


北京联合大学数学教研室 编

高等 数学

(上)

清华大学出版社

北京联合大学数学教研室 编



高等 数学

(上)

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书分上、下两册,共由10章组成.上册内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分与定积分、定积分的应用.下册内容包括多元微分与重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程.

本书是以非重点院校的工科类及经济管理类的本科生及专升本学生为主要对象编写的,在保留本课程的系统性、科学性的前提下,注意分散难点、突出应用,力求通俗易懂、易教易学.

版权所有,侵权必究.侵权举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上/北京联合大学数学教研室编.—北京:清华大学出版社,2007.7
ISBN 978-7-302-15159-3

I. 高… II. 北… III. 高等数学—高等学校—教材 IV. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第069503号

责任编辑:佟丽霞 王海燕

责任校对:赵丽敏

责任印制:何 芊

出版发行:清华大学出版社 地 址:北京清华大学学研大厦A座

<http://www.tup.com.cn> 邮 编:100084

c-service@tup.tsinghua.edu.cn

社总机:010-62770175 邮购热线:010-62786544

投稿咨询:010-62772015 客户服务:010-62776969

印装者:北京市清华园胶印厂

经 销:全国新华书店

开 本:170×230 印 张:14.5 字 数:251千字

版 次:2007年7月第1版 印 次:2007年9月第2次印刷

印 数:3001~5000

定 价:22.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换.联系电话:(010)62770177 转 3103 产品编号:023752-01

序

我国大学教育近年来有很大发展,不仅大学生人数增加,大学新办专业也在增加.除了传统的理科和工科外,经济管理、农、林、医甚至文科都需要开设数学课程,这为大学数学教育开辟了广阔的天地,同时也提出了不少新的挑战.面对不同专业的培养目标及不同学校的生源特点,如何保证和提高大学数学教学质量成为数学教学改革的新课题.对于大多数一般院校和以数学应用为主要目的非数学专业的学生,数学教育的目标和教学方法,成为近年来讨论的焦点.不少数学家和教育家发表了许多宝贵意见,但毋庸置疑在一般院校教学一线的广大教师,以多年与学生接触的亲身感受不断改进教学方式和调整教学内容,他们的长期思索和教学实践更为珍贵,他们经过多年教学不断完善的数学教材是非常有价值的.

一个刚满周岁的孩子初学走路时,我们不能要求他从爬行一下子就能健步如飞,他开始时跌跌撞撞,但是却充满走路的欲望,因为这可以使他更为独立地观察外面的五彩缤纷的世界,可以去做更多他渴望做的事情.类似地,对于以数学应用为主的大学生,一开始不需要向他们讲述太“严格”的数学和过于完备的内容,只需对于数学内容和方法有一个基本训练,重视讲授数学的应用和思考方式.更重要的是通过教学使学生认识到数学的重要性,建立起对数学的学习兴趣和学习欲望,使较多的学生今后有能力不断完善自己的数学知识,有意识地将数学工具和思考方式应用到工作中去.

北京联合大学的数学教师们经过多年教学和实践,并借鉴了国外大学数学教材的特点,编写了《高等数学》.这本教材充分考虑到一般院校非数学专业大学生的特点,不断



调整数学内容使学生易于接受,重视应用,在多年的数学实践中取得了很好的效果.我相信本教材的出版会有益于高等院校数学教育事业.希望本教材在今后更多学校的教学中不断完善,同时也欢迎有适合不同水平学生和不同专业需要的更多数学教材问世.

冯克勤

2007年春于清华园

前言

高等数学(上)

本书是以非重点院校的工科类及经济管理类的本科生及专升本学生为主要对象编写的. 根据一般院校生源的特点, 在保留本课程的系统性、科学性的前提下, 深入讨论了教育部最新制订的教学基本要求, 参考了国内外同类教材, 在编写时对教材的内容及难度进行了适当的调整. 例如, 将微分中值定理的拉格朗日中值定理放在讨论函数的单调性之前; 将柯西中值定理放在用洛必达法则求不定式的极限之前; 将泰勒中值定理放在泰勒级数之前, 旨在分散难点、突出应用. 将部分概念性强的内容放在附录里, 旨在通俗易懂、易教易学. 在几何直观及应用实例上下工夫, 力求最大限度地提高学生的理解力和接受率. 标有 * 的内容供学有余力和立志考研的学生深入学习.

在学习过程中, 起主导作用的其实是学生自己. 与其他学科相比, 数学能为学生提供更多独立思考的机会. 事实上, 学习的过程也是再创造的过程. “I hear, I forget. I see, I remember. I do, I understand.” 这一流行于美国麻省理工学院的话语, 正说明这一道理. 希望读者通过“看”和“做”本书的内容和习题之后, 能够感受到数学工具和思考方式的有用性, 并能够在今后从事各种工作时, 有意识地采用数学工具和思考方式, 从而终生与数学相伴并喜欢数学.

本书分上、下两册, 共由 10 章组成. 上册内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分与定积分、定积分的应用. 下册内容包括多元微分与重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程.

本书由北京联合大学数学教研室编写, 主编陈冬. 上册副主编尚学海、崔海英. 各章具体分工如下: 崔海英编写

第1章,尚学海编写第2章、第3章,陈冬编写第4章,常广平编写第5章,参与上册各章习题编写的有崔海英、常广平、张静,各章的总练习题由魏荣编写,第0章及附录部分由陈冬、魏荣、崔海英编写.下册副主编魏荣、张立新.各章具体分工如下:侯文字编写第6章,史凤丽编写第7章,张立新编写第8章,魏荣编写第9章,车燕编写第10章,参加下册各章习题编写的有李林杉、崔海英、张立新、曹彩霞,各章的总练习题由魏荣编写,附录部分由陈冬、魏荣编写.全书的框架、统稿由陈冬、魏荣完成.

本书在编写与出版过程中,得到清华大学出版社的大力支持,清华大学韩云瑞教授、北京航空航天大学李心灿教授、北京联合大学李英教授、王勇烈副教授、李宗杰副教授和李大矛副教授仔细审阅了全书的初稿,并提出了修改意见.北京联合大学赵杰民教授、方新教授、李红星教授也对本书提出了宝贵意见.杨静博士参与了全书的校对工作,在此一并表示衷心的感谢.

作者

2007年1月

目录

第 0 章 准备知识	1
0.1 常用三角公式	1
0.2 幂运算	1
0.3 对数公式	2
0.4 绝对值	2
0.5 不等式	2
0.6 乘法及因式分解	3
0.7 集合、区间、邻域	3
0.8 常用逻辑符号	4
第 1 章 函数与极限	5
1.1 函数	5
1.1.1 函数的概念与性质	5
1.1.2 反函数、复合函数和初等函数	9
1.1.3 分段函数、隐函数	11
1.2 函数的极限	15
1.2.1 函数极限的概念与性质	15
1.2.2 极限的运算法则	18
1.2.3 极限存在准则、两个重要极限	20
1.2.4 无穷小和无穷大、无穷小阶的比较	23
1.3 函数的连续性	29
1.3.1 函数的连续性与初等函数的 连续性	29
1.3.2 函数的间断点及其分类	32
1.3.3 闭区间上连续函数的性质	34
第 1 章总练习题	36



第 2 章 导数与微分	39
2.1 导数的基本概念	39
2.1.1 导数定义与实际意义	39
2.1.2 定义求导法	42
2.1.3 导数的几何应用	45
2.1.4 可导与连续	46
2.2 导数的计算	49
2.2.1 四则运算法则	49
2.2.2 反函数的求导法则	52
2.2.3 复合函数的求导法则	54
2.2.4 隐函数的导数	58
2.2.5 由参数方程所确定的函数的导数	59
2.3 高阶导数	63
2.3.1 二阶导数的概念及其计算	63
2.3.2 n 阶导数的概念	65
2.4 微分	68
2.4.1 微分定义与实际意义	68
2.4.2 微分的计算	71
第 2 章总练习题	75
第 3 章 导数的应用	77
3.1 微分中值定理及其应用	77
3.1.1 拉格朗日中值定理和函数的单调性	77
3.1.2 不等式的证明	81
3.1.3 柯西中值定理和不定式的极限	84
3.2 函数的极值和最大值、最小值	90
3.2.1 函数的极值及其求法	91
3.2.2 函数的最大值与最小值	95
3.3 曲线的凹凸性和函数图形的描绘	98
3.3.1 曲线的凹凸性与拐点	98

3.3.2	曲线的渐近线与函数作图	101
3.4	导数在经济中的应用	104
3.4.1	常用的经济函数	104
3.4.2	边际分析和弹性分析	105
3.4.3	经济中的优化问题	107
第3章	总练习题	108
第4章	不定积分与定积分	110
4.1	不定积分	110
4.1.1	不定积分的概念与性质	110
4.1.2	换元积分法	115
4.1.3	分部积分法	122
4.2	定积分	127
4.2.1	定积分的概念与性质	128
4.2.2	微积分基本定理	133
4.2.3	换元积分法	136
4.2.4	分部积分法	138
4.3	广义积分	143
4.3.1	无穷积分	144
4.3.2	瑕积分	146
*4.3.3	含参变量积分	148
第4章	总练习题	151
第5章	定积分的应用	156
5.1	定积分的微元法	156
5.2	平面图形的面积	158
5.2.1	用直角坐标计算平面图形的面积	158
5.2.2	用极坐标计算平面图形的面积	163
5.3	体积	165
5.3.1	旋转体的体积	165
5.3.2	平行截面面积已知的立体的体积	168



5.4 平面曲线的弧长	171
5.4.1 用直角坐标计算平面曲线的弧长	171
5.4.2 用极坐标计算平面曲线的弧长	173
5.5 定积分在经济学中的应用	175
5.6 定积分在物理学中的应用	179
5.6.1 变力沿直线所做的功	179
5.6.2 水压力	181
第5章总练习题	182
附录 A 极限的 ε - δ 定义及极限性质的证明	184
附录 B 微积分与数学家	188
附录 C 高等数学(上)期末模拟试卷	194
习题参考答案	197
参考文献	220

准备知识

第0章

在高等数学中,经常用到中学时学习过的常用公式及一些知识,在本章做一个简单归纳.

0.1 常用三角公式

$$(1) \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

$$(2) \sec^2 x = 1 + \tan^2 x.$$

$$(3) \sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

$$(4) \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

$$(5) \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

$$(6) \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x.$$

$$(7) \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos x).$$

$$(8) \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos x).$$

$$(9) \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y.$$

$$(10) \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

0.2 幂运算

$$(1) (ab)^n = a^n b^n, \sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$(2) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$(3) a^{m \cdot n} = (a^m)^n = (a^n)^m.$$

$$(4) a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

0.3 对数公式

$$(1) y = \lg x = \log_{10} x.$$

$$(2) y = \ln x = \log_e x \quad (e = 2.7182\cdots).$$

$$(3) y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$(4) \ln(ab) = \ln a + \ln b \quad (a > 0, b > 0).$$

$$(5) \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad (a > 0, b > 0).$$

$$(6) \ln a^b = b \ln a \quad (a > 0).$$

$$(7) \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

$$(8) a^{\log_a x} = x.$$

$$(9) e^{\ln x} = x.$$

$$(10) a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0).$$

$$(11) x^x = e^{x \ln x} \quad (x > 0).$$

0.4 绝对值

$$(1) |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

$$(2) |ab| = |a| |b|.$$

$$(3) \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

$$(4) |a| = \sqrt{a^2}.$$

0.5 不等式

$$(1) \text{若 } a < b, \text{ 则 } -a > -b.$$

$$(2) \text{若 } a < b, \text{ 则 } a + c < b + c.$$

$$(3) |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$$

(4) $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ 或 $x > a$.

(5) $|x+y| \leq |x| + |y|$.

(6) $|x-y| \geq |x| - |y|$.

0.6 乘法及因式分解

(1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

(2) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

(3) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

$$(4) (a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k,$$

其中 $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}, k = 0, 1, \dots, n$.

0.7 集合、区间、邻域

1. 集合

一个集合 S 是指某些可以列举, 或者可用某种属性加以区别的个体的全体.

集合 S 中每一个体 a 称为 S 的元素, 记为 $a \in S$.

记号“ \in ”读作“属于”; 记号“ \notin ”读作“不属于”.

常用的数的集合:

自然数集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$;

整数集合 $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\}$;

有理数集合 $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \text{ 为互质的整数, } q \neq 0 \right\}$;

实数集合 $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ 是实数}\}$.

2. 区间

区间是实数的一种特殊子集. 常用区间有:

开区间 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$;

闭区间 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$;

半开半闭区间 $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$;

无穷区间 $[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$, $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$;
常用记号 I 表示区间, \mathbb{R} 表示实数集合, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

3. 邻域

邻域是指以某点 x_0 为中心的一个长度为 2δ ($\delta > 0$) 的对称开区间. 记为 $U(x_0, \delta)$, 即称

$$U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta, \delta > 0\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

为点 x_0 的 δ -邻域. 其中 x_0 为邻域的中心, δ 为邻域的半径, $U(x_0, \delta)$ 也称为含心邻域.

$\dot{U}(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$
为点 x_0 的去心的 δ -邻域.

0.8 常用逻辑符号

1. “ \forall ”表示任意

“ \forall ”表示“对于任意的”或“任意给定”或“任取”.

例如: “ $\forall a > 0$ ”表示“对于任意的正数 a ”, 或“任取正数 a ”.

2. “ \exists ”表示存在

“ \exists ”表示“存在”或“能够找到”.

例如: “ $\forall M > 0, \exists x \in [a, +\infty)$, 使得 $x > M$ ”的含义是: 对于任意给定的正数 M , 在区间 $[a, +\infty)$ 中存在 x , 使得 $x > M$.

3. “ \Rightarrow ”表示命题间的蕴涵关系

设 A, B 为两个命题, 式子 “ $A \Rightarrow B$ ” 表示: “若命题 A 成立, 则命题 B 也成立”. 或者说 “ B 是 A 的必要条件” 或 “ A 是 B 的充分条件”.

4. “ \Leftrightarrow ”表示命题间的等价关系

“ $A \Leftrightarrow B$ ”表示“ A 与 B 是等价命题”, 或者说“ A 与 B 互为充分必要条件”.

函数与极限

第 1 章

高等数学(上)

高等数学以变量间的确定性关系及其变化规律作为自己的研究对象. 函数概念准确定义了变量间的这种确定关系, 而极限直接反映了这种关系的变化趋势, 所以我们的学习从函数和极限开始.

1.1 函数

1.1.1 函数的概念与性质

1. 函数

在中学的学习中, 大家已经熟悉了函数的概念, 所以我们直接给出函数的定义.

定义 1.1.1 设 D 是一个非空实数集, 若对 D 中的每个 x , 按照某种对应法则 f , 总有唯一确定的数值 y 与 x 相对应, 则称法则 f 为定义在 D 上的一个函数, 记为 $y=f(x)$. 其中, x 称为自变量, 其取值范围 D 称为函数的定义域, y 称为因变量, 其取值范围称为函数的值域, 记作 W .

因为 W 由 D 和 f 共同确定, 所以也可记为 $W=f(D)$.

定义域 D 和对应法则 f 也常称为函数的两要素. 利用两要素可以比较两个函数是否相等.

函数表示法常见的有三种.

(1) 公式法

例 1.1.1 物理学中自由落体运动方程 $s=\frac{1}{2}gt^2$.

(2) 列表法

例 1.1.2 近几年北京市的蓝天数:

年份(x)	2000	2001	2002	2003	2004	2005
蓝天数(y)	165	185	203	224	229	234

(3) 图示法

例 1.1.3 2006年7月13日上海证券交易所某上市股票的走势图(图 1-1).

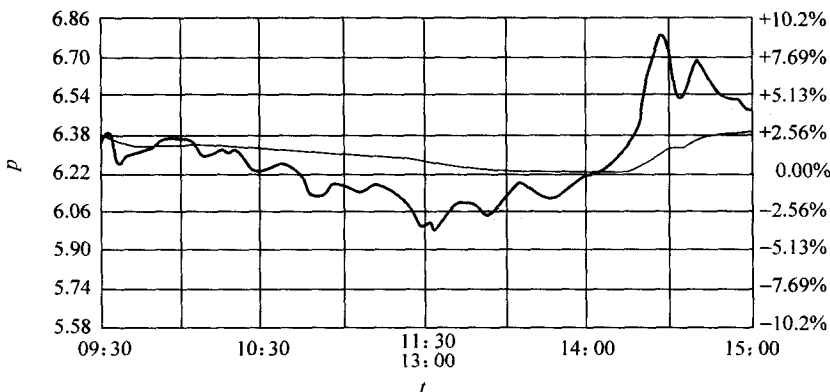


图 1-1

2. 基本初等函数

人类经过长期的研究和探索,对两个变量间的确定性关系,归纳出六种最常见的函数,并称为基本初等函数.

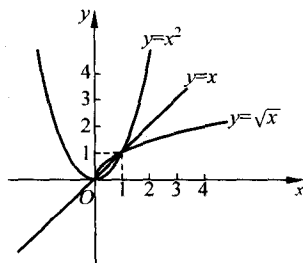
(1) 常函数 $y=f(x)=C$ (C 为常数).(2) 幂函数 $y=f(x)=x^\mu$ ($\mu \in \mathbb{R}$).① 当 $\mu=1$ 时, $y=x$, 如图 1-2 所示.② 当 $\mu=2$ 时, $y=x^2$, 如图 1-2 所示.③ 当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时, $y=\sqrt{x}$, 如图 1-2 所示.④ 当 $\mu=-1$ 时, $y=\frac{1}{x}$, 如图 1-3 所示.规定 $x^0 \equiv 1$ ($x \neq 0$).

图 1-2