遇到麻烦．再举一个与时间有关的例子，设 C 代表脊椎动物之集，p 代表“$x \in C$”, q 代表“x 不能单性繁殖”, 则在 100 年前公认 $p \longrightarrow q$ 成立，那时如果 x 是一只羊，则 q 成立，从而由 MP 规则可得出“羊不能单性繁殖”的结论．但今天随着克隆技术的出现，这一结论不再成立了．当然，这时 MP 规则仍没有错误，但 100 年前可以应用 MP 规则进行推理的事例却发生了变化．总之，MP 规则看起来既简单又清楚，这是数理逻辑学科高度的抽象化的一个体现．但它只能用于理想世界的推理，一旦用于现实世界就可能会遇到种种问题，如：p 是不是真正成立？从 p 果真能得到 q 吗？现在从 p 能得出 q, 将来也一定能从 p 得出 q 吗？等等．

传统的逻辑学中有一个朴素的思想是，如果加强作为推理基础的假设条件之集，则会得出更强的结论来．比如，在第一个例子中再假设“f 有重根”, 则可得出“f 有 3 个实根”的结论．如果再增加一个假设条件“f 缺常数项”, 则可得出“f 有 3 个实根，并且其中有一个是 0”的结论．但是在现实世界中情况就可能有很大的不同，可能随着假设条件的增加而导致结论的削减．比如，考虑当初“鸟会飞”这个结论是怎样得出来的，后来又是怎样受到质疑的．人们

通过大量的事例，如“麻雀会飞”,“喜鹊会飞”,“鸡会飞，鸭会飞（尽管飞得不好）”等得出了“鸟会飞”的结论，后来人们又不断注意到“燕子会飞”,“天鹅会飞”,“黄鹂会飞”等而增强了相信“鸟会飞”的结论，直到有一天在澳洲发现了“鸵鸟不会飞”，才明白了“鸟会飞”这一结论应当削减，即“鸟会飞”的结论是有条件地成立的. 确切地说，如果“x 是鸟，并且 x 不是鸵鸟， x 不是企鹅， x 不是 $\cdots\cdots$(或许还有什么我们现在还没有发现的不会飞的鸟类)，那么 x 会飞”. 这种推理正是非单调逻辑要研究的问题.

非单调逻辑是基于不完备信息或变化中的信息的逻辑理论，缺省逻辑（Default logic），自动认知逻辑（Autoepistemic Logic）和约束 (Circumscription) 是非单调逻辑的几个主流分支，其中缺省逻辑似乎占主导地位，在人工智能学科中有重要的应用. 傅丽博士近年来从事非单调逻辑的教学与科研工作，在缺省逻辑方面有不少研究心得和成果. 现在她以论述缺省逻辑为主线写出了这本非单调逻辑方面的专著，为有志于了解或从事这方面研究的读者提供了方便，也有助于人工智能知识的普及和推广非单调逻辑的研究.

王国俊

2006 年 3 月于西安

前　言

传统的推演逻辑总是单调的 (monotonic), 增加新假设不会破坏原有的结论. 等价地说, 结论集随着假设集单调地增加; 形式地说: "一种逻辑是单调的" 当且仅当 "它的可证关系满足: 对任一假设集 S 与 S', 由 $S \subseteq S'$ 可推出 $\{A \mid S \vdash A\} \subseteq \{A \mid S' \vdash A\}$". 例如, $S =$ 全体自然数之集 =N, $S' =$ 全体实数之集 =R, 显然 $S \subseteq S'$, 若 $W = \{x+y=6 \mid x, y \in N\}$, 则有 $W = \{x+y=6 \mid x, y \in S\} \subseteq W' = \{x+y=6 \mid x, y \in S'\}$. 事实上, 在人类的推理中, 有许多逻辑系统不满足单调性, 许多时候原有的结论随着新信息的增加不再成立, 借用人工智能的术语来说, 在逻辑系统中存在许多非单调推理 ($non-monotonic\ \ reasoning$) 形式. 第一个试图系统地形式化非单调推理的是 Sandewall(1972), 而 "非单调" 这一术语最初是由 Minsky 在 1975 年提出的. 现在, 非单调推理已成为人工智能和信息科学中活跃的研究领域之一. 它在数据挖掘、智能控制、机器学习、知识获取、医疗诊断、专家系统、人工神经网络、数据库知识发现、机械故障诊断、财政与市场分析等领域有广泛的应用. Reiter(1980)[1] 的缺省逻辑是最成功的非单调推理形式之一, 已被广泛应用于人工智能的各个领域, 而缺省扩充又是研究的主要热点. 缺省逻辑的扩充要求加入的是可以接受事实或 (彼此相容, 且与原有的事实不矛盾的缺省规则的) 结论以求得到某种完备性, 也就是说, 在实际的应用中, 我们仅需要考虑那些可适用的缺省规则的结论, 研究它们是否与我们已有的知识体系相容. 但由于事实集与缺省规则集均可能具有较为复杂多样的形式, 而且已有的计算缺省理论扩充的方法都不是构造性的, 似乎是 "从未知到未知", 因此实际计算扩充是困难的.

本书首先从形式上较为简单的、有限的无前提正规闭缺省理论入手, 系统地研究了有限的无前提正规闭缺省理论的相容扩充, 对相容扩充进行了分类; 给出了相容扩充的特征刻画; 而且, 建立了一种制作相容扩充的准构造性方法; 同时, 对缺省规则固定时, 缺省理论可能有的不同相容扩张的个数进行了估计.

在命题逻辑和谓词逻辑中, 常考虑公式的标准表示问题, 例如, 对每一个命题公式 φ, 存在一个合取范式型的公式 ψ, 使得 φ 和 ψ 有相同的模型 (即逻辑等价), 事实上, 存在一种简单的算法可以从 φ 构造出 ψ . 类似地, 缺省逻辑也存在表示性问题, 其主要特征是缺省逻辑的表示理论可由某一确定的有相同

扩充集的缺省理论表示. 已有的一些结论表明缺省理论可由语构上较简单的具有相同扩充的缺省理论来表示，有关缺省逻辑表示理论已有一些有意义的结果(例如可参阅文献 [19 ~ 31])，然而关于无限的，非正规缺省理论在这些结果中并没有考虑到，这是一个较难的公开问题. 苏开乐教授在文献 [24] 中针对“无推理 (inference-free)”，即无前提正规缺省理论讨论了这一问题. 在本书中，我们将证明无前提不是必要的条件，并且有有限点式不相容扩充的缺省理论可由半正规缺省理论表示；还有结论表明任一缺省理论 (D,W) 均可由一个含空事实集的缺省理论 $(D',W'=\emptyset)$ 来表示，我们将指出 $W'=\emptyset$ 也可以放宽.

关于缺省理论的扩充的求法较为系统的有 Grigoris Antoniou 从缺省逻辑的算子语义出发，通过建立“进程树”来求扩充的语义方法和 V.W.mark, M.Truszczynski 从语构角度出发，根据缺省规则结论及其特点引入良序而构造性地求扩充的语构方法. 这两种方法对有限缺省规则而言在理论上都是可行的，但是在实际计算时如果缺省规则比较多，这些方法特别是语构方法情形较为复杂，显得相当繁琐，给计算造成了很大困难. 我们知道，缺省理论的扩充存在两大弊端，其一是无法描述缺省规则间固有的逻辑关系，即没有累积性 (cumulativity)，其二是无法描述结论与验证式之间的逻辑依赖关系，它不要求所有可应用的缺省的判断是相容的. 事实上，为了描述结论与验证式之间的逻辑依赖关系和简化算法，张明义先生已经提出了自相容缺省理论. 在考虑规则判断的相容性时，我们发现有些规则对求扩充没有影响，而且可以把具有不相容判断的缺省规则分开讨论，这与自相容缺省理论的思想是符合的，在实际上也是可行的. 所以，为便于计算扩充，本文指出了在计算具体的缺省理论的扩充前，可以对缺省规则进行适当的简化和分类. 也正是基于此种想法，本文通过具体的示例分别讨论了缺省规则的分类问题和简化问题，给出了分类和简化的基本原则，从而明显地简化了准构造性地求扩充的计算.

Reiter 的缺省逻辑存在的一些缺陷，如它有时会导出某些非直觉的结果，往往使得缺省规则间的相互作用引起悖论，原因在于，它不能分情形来进行推理，而实践中很多时候是需要分情形进行推理的. 为了克服这一缺陷，近年来，修正缺省逻辑的研究十分活跃，这要求缺省逻辑不只是能分情形进行推理，而且应该不引起某些缺省规则间的矛盾. 在缺省逻辑的研究中已经提出了几种关于分情形推理的方法 (如文献 $[18,38\sim 40,43,45\sim 56]$). 如 Moinard 在文献 [40] 中分析了这些问题，并且提出缺省扩充的修正定义以解决这一问题的方法，他证明了缺省规则的一种简单的转化可以使得运用 Reiter 最初的扩充定义进行分

情形推理成为可能. 相应的, Voorbraak 在文献 [61] 中提出了一种相似的转化, 然而当分情形推理不可能时, 这种转化就忽略了可适用缺省规则的结论, 从而就将可能的解忽略掉. 为了克服这些缺陷, Roos 在文献 [63] 中修正了 Reiter-扩充的定义, 提出了 Roos- 扩充的问题, 并且讨论了这两种扩充之间的关系. 张明义教授在文献 [47, 55 ~ 59, 62] 已经研究和讨论了如何借助句子型缺省逻辑如何计算缺省逻辑的 Roos- 扩充, 并且得到一些好的结论. 许道云教授等在文献 [58 ~ 59] 中讨论了句子形缺省逻辑中的分情形推理, 他们提出了一种 "树" 的方法来研究缺省逻辑中的分情形推理, 并提出了一种算法来计算取自句子集的文字的最小集合, 并且运用这种方法来计算 Roos- 扩充, 得到与 Reiter- 扩充相类似的一些结论. 本书在已有结论的基础上, 没有借助 "句子型" 缺省规则, 讨论和证明了 Roos- 扩充与 Reiter- 扩充相区别的一些性质.

近年来, 鉴于 Reiter 的缺省理论 DL 存在一些不足之处, 如有时它会导出一些非直觉的结果, DL 不是积累的, 且不承诺预设 (commit to assumption) 等, 为修正这一缺陷, Brewka[20,36] 提出了一种具有累积性的缺省逻辑 (cumulative default logic(CDL)),CDL 具有累积性且承诺假设, 同时具有半单调性, 只是半单调性破坏了非正规缺省理论的附加表达 (additional expressioness), 从而使得缺省之间的优先性表示成为不可能. 为此, Giordano 在文献 [37],Makinson 在文献 [41, 44] 中提出了两个新变种, CADL (commitment to Assumptions Default Logic) 与 QDL (Quasi Default Logic), 它们都具有累积性, 但不具有半单调性. 然而所有这些理论的扩充都没有一种具体可行的方法, 只有从定义出发去求扩充, 似乎是 "从未知求未知", 在计算上几乎是不可能的, 更多的只是验证其扩充的存在性. 本书借助 Grigoris Antonion[16] 的语义算子理论方法以及 V.W.Marek 和 M.Fruszcuyski[40,61] 的语构方法, 将其用于求 CDL 的扩充, 这使计算成为可能. 同时, 我们也指出, 所用到的这两种方法也适用于其他形式的 DL 变种, 如约束的 (Constrained) 和验证的 (Justified) 缺省理论等, 并且这两种方法在使用时只是在具体的形式中可能略有差异, 我们以优先缺省逻辑 (prioritied default default(PDL)) 为例说明了这一点.

统计的概念自提出后已被广泛应用于各个领域, 对缺省的研究也不例外 (参阅文献 [67 ~ 98]).Gregory R. Wheeler 在文献 [76] 中最先提出统计缺省, 它是经典缺省逻辑的推广, 它允许我们在标准的推理统计中模型化普遍的推理模式. 这一理论是由经典的 Reiter 缺省规则带上单位区间中的实数作为约束的缺省规则之集与带有约束的事实之集构成的集合序对所组成. 这个实数是可用缺省规

则的结论能够被接受的错误概率的 upper-bound 极限. 在 Reiter 标准形式中, 缺省扩充是递归闭的, 并且扩充在缺省理论的缺省集下是封闭的. 然而, 这些性质对统计缺省并不成立, 对统计推理的错误概率的约束在推理中不必保证其错误概率不变, 也就是说, 统计缺省扩充不是递归闭的, 这将使得一些好的性质, 如半单调性等不再成立. 但是, 如果我们在计算统计扩充时限制统计缺省理论是封闭的, 并且对错误参数 ϵ 给出一定的限制, 也即除了要求缺省规则中出现的公式均为闭公式外, 还需要满足条件 $\epsilon_\gamma = \epsilon_\alpha + \epsilon_s \leqslant \epsilon$, 情况将不一样, 本书在此基础上讨论了闭的统计缺省理论扩充的一些好的性质; 同时, 还介绍了两种计算扩充的方法: 一是运用统计缺省规则结论的特点, 求 $\Delta_s = (S, W)$ 在 ϵ 向上的迭代序列 $Th_\epsilon^{S_\Pi}(W)$, 来得到其扩充, 另一种是从算子语义的角度出发运用 "进程树", 寻找闭且成功的节点来计算; 而且, 定义闭的正规统计缺省理论, 并系统地讨论了它的扩充, 给出了如半单调性, 正交性等一些好的性质, 而且讨论了闭的正规统计缺省的证明理论.

最后, 介绍了一些其他的非单调推理形式, 主要是闭 World 假设、约束逻辑以及自认知逻辑, 给出它们的一些基本知识和它们各自所对应的扩充的性质, 这对读者系统地了解非单调推理逻辑是有意的.

本书是在我的博士毕业论文的基础上, 进一步充实和提高而成, 我的导师王国俊教授在百忙中审阅了此稿, 提出宝贵的意见和建议. 对导师的悉心指导、热情帮助和真切的支持, 谨此表示我最由衷的感谢. 本书的出版也得到我所在单位领导和专家以及同窗学友的大力支持和关心, 特别是扈生彪主任, 李银奎教授和学友姚喜妍博士, 雷洪轩等的帮助, 对他们表示诚挚的谢意, 谢谢大家!

书中难免存在错误和疏漏之处, 恳请广大学者和读者给予批评指正.

傅丽

2006 年 2 月

目　　录

第一章 谓词逻辑

经典逻辑是逻辑演算的基础，多值逻辑是把经典二值逻辑的赋值域从 $\{0,1\}$ 扩展到 $[0,1]$. 命题逻辑在等价的意义下，即在逻辑等价和可证等价双重意义下揭示了许多具有不同形式的命题之间的本质联系. 例如，不论 A,B 代表什么命题， $A\to B$ 总是和它的逆否命题 $\neg B\to\neg A$ 等价，也和其析取形式的命题 $\neg A\vee B$ 等价，这些是十分有用的结果，有助于我们去认识被不同外形掩盖起来了的规律. 但命题逻辑在应用方面仍然有很大的局限性，谓词逻辑克服了这一缺陷. 谓词逻辑是单调的，而任何的非单调推理形式都是超越于经典命题逻辑，在同一假设下支持更多的结论，它仍然以基本的逻辑形式为基础. 在本章我们给出一些关于谓词逻辑的基础知识，不是全面的，仅仅是本书中会用到的知识点.

§ 1.1 谓词逻辑的语构

1.1.1 谓词逻辑的语言

谓词逻辑常用的符号有 $\neg$ (negation 否定),$\vee$ (disjunction 析取),$\wedge$(conjunction 合取), $\leftrightarrow$(equivalence 等价),$\forall$(universal quantifier 全称量词), $\exists$(existential quantifier 存在量词), 开闭括号 (,), [,], 可数变量集 $\{x_0,x_1,\cdots\}$, (通常，变量也称变元用小写字母 x,y,z 等表示，而常量也称常元用小写字母 a,b,c 等表示). 特殊类别符号 s, 用符号 (signature)Σ 表示形如 $f:s^n\to s$ 或 $p:s^n$(n 是自然数) 的字串集，即

$$\Sigma=\{f:s^n\to s \text{ 或 } p:s^n,n\in N\}.$$

谓词逻辑的语言包括:

(1) $f:s^n\to s\in\Sigma,f$ 是 n 元函数符号，也说 f 是 Σ 中的函数符号;

(2) $g:s^n\in\Sigma,g$ 是 n 元谓词符号，也说 g 是 Σ 中的谓词符号;

(3) 0 元函数符号叫常数 (constant);

(4) 0 元谓词符号叫原子 (atom) .

项 (term) 的定义如下:

(1) 变元和个体常元是项;

(2) f 是 n 元函数符号, $t_1,\cdots,t_n$ 是项, $f(t_1,\cdots,t_n)$ 也是项;

(3) 除 (1),(2) 外再无其他形式的项.

项叫基的 (ground), 是指项中不含任何变元. 若 t' 是 t 的子串 (substring), 则称 t' 是 t 的子项 (subterm).

公式 (formulae) 的定义如下:

(1) p 是 n 元谓词符号, $t_1,\cdots,t_n$ 是项, 则 $p(t_1,\cdots,t_n)$ 是原子公式, 若 $t_1,\cdots,t_n$ 是基项, 则 $p(t_1,\cdots,t_n)$ 是基原子公式;

(2) φ,ψ 是公式, x 是变量 (即变元, 下文均用 "变元") , 则 $\neg\varphi,\varphi\vee\psi,\varphi\wedge\psi,\varphi\rightarrow\psi,\varphi\leftrightarrow\psi,\forall x\varphi,\exists x\varphi$ 也是公式, $\varphi\rightarrow\psi$ 也写成 $\psi\leftarrow\varphi$;

(3) 除 (1),(2) 外再无其他形式的公式.

如果公式 ψ 中含有全称量词 $\forall x\varphi$ 或存在量词 $\exists x\varphi$, 则称 φ 是量词 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的辖域; 如果公式 ψ 的辖域中含有 $\forall x$ 或 $\exists x$, 则称 ψ 中的变元 x 是约束的 (bound), 否则是自由的 (free); 如果公式中不含任何自由变元, 则称公式是闭的 (closed), 否则是开的 (open); 闭公式也叫句子 (sentence), 对开公式 $\forall x_1\cdots\forall x_n\psi$, 这里 $x_1,\cdots,x_n$ 是 ψ 的自由变元, 称 $\forall x_1\cdots\forall x_n$ 是 ψ 的全称闭包 (universal closure).

文字 (literal) 是原子公式 (又叫正文字 positive literal) 或原子公式的否定 (又叫负文字 negative literal) .

1.1.2 代换 (Substitutions)

代换 (substitution)σ 是一个有限集合 $\{x_1/t_1,\cdots,x_n/t_n\}$, 使得 $x_i,t_i,\forall i\in\{1,\cdots,n\}$ 分别是不同的变元和项, 若所有的 t_j 都是基项, 则 σ 是基代换, 记为: $t\sigma$, 表示在 t 中同时用所有的 t_i 代替 x_i.

把代换 σ 用于公式 φ, 即在公式 φ 中用 t_i 同时代替所有自由出现的 x_i, 记为 $\varphi\sigma$. 如果 $\varphi\sigma$ 中不含自由变元, 则称 $\varphi\sigma$ 是 φ 的基实例 (ground instance).

$\varphi\sigma$ 是可允许的 (admissible), 指在代换 σ 用于公式 φ 之后, 任一 t_i 中都没有一个变元会成为约束的.

给定项 $t_1,\cdots,t_n$ 和含自由变元 $x_1,\cdots,x_n$ 的公式 φ, 通常用 $\varphi(t_1,\cdots,t_n)$ 代替 $\varphi\{x_1/t_1,\cdots,x_n/t_n\}$.

两个代换 $\sigma = \{x_1/t_1, \cdots, x_n/t_n\}, \rho = \{y_1/s_1, \cdots, y_n/s_n\}$ 的复合定义为: $\sigma\rho = \{x_i/t_i\rho \mid x_i \neq t_i\rho\} \cup \{y_j/s_j \mid y_j \notin \{x_1, \cdots, x_n\}\}$.

设 $T = \{t_1, \cdots, t_n\}$ 是非空的项之集, T 的合一化子 ($unifer$) 是指: 使得 $T\sigma$ 中仅含有一项的代换 σ. σ 是 T 的最一般的合一化子 ($most\ \ general\ \ unifer$, 简记为: mgu), 指如果对 T 的每一个合一化子 τ, 都存在一个代换 ϑ, 使得 $\tau = \sigma\vartheta$.

§ 1.2 谓词逻辑的语义

这里给出的知识仅是最基本的、最具体的内容, 包括证明在内的其他知识可以参考文献 [12].

1.2.1 解释和有效性

定义 1.2.1 解释 (也叫代数)$\mathcal{A}$ 的组成如下:

(1) 非空集合 $dom(\mathcal{A})$, 是解释的论域;

(2) 函数 $f_{\mathcal{A}} : dom^n \to dom(\mathcal{A})$,$f$ 是 n 元函数符号;

(3) 关系 $r_{\mathcal{A}} \subseteq dom^n(\mathcal{A})$,$r$ 是 n 元谓词符号.

解释 $\mathcal{A}$ 上的状态 (state) 是函数 $sta : \{x_1, \cdots, x_n\} \to dom(\mathcal{A})$, 给定变元 x 和值 $a \in dom(\mathcal{A})$, 修正的状态 (modified state) $sta(x/a)$ 定义与 sta 类似, 区别仅在于变元 x 的值是 a.

定义 1.2.2 给定解释 $\mathcal{A}$ 和状态 sta, 项 t 的值 (value) 递归的定义如下:

(1) $val_{\mathcal{A},sta}(x) = sta(x)$;

(2) $val_{\mathcal{A},sta}(f(t_1, \cdots, t_n)) = f_{\mathcal{A}}(val_{\mathcal{A},sta}(t_1), \cdots, val_{\mathcal{A},sta}(t_n))$.

定义 1.2.3 公式 χ 在解释 $\mathcal{A}$ 和状态 sta 下是真的 (true), 记作: $\mathcal{A} \models_{sta} \chi$, 递归的定义如下:

(1) $\mathcal{A} \models_{sta} (p(t_1, \cdots, t_n)) \iff (val_{\mathcal{A},sta}(t_1), \cdots, val_{\mathcal{A},sta}(t_n)) \in p(\mathcal{A})$;

(2) $\mathcal{A} \models_{sta} \neg\varphi \iff \mathcal{A} \not\models_{sta} \varphi$;

(3) $\mathcal{A} \models_{sta} (\varphi \vee \psi) \iff \mathcal{A} \models \varphi$, 或 $\mathcal{A} \models_{sta} \psi$;

(4) $\mathcal{A} \models_{sta} (\varphi \wedge \psi) \iff \mathcal{A} \models_{sta} \varphi$, 且 $\mathcal{A} \models_{sta} \psi$;

(5) $\mathcal{A} \models_{sta} (\varphi \to \psi) \iff \mathcal{A} \models_{sta} (\neg\varphi \vee \psi)$;

(6) $\mathcal{A} \models_{sta} (\varphi \leftrightarrow \psi) \iff \mathcal{A} \models_{sta} (\varphi \wedge \psi)$, 或 $\mathcal{A} \models_{sta} (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$;

(7) $\mathcal{A} \models_{sta} \forall x\varphi \iff \mathcal{A} \models_{sta(x/a)} \varphi, \forall a \in dom(\mathcal{A})$;

(8) $\mathcal{A} \models_{sta} \exists x\varphi \iff \exists a \in dom(\mathcal{A})$, 使得 $\mathcal{A} \models_{sta(x/a)} \varphi$.

如果公式是基的 (ground), 则状态 sta 是不相关的 (irrelevant); 此时, 真值 (truth value) 依赖于 $\mathcal{A}$.

定义 1.2.4 如果对 $\mathcal{A}$ 上所有的状态 sta 都有 $\mathcal{A} \models_{sta} \varphi$, 则称 φ 在 $\mathcal{A}$ 中是有效的 (valid) 或真的. 此时, 称 $\mathcal{A}$ 是 φ 的模型, 记作: $\mathcal{A} \models \varphi$,$\mathcal{A}$ 是公式集 M 的模型 (记作 $\mathcal{A} \models M$) $\iff \mathcal{A} \models \varphi, \forall \varphi \in M$.

定义 1.2.5 公式集 N 从公式集 M 可以推出 (记作: $M \models N$) $\iff M$ 的模型也是 N 的模型, $Th(M)$ 表示从 M 可以推出的所有公式之集, 即 M 的归纳闭包 (deductive closure of M); 如果 $M = Th(M)$, 则说 M 是递归闭的 (deductively closed).

以下几个是常用的基本定义:

定义 1.2.6

(1) 公式 φ 在解释 $\mathcal{A}$ 中是重言式 (tautology) 或是有效的 (valid) $\iff$ 公式 φ 在 $\mathcal{A}$ 的每一个解释下都为真; 把重言式 (tautology) 记作 $\top$ 或 $true$, 它的否定记作 $\perp$ 或 $false$; 对每个公式 φ 和代换 (substitution)σ, 若 $\varphi\sigma$ 是可允许的 (admissible), 则公式 $\forall x\varphi \to \varphi\sigma$ 是重言式.

(2) φ 是可满足的 (satisfiable) $\iff$ 存在解释 $\mathcal{A}$ 和状态 sta, 使得 $\mathcal{A} \models_{sta} \varphi$; 公式集 M 是可满足的 $\iff$ 存在解释 $\mathcal{A}$ 和状态 sta, 使得 $\forall \varphi \in M, \mathcal{A} \models_{sta} \varphi$;

(3) 公式 φ 和 ψ 是等价的 (equivalent) $\iff \varphi \leftrightarrow \psi$ 是重言式;

(4) 公式集 M 是相容的 (consistent) $\iff$ 公式集 M 是可满足的; 公式 φ 关于 M 是相容的 $\iff M \cup \{\varphi\}$ 是相容的.

(5) 若 $\mathcal{A} \models_{sta} (t_1 = t_2) \iff val_{\mathcal{A},sta}(t_1) = val_{\mathcal{A},sta}(t_2)$, 则说 $\mathcal{A}$ 是正规解释 (nomal interpretation).

用 At 表示所有的原子之集.

定义 1.2.7 T 是理论, φ 是公式, φ 是 T 的语义结论 (semantical consequence), 如果对每个赋值 $v, \models_v T \Longrightarrow \models_v \varphi$, 记作: $T \models \varphi$.

语言 $\mathcal{L}_{At}$ 中的语义后承算子 (senantical consequence operator) 定义为: $Th_{At}(T) = \{\varphi \in \mathcal{L}_{At} \mid T \models \varphi\}$.

定理 1.2.1 对所有的理论 $T_1, T_2 \subseteq \mathcal{L}$:

(1) $T_1 \subseteq Th(T_1)$;

(2) $T_1 \subseteq T_2 \implies Th(T_1) \subseteq Th(T_2)$;

(3) $Th(Th(T_1)) = Th(T_1)$.

定义 1.2.8 称理论 $T \subseteq \mathcal{L}$ 关于语义结论是封闭的 (closed under semantical consequence), 指如果满足 $Th(T) = T$.

定理 1.2.2 理论 $T \subseteq \mathcal{L}$ 的闭包性质 (closure properties) 有:

(1) 对每个赋值 v,$\{\varphi \in \mathcal{L} \mid v(\varphi) = t\}$ 在语义结论下封闭;

(2) T 在语义结论下封闭的理论, 则:

① 如果 $\varphi \in T, \varphi \supset \psi \in T$, 则 $\psi \in T$;

② 如果 $\varphi \in T, \varphi \supset \psi$ 是重言式, 则 $\psi \in T$;

③ $\varphi \wedge \psi \in T \iff \varphi \in T$, 且 $\psi \in T$.

定义 1.2.9 理论 $T \subseteq \mathcal{L}$ 关于语义结论封闭, 即 $T \subseteq \mathcal{L}$ 是完备的 (complete), 如果 $\forall \varphi \in T$, $\varphi, \neg\varphi$ 至少有一个在 T 中.

定理 1.2.3 理论 $T \subseteq \mathcal{L}$ 关于语义结论封闭, 即 $T \subseteq \mathcal{L}$ 是完备的 (*complete*), 则对每一个原子 $p \in \mathcal{L}$, p 与 $\neg p$ 至少有一个在 T 中.

定义 1.2.10 设 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}$, 理论 T, $T \subseteq \mathcal{L}$ 关于语义结论是封闭的, $T \subseteq \mathcal{L}$ 关于 $\mathcal{C}$ 是完备的 (complete), 指如果对每一个公式 $\varphi \in \mathcal{C}$, 公式 φ 与 $\neg\varphi$ 至少有一个在 T 中.

定理 1.2.4 设 $P \subseteq At, \mathcal{L}_P$ 是由 P 生成的语言, 理论 T, $T \subseteq \mathcal{L}$ 关于 $\mathcal{L}_P$ 完备 $\iff$ 对每一个原子 $p \in P$, p 与 $\neg p$ 至少有一个在 T 中.

1.2.2 范式 (Normal Forms)

定义 1.2.11 公式的前束范式 (prenex normal form), 是指公式中含有全称量词和存在量词, 即公式形如 $Q_1x_1, \cdots, Q_nx_n\varphi$, 这里 Q_i 是量词, x_i 是变量 (变元),φ 不含任何量词. 已经证明每个公式在等价的意义下都可化为前束范式, 即化为全部的量词都在公式的最前面的那种公式.

定义 1.2.12

(1) 若公式形如 $\varphi = \vartheta_1 \wedge \cdots \wedge \vartheta_n, \vartheta_j, 1 \leqslant j \leqslant n$ 是文字或句子 (clause), 则称公式 φ 是合取范式 (conjunctive normal forms);

(2) 若公式形如 $\varphi = \psi_1 \vee \cdots \vee \psi_m, \psi_j, 1 \leqslant j \leqslant m$ 是文字或句子 (clause) 的合取, 则称公式是析取范式 (disjunctive normal forms).

(3) 若公式形如 $\varphi=\vartheta_1\wedge\cdots\wedge\vartheta_n,\forall\vartheta_j,1\leqslant j\leqslant n$ 是基本合取的否定，则称公式 φ 是双合取式 (double conjunctive forms);

(4) 若公式形如 $\varphi=\psi_1\vee\cdots\vee\psi_m,\forall\psi_j,1\leqslant j\leqslant m$ 是文字或句子 (clause) 的否定，则称公式是双析取式 (double disjunctive forms).

定理 1.2.5 对每个公式 φ, 存在公式 $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4$ 分别是合取范式，析取范式，双合取式，双析取式，使得 φ 等价于 $\psi_i,i=1,2,3,4$. 即，任何一个公式都等价于一个合取范式、析取范式、双合取式或双析取式.

定义 1.2.13 公式的 Skolem 标准型 (Skleom normal form) 是指公式形如： $\forall x_1,\cdots,\forall x_n\varphi$, φ 是无量词的合取范式.

对每一个公式 φ, 通过 Skleom 变化，都存在一个 Skleom Normal Form 的公式 ψ, 使得 φ 和 ψ 有完全相同的模型.

1.2.3 Herbrand 代数 (Herbrand algebras)

定义 1.2.14 Herbrand 代数是有如下性质的解释 $\mathcal{A}$:

(1) $dom\mathcal{A}$ 是所有的基项之集;

(2) 函数符号以固定的方式解释为：$f_{\mathcal{A}}(t_1,\cdots,t_n)=f(t_1,\cdots,t_n),t_1,\cdots,t_n$ 是基项.

设 $M=\{\forall x_1\cdots\forall x_n\varphi\mid\varphi$ 是无量词的公式 $\}$, 即 M 是形如 $\forall x_1\cdots\forall x_n\varphi$, φ 是无量词的公式的集合，定义：

$ground(M)=\{\varphi\{x_1/t_1,\cdots,x_n/t_n\}\mid t_i$ 是基项 $\}$, 即 $ground(M)$ 是形如 $\varphi\{x_1/t_1,\cdots,x_n/t_n\},t_i$ 是基项的公式的集合.

在文献 [12] 中有关于 Herbrand 的详细描述, 这里不在赘述. 根据 Herbrand 定理，下面的叙述是等价的：

(1) M 有模型;

(2) M 有 Herbrand 模型;

(3) $ground(M)$ 有模型;

(4) $ground(M)$ 有 Herbrand 模型.

定理 1.2.6 谓词逻辑的紧致性定理 (Completeness Theorem): 公式集 M 是可满足的 $\Longleftrightarrow$ M 的每一个有限子集都是可满足的.