JINGDIAN
LIXUE
GAILUN

经典力学概论

◉李书民 编著

中国科学技术大学出版社

◎李书民 编

经典力学概论

JINGDIAN
LIXUE
GAILUN

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是根据作者在中国科学技术大学讲授理论力学的讲义整理而成的，采用了较传统教科书更加自然的逻辑体系和简单易记的符号系统．从基本定律出发，循序渐进地引入抽象的数学方法，充分展示了物理理论简洁、抽象的美．在不删减课程主要内容，甚至较传统内容略丰的前提下，大大缩减了授课学时．

全书共分 6 章：牛顿力学、拉格朗日力学、小振动、刚体力学、哈密顿力学、有心力场．每章后附有一定数量难度适中的习题．本书论述严谨、精练，并对多个问题有独到的见解，可作为综合性大学和师范院校物理类专业的本科生教材，同时也适合有关专业研究人员和工程师阅读．

图书在版编目(CIP)数据

经典力学概论／李书民编著．— 合肥：中国科学技术大学出版社，2007．10
ISBN 978-7-312-02117-6

I. 经··· II. 李··· III. 经典力学—高等学校—教材 IV.O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 105063 号

出版发行 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
网址：http://press.ustc.edu.cn
印　　刷 合肥学苑印务有限公司
经　　销 全国新华书店
开　　本 710 mm × 960 mm 1/16
印　　张 15
字　　数 311 千
版　　次 2007 年 10 月第 1 版
印　　次 2007 年 10 月第 1 次印刷
印　　数 1 — 3 000 册
定　　价 28.00 元

前　言

经典力学（理论力学）是四大力学课程的第1门（其他3门课程分别为热力学与统计物理、电动力学和量子力学）．这门课程在内容、认识论和方法论上均较普通物理更深一个层次，是普物力学课程的深化和提高，其重点在于培养学生的理性思维能力．

经典力学不仅是科学技术研究的精美工具和近代物理学发展的基础和阶梯，同时也是许多数学理论的发源地和应用对象．既有极高的理论价值，又有重要的实际意义．经典力学有3种不同的理论形式：牛顿（矢量）力学、拉格朗日力学和哈密顿力学，后两者合称为**分析力学**．本课程的重点是分析力学，但仍从牛顿力学讲起，因为后者是前者的基础．分析力学给出了力学系统在完全一般性的广义坐标下的动力学方程组，并突出了能量函数的意义．它对运动规律的独特表达形式远远超出了经典力学的范围，如在量子力学、统计力学、量子场论等重要物理学分支中，均沿用了经典哈密顿力学和拉格朗日力学中的概念和表述形式．现代控制系统可以作为传统约束概念的推广．分析力学不仅提供了解决天体力学及其一系列问题的较佳途径，同时给量子力学的发展提供了启示．分析力学在非线性非完整系统中的研究，在非保守系统中奇异吸引子的发现，以及对于“混沌”现象的研究等，正在丰富分析力学的内容，并大大开阔它的应用范围．

本书是作者在中国科学技术大学讲授理论力学的讲义的基础上整理而成的．在编写过程中，力图从经验定律出发，循序渐进地引入抽象的数学方法，其逻辑体系略微不同于传统教科书．第1章概要介绍牛顿力学，以系统概括的形式表述经典力学的运动规律和运动定理，使读者初步领略理论物理简洁的美和抽象表述的魅力．第2章系统介绍拉格朗日分析力学．从约束和虚位移的概念出发，深入浅出地讨论微分形式和积分形式的变分原理（虚功原理、达朗伯原理和哈密顿原理）．尔后，从哈密顿原理导出拉格朗日方程．作为拉格朗日力学的应用，第3章讨论小振动．先从单自由度系统引入物理直观，再系统地推广到多自由度情形．第4章刚体力学是经典力学的难点．我们从定点转动入手，引入变换矩阵、张量、欧拉角和惯量张量的概念，导出欧拉运动学与动力学方程和运动积分．之后将它们应用于对欧拉陀螺和拉格朗日陀螺的讨论．第5章介绍分析力学的哈密顿形式．先通过变量变换引入哈密顿正则方程和泊松括号，再利用相空间中的变分原理导出正则变换和哈密顿－雅可比方程．第6章以循序渐进的方式介绍了有心力．着重讨论了平方反比力、胡克力和散射问题．鉴

于篇幅与课时所限，本书有意回避了分析力学的现代微分几何表述和对非线性系统的讨论. 每章后面附有一定数量的习题，以帮助学生巩固正文中所学的理论知识. 带 * 号的内容相对独立，如果学时不够，可略去不讲，不会影响知识的系统性.

另外，本书在符号系统上做了一些新的尝试，读者在学习中可以逐步体会到. 比如，为了避免与矢量（张量）记号混淆，我们不将标志矩阵的字母取成黑体，而是在其上加一个“^”，等等.

本书取名为《经典力学概论》，以区别于国内同类教材. 本书论述清楚、严谨、简练，并对多个问题有独到见解，可作为物理系本科生理论力学课程的教材或教学参考书，也可供其他专业的教师和研究生参考.

本书的出版受到国家自然科学基金 10475070 和 10674125 的资助. 感谢中国科学技术大学出版社的大力支持. 感谢中国科学技术大学秦家桦教授和沈惠川教授在作者教学过程中给予的帮助. 感谢沈奇同学在 LaTeX 排版中给予的帮助. 由于作者水平有限，书中定有不少错误，恳切希望读者指正.

作　者

2007 年 7 月于合肥

目　录

第1章 牛顿力学

经典力学是一门研究机械运动(即物体的位置变动)规律的科学. 牛顿 (Newton) 力学是经典力学的基础. 它着眼于力矢量, 根据牛顿定律建立运动微分方程组, 研究力学系统的运动问题, 所以牛顿力学也叫矢量力学. 本章扼要介绍牛顿力学, 我们从质点的运动讲起.

1.1 质点运动的描写

当在所研究的问题中, 物体的大小和形状可被忽略时, 它就可以用一个具有一定质量的几何点来代替, 这种抽象化的模型叫作**质点**. 例如, 研究行星的运动时, 虽然行星本身很大, 但是它的半径比起它绕太阳运动的轨道半径却小很多, 这时就可以把行星当作质点处理. 但在研究行星的自转时, 就不能再把它们当作质点了.

因物体的位置只能相对地确定, 所以机械运动是相对运动. 为了描述这种相对运动, 需要选择另外一个物体作为参考. 这个被选定的参考物体称为**参考系**. 在参考系中选一个固定点作为描写空间位置的参考点, 称为**原点**, 常记作 O. 质点的位置 m 可用一个起始于 O, 终止于 m 的矢量 $\boldsymbol{r}$ 来表示, 这种矢量称为**位置矢量**, 简称**位矢**, 如图 1.1 所示. 质点在运动过程中, 其位置不断随时间变化, 所以位矢是时间的函数

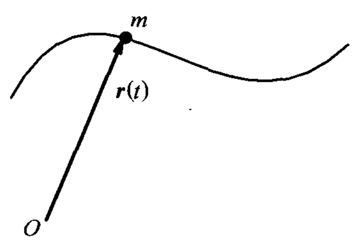

图 1.1 质点的运动

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t). \tag{1.1.1}$$

方程 (1.1.1) 反映了质点的运动规律, 通常称之为**质点的运动学方程**. 另一方面, 该方程也是轨道的参数方程, 时间 t 是参数. 所谓**轨道**, 就是运动质点在空间所占据的一连串点的集合. 轨道也称为**轨迹**. 如果质点运动的轨道为一条直线, 则这种运动叫**直线运动**; 如果轨道为一条曲线, 则叫**曲线运动**. 寻找运动学方程或轨道方程是经典力学的最终目的.

质点在两个时刻的位矢之差

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t) \tag{1.1.2}$$

反映了质点的位置移动，称为**位移**.

位矢的时间变化率定义为**(瞬时) 速度**：

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}}. \tag{1.1.3}$$

它反映了运动的快慢程度. 速度的大小 $v = |\boldsymbol{v}|$ 称为**速率**.

速度的时间微商称为**加速度**

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\boldsymbol{r}}. \tag{1.1.4}$$

它反映了速度变化的快慢程度.

1.2 坐 标 系

为了给空间位置以方便的代数描写，我们需要在参考系中建立坐标系.

1.2.1 直角坐标系

直角坐标系也叫**笛卡儿 (Cartesian) 坐标系**，它由 3 个垂直相交于原点 O 的坐标轴 x, y 和 z 组成. 当 3 个坐标轴满足右手螺旋法则时称为**右手系**；否则称为**左手系**. 我们习惯上采用右手系. 在直角坐标系中，空间每一点 P 的位置用一组有序实数 (x, y, z)，即直角坐标来表示. 3 个坐标轴方向的单位矢量依次记为 $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ (或 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$). 它们均为常矢量，不随质点的运动而变化 (图 1.2). 在直角坐标系下，质点的位矢可表示为

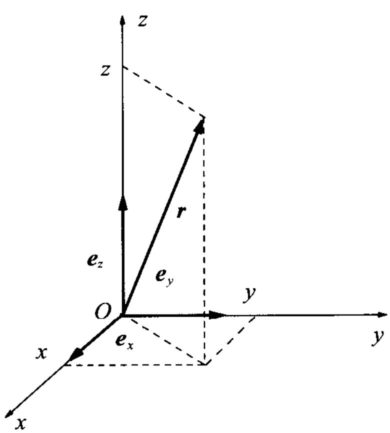

图 1.2 直角坐标系

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z. \tag{1.2.1}$$

因 3 个单位矢量均为常量，所以速度可写成

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y + \dot{z}\boldsymbol{e}_z, \tag{1.2.2}$$

或写成分量形式

$$v_x = \dot{x}, \tag{1.2.3}$$

$$v_y = \dot{y}, \tag{1.2.4}$$

$$v_z = \dot{z}. \tag{1.2.5}$$

加速度为

$$\boldsymbol{a} = \ddot{x}\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}\boldsymbol{e}_y + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z, \tag{1.2.6}$$

或

$$a_x = \ddot{x}, \tag{1.2.7}$$

$$a_y = \ddot{y}, \tag{1.2.8}$$

$$a_z = \ddot{z}. \tag{1.2.9}$$

1.2.2 曲线坐标系

设有关系式

$$u = u(x, y, z), \tag{1.2.10}$$

$$v = v(x, y, z), \tag{1.2.11}$$

$$w = w(x, y, z), \tag{1.2.12}$$

将变量 x, y, z 变换为另一组变量 u, v, w，且每组有序数 (u, v, w) 完全确定了空间中一点 P 的直角坐标 (x, y, z)；反过来每一点 P 的直角坐标 (x, y, z) 都对应着一组有序数 (u, v, w)，这时就称有序数组 (u, v, w) 为点 P 的**曲线坐标**. 式 (1.2.10)~ 式 (1.2.12) 称为从直角坐标 (x, y, z) 到曲线坐标 (u, v, w) 的坐标变换. 从它们可得到**逆变换**：

$$x = x(u, v, w), \tag{1.2.13}$$

$$y = y(u, v, w), \tag{1.2.14}$$

$$z = z(u, v, w). \tag{1.2.15}$$

在坐标变换中，分别令 u，v 和 w 取不同的常数值，就得到 3 族不同的曲面，称为**坐标曲面**，不同坐标曲面相交而成的曲线称为**坐标曲线**. 如果在空间任意一点处，坐标曲线都相互正交，就称这种坐标系为**正交曲线坐标系**，如图 1.3. 在正交曲线坐标

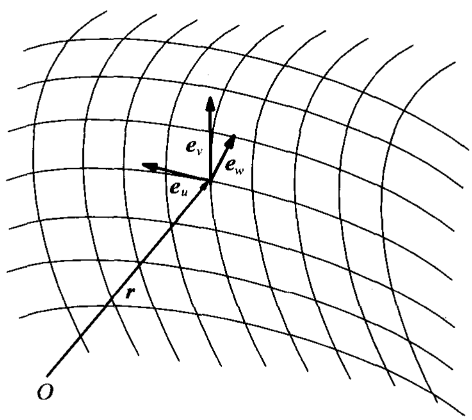

图 1.3 正交曲线坐标系

系中，任一点 P 的位矢可写成

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v, w) = x(u, v, w)\boldsymbol{e}_x + y(u, v, w)\boldsymbol{e}_y + z(u, v, w)\boldsymbol{e}_z \tag{1.2.16}$$

这时，在任意一点可定义 3 个单位矢量

$$e_u = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right|}, \tag{1.2.17}$$

$$e_v = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|}, \tag{1.2.18}$$

$$e_w = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\right|}. \tag{1.2.19}$$

它们分别沿 u, v 和 w 增加的方向，通常取它们构成右手螺旋关系．任意矢量 $\boldsymbol{f}$ 可用它在曲线坐标系中的分量（投影）表示为

$$\boldsymbol{f} = f_u \boldsymbol{e}_u + f_v \boldsymbol{e}_v + f_w \boldsymbol{e}_w. \tag{1.2.20}$$

常见的曲线坐标系有平面极坐标系、柱坐标系、球坐标系等．

1. 平面极坐标系

在平面极坐标系中，一点的位置用极坐标 (r,θ) 描写 (图 1.4)．它们与直角坐标 (x,y) 的关系为

$$x = r\cos\theta, \tag{1.2.21}$$

$$y = r\sin\theta. \tag{1.2.22}$$

单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\theta$ 分别沿 r 和 θ 增加的方向，它们均随 θ 的变化而变化：

$$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_r(\theta), \tag{1.2.23}$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\theta(\theta). \tag{1.2.24}$$

根据图 1.5，可得微分：

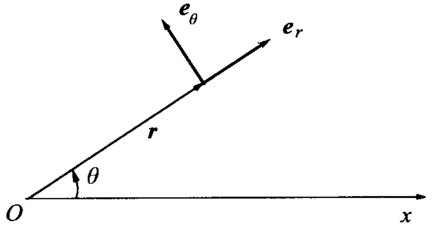

图 1.4 平面极坐标系

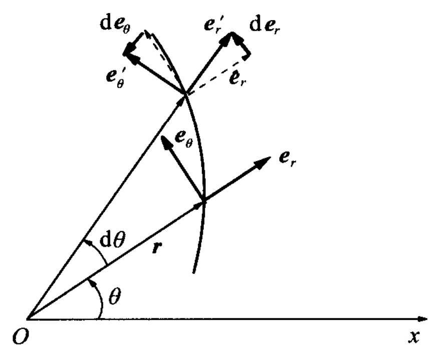

图 1.5 $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta$ 对 θ 的微商

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_r' - \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\theta \mathrm{d}\theta, \tag{1.2.25}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\theta' - \boldsymbol{e}_\theta = -\boldsymbol{e}_r \mathrm{d}\theta, \tag{1.2.26}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}\theta} = \boldsymbol{e}_\theta, \tag{1.2.27}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}\theta} = -\boldsymbol{e}_r. \tag{1.2.28}$$

在极坐标系中，位矢可表示为

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r. \tag{1.2.29}$$

利用式 (1.2.27) 微商，可得速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\boldsymbol{e}_r) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta, \tag{1.2.30}$$

或写成分量形式：

$$v_r = \dot{r}, \tag{1.2.31}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta}. \tag{1.2.32}$$

同理得加速度

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta, \tag{1.2.33}$$

即

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \tag{1.2.34}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}). \tag{1.2.35}$$

例 1.2.1 质点作平面运动，速度的径向分量为 $v_r = c$，加速度的径向分量为 $a_r = -\dfrac{b^2}{r^3}$. b, c 为常数，$b > 0$. 质点沿逆时针 ($\dot{\theta} > 0$) 运动，初始坐标为 r_0, θ_0，求轨道方程.

解 欲求形如 $f(r,\theta) = 0$ 的轨道方程，需要首先建立 r 对于 θ 的微分方程. 它可以从 r, θ 对于时间 t 的微分方程中消去 $\mathrm{d}t$ 得到.

由已知条件可得

$$v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = c, \tag{1.2.36}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{b^2}{r^3}. \tag{1.2.37}$$

将式 (1.2.36) 对时间取微商，得

$$\ddot{r} = 0, \tag{1.2.38}$$

代入式 (1.2.37)，并考虑到 $\dot{\theta} > 0$，得

$$\dot{\theta} = \frac{b}{r^2}. \tag{1.2.39}$$

由式 (1.2.36) 和式 (1.2.39) 可得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{c}{b}r^2, \tag{1.2.40}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{c}{b}\mathrm{d}\theta. \tag{1.2.41}$$

积分并利用初始条件，得

$$r = \frac{br_0}{b - cr_0(\theta - \theta_0)}. \tag{1.2.42}$$

这就是所求的轨道.

2. 柱坐标系

(圆) 柱坐标是在直角坐标 x, y 和 z 中，将 x 和 y 坐标用平面极坐标 ρ 和 ϕ 代替而得到的 (见图 1.6)：

$$x = \rho\cos\phi, \tag{1.2.43}$$

$$y = \rho\sin\phi, \tag{1.2.44}$$

$$z = z. \tag{1.2.45}$$

任意点的位矢可写成

$$\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{e}_\rho + z\boldsymbol{e}_z. \tag{1.2.46}$$

根据极坐标，不难写出速度与加速度：

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \dot{z}\boldsymbol{e}_z, \tag{1.2.47}$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\boldsymbol{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\boldsymbol{e}_\phi + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z. \tag{1.2.48}$$

3. 球坐标系

在球坐标系中，空间任意一点的位置由球坐标 r(矢径)、θ(极角)和 ϕ (方位角)描写(图 1.7)，它们与直角坐标的关系为

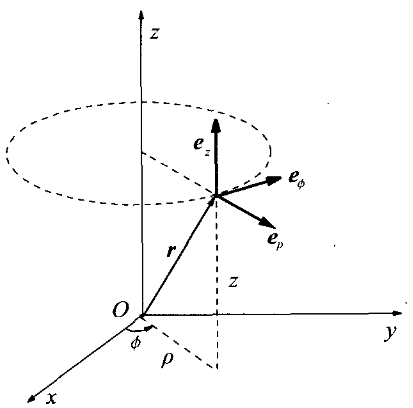

图 1.6 柱坐标系

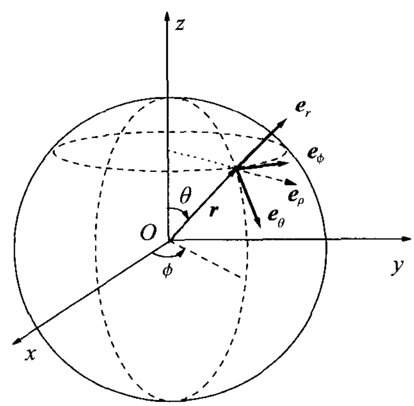

图 1.7 球坐标系

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \tag{1.2.49}$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi, \tag{1.2.50}$$

$$z = r\cos\theta. \tag{1.2.51}$$

3 个单位矢量均为角度的函数

$$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_r(\theta,\phi), \tag{1.2.52}$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\theta(\theta,\phi), \tag{1.2.53}$$

$$\boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{e}_\phi(\phi). \tag{1.2.54}$$

类似极坐标的情形，容易求出：

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\theta} = \boldsymbol{e}_\theta, \tag{1.2.55}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial\theta} = -\boldsymbol{e}_r, \tag{1.2.56}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\phi}{\partial\phi} = -\boldsymbol{e}_\rho. \tag{1.2.57}$$

其中 $\boldsymbol{e}_\rho$ 为 $\boldsymbol{e}_r$ 在 xy 平面内投影方向的单位矢量(即相应柱坐标的径向单位矢量)

$$\boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{e}_r\sin\theta + \boldsymbol{e}_\theta\cos\theta. \tag{1.2.58}$$

同理，可求出 $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\theta$ 对方位角的微商，

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\phi} = \frac{\partial}{\partial\phi}(\boldsymbol{e}_\rho\sin\theta) = \boldsymbol{e}_\phi\sin\theta, \tag{1.2.59}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial\phi} = \frac{\partial}{\partial\phi}(\boldsymbol{e}_\rho\cos\theta) = \boldsymbol{e}_\phi\cos\theta. \tag{1.2.60}$$

在球坐标中，质点的位矢可写成

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r. \tag{1.2.61}$$

利用式 (1.2.55)~ 式 (1.2.60)，不难求得速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\boldsymbol{e}_r) = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi \tag{1.2.62}$$

和加速度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi)\\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2)\boldsymbol{e}_\theta\\ &\quad + (r\sin\theta\ddot{\phi} + 2\sin\theta\dot{r}\dot{\phi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi})\boldsymbol{e}_\phi.\end{aligned} \tag{1.2.63}$$

1.2.3 “自然坐标系”

当质点的轨道给定之后，其上任一点 P 的位置可用弧长(弧坐标)来描写：先在轨道上任取一点 Q 作为弧坐标的原点，从 Q 点到 P 点的弧长 s 定义为 P 点的**弧坐标**，若 P 点在 Q 点的前方(即沿曲线从 Q 点走向 P 点时，走向与质点的运动方向一

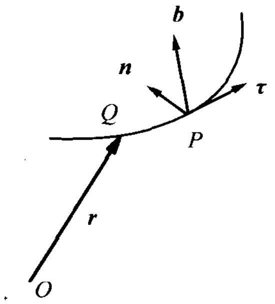

图 1.8 自然坐标系

致)，规定 s 为正；反之规定 s 为负(图 1.8)．质点的运动规律可用弧坐标表示为

$$s = s(t). \tag{1.2.64}$$

当质点在轨道上运动时，其位矢为弧坐标的函数

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s). \tag{1.2.65}$$

速度为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}\boldsymbol{\tau}, \tag{1.2.66}$$

式中 $\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ 为切线方向的单位矢量(因为 $|\boldsymbol{\tau}| = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}s} = 1$)．由式 (1.2.66) 可得加速度

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{s}\boldsymbol{\tau}) = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \dot{s}^2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}. \tag{1.2.67}$$

定义**曲率矢量**

$$\boldsymbol{N} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = N\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{n}}{\rho}. \tag{1.2.68}$$

曲率矢量的方向称为**主法线方向**，简称**法线方向**．它通常指向曲线弯曲的一侧 (内侧)．$\boldsymbol{n}$ 为主法线方向的单位矢量．N 称为空间曲线的**曲率**，它反映了曲线的弯曲程度．当曲线为直线时，曲率为零．ρ 称为**曲率半径**(即曲线内切圆的半径)．此时式 (1.2.67) 可写成

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{n}, \tag{1.2.69}$$

即

$$a_\tau = \ddot{s} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}, \tag{1.2.70}$$

$$a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}. \tag{1.2.71}$$

这组方程称为**内乘方程**．

在微分几何中，定义副法线方向单位矢量

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n}. \tag{1.2.72}$$

3 个单位矢量 $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ 构成右手螺旋正交坐标系，称为“**自然坐标系**”．与前面引入的坐标系不同，它只在轨道上才有定义．$\boldsymbol{\tau}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 构成的平面称为**密切平面**．$\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 构成的平面称为**法平面**．$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{\tau}$ 构成的平面称为**从切平面**(或**直切平面**)．加速度在副法线方向没有分量．加速度在自然坐标系分解的好处是它只取决于曲线轨道本身的形状，而不依赖于空间坐标系．

副法线方向单位矢量 $\boldsymbol{b}$ 对弧长的导数

$$\boldsymbol{K} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{\tau} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s} \tag{1.2.73}$$