- 重点内容提要
- 知识结构网络图
- 基本要求与考核点
- 习题详解

新三导丛书

XIN SAN DAO CONG SHU

离散数学

导教·导学·导考

主编 廖虎

西北工業大學出版社

三导丛书

离散数学

导教·导学·导考

廖　虎　主编

张云鹏　廖　虎　余庆红　王松丹　编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是《离散数学》(西北工业大学出版社,2007年8月)教材的配套教学辅导书,内容由重点内容提要、知识结构网络图、基本要求及考核点和课后习题详解等四部分组成,并附有西北工业大学软件与微电子学院2003—2007年离散数学课程考试试题。

本书可作为离散数学课程的教学、学习和考试参考用书,也可供考研、计算机等级考试等人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学导教·导学·导考/廖虎主编. —西安:西北工业大学出版社,2007.9
(新三导丛书)
ISBN 978-7-5612-2286-7

Ⅰ.离… Ⅱ.廖… Ⅲ.离散数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第132924号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路127号 **邮编**:710072
电　　话:(029)88493844 88491757
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:陕西天元印务有限责任公司
开　　本:787 mm×960 mm 1/16
印　　张:7.875
字　　数:203千字
版　　次:2007年9月第1版 2007年9月第1次印刷
定　　价:12.00元

前　言

离散数学是一门相对于“连续数学”而命名的现代数学的一个重要分支，并且是计算机科学基础理论的核心科学，是随着计算机科学的发展而建立起来的新兴基础学科。离散数学主要研究离散量的结构和相互之间的关系，其研究对象一般是有限空间，因此它能充分描述计算机科学离散性的特点。

离散数学自20世纪70年代初形成以来，已成为计算机科学与技术的核心专业基础课程，是计算机软件专业本科生必修的专业基础课。一方面，它为后续课程，如数据结构、编译原理、操作系统、数据库原理、人工智能和算法分析等课程提供必要的数学基础；另一方面，通过对离散数学学习，可以培养和提高学生的抽象思维和逻辑推理能力，为今后继续学习和工作打下坚实的数学基础。

本书是在作者多年从事离散数学课程教学实践并参考国内外多种教材的基础上编写而成的，编写章节与《离散数学》教材（西北工业大学出版社）一致，每章由重点内容提要、知识结构网络图、基本要求与考核点、习题详解等4部分组成。重点内容提要部分给出了本章内容的简要总结，以帮助读者抓住要点，提高学习效率。知识结构网络图给出了本章节中各个知识点的联系与区别。基本要求与考核点部分明确地给出了本章的学习目的与要求，以及通过学习所要达到的能力层次。习题详解部分给出了《离散数学》教材中所有习题的解答。本书附录中编入了西北工业大学软件与微电子学院2003—2007年的离散数学课程考试试题。编写过程中，力求做到内容通俗流畅、简明扼要。书中对每个部分的内容都是按照步步启发的模式设计安排的，编者的愿望是想给读者提供一本与同名课程教学相配套的辅助参考书，使读者通过阅读本书，能对离散数学的理论和方法有更加深入的理解。

全书共分10章，其中第1～3章由廖虎编写；第4,5章由余庆红编写；第6,7章由王松丹编写；第8～10章由张云鹏编写。全书由廖虎担任主编。西北工业大学张遵廉教授主审并对本书的编写提出了许多宝贵意见，在编辑出版过程中得到西北工业大学出版社雷军、王夏林同志的大力支持，在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中难免存在不当和疏漏之处，恳请读者批评指正。

作　者

2007年4月

目　录

第1章　命题逻辑 …… 1
一、重点内容提要 …… 1
二、知识结构网络图 …… 2
三、基本要求与考核点 …… 2
四、习题详解 …… 3
第2章　谓词逻辑 …… 17
一、重点内容提要 …… 17
二、知识结构网络图 …… 18
三、基本要求与考核点 …… 18
四、习题详解 …… 19
第3章　集合 …… 27
一、重点内容提要 …… 27
二、知识结构网络图 …… 28
三、基本要求与考核点 …… 28
四、习题详解 …… 29
第4章　二元关系 …… 37
一、重点内容提要 …… 37
二、知识结构网络图 …… 38
三、基本要求与考核点 …… 38
四、习题详解 …… 39
第5章　函数 …… 46
一、重点内容提要 …… 46
二、知识结构网络图 …… 46
三、基本要求与考核点 …… 47
四、习题详解 …… 47
第6章　代数 …… 51
一、重点内容提要 …… 51

二、知识结构网络图 …… 52
三、基本要求与考核点 …… 52
四、习题详解 …… 53

第7章　群论 …… 63

一、重点内容提要 …… 63
二、知识结构网络图 …… 64
三、基本要求与考核点 …… 64
四、习题详解 …… 65

第8章*　格与布尔代数 …… 73

一、重点内容提要 …… 73
二、知识结构网络图 …… 74
三、基本要求与考核点 …… 74
四、习题详解 …… 75

第9章　图论 …… 80

一、重点内容提要 …… 80
二、知识结构网络图 …… 82
三、基本要求与考核点 …… 82
四、习题详解 …… 83

第10章　特殊图 …… 90

一、重点内容提要 …… 90
二、知识结构网络图 …… 91
三、基本要求与考核点 …… 92
四、习题详解 …… 92

附录　西北工业大学软件与微电子学院2003—2007年离散数学课程考试试题 …… 102

第 1 章　命题逻辑

一、重点内容提要

命题:在特定的范围、时间和空间内具有唯一确定真假性的陈述语句. 祈使句、疑问句和感叹句等都不是命题,包括"悖论"这类不能确定是真或假的陈述语句.

原子命题(本原命题):不能分解成更简单的命题.

命题变元:真值未指定的任意命题,以"真"、"假"为其变化域.

命题常元:真值已指定的命题，就是 $T(1)$ 和 $F(0)$.

命题连接词:命题与命题演算中的运算符. 分别为

非"$\neg$"，　合取"$\wedge$"，　析取"$\vee$"，　蕴含"$\rightarrow$"，　等值"$\forall\leftrightarrow$"

复合命题:通过一些命题连接词将命题和原子命题构成的新命题.

原子公式:单个命题变元和命题常元.

命题公式:由原子公式通过有限次命题演算生成的公式.

真值指派:对命题公式中的所有命题变元指定一组真值(赋值).

真值表:描述命题公式真值情况的二维表,包括了原子命题的所有指派.

重言式(永真式):对应于所有指派，命题公式均取值为真.

矛盾式(永假式):对应于所有指派，命题公式均取值为假

偶然式:不是永真式，也不是永假式的命题公式.

恒等式:两个公式对同一任何指派都有相同的真值,他们互为恒等式.

等价:在同一组指派下两个命题公式有相同的真值,它表示了公式之间的关系,记为"$\Leftrightarrow$".

永真蕴含式(蕴含重言式):如果 $A\rightarrow B$ 是一永真式，A 与 B 的关系. 记为 $A\Rightarrow B$.

对偶公式:在仅有连接词 $\wedge$，$\vee$，$\neg$ 的公式中将 $\wedge$，$\vee$，T，F 分别换以 $\vee$，$\wedge$，F，T 得到的公式,是公式间的相互关系.

基本积(小项):由命题公式中的一些命题变元和一些命题变元的否定合取而成的子公式.

基本和(大项):由命题公式中的一些命题变元和一些命题变元的否定析取而成的子公式.

因子:合取或析取这两个二元运算的运算对象.

析取范式:一个由基本积析取组成的公式.

合取范式:一个由基本和合取组成的公式.

范式:析取范式与合取范式的统称.

极小项:对于 n 个变元的公式，满足:若每一个变元与其否定不同时存在,而两者之一必出现一次且仅出

现一次的基本积.

主析取范式:一个由极小项析取组成的公式.

极大项:对于 n 个变元的公式,满足:若每一个变元与其否定不同时存在,而两者之一必出现一次且仅出现一次的基本和.

主合取范式:一个由极大项合取组成的公式.

主范式:主析取范式和主合取范式的统称.

有效结论:在默认已知前提为真时按照公理、恒等式推出的结论.

推理规则:P 规则,直接调用已知条件;T 规则,利用前面的公理化结论.

常用的公理:德·摩根律、蕴含表达式、等值表达式、和前律、分配律、逆反律、传递律、对偶原理.

二、知识结构网络图

- 命题公式
  - 1. 原子命题
    - 命题变元
    - 命题常元
  - 2. 归纳定义的公式
    - 原子命题
    - 由原子命题通过五种关联运算
    - 有限次利用上述方法得到的公式
  - 3. 重言(矛盾)式
    - 永真式
    - 永假式
    - 偶然式
  - 4. 范式
    - 析取范式、主析取范式
    - 合取范式、主合取范式
  - 5. 公式间的关系
    - 恒等式
    - 永真蕴涵式
    - 对偶式

三、基本要求与考核点

1. 命题的概念及分类

(1) 熟悉命题的定义,能判断陈述句是否是命题.

(2) 熟悉命题的基本表示形式、变元、常元等.

2. 命题公式的概念及分类

(1) 熟悉命题之间五个关联运算的真值.

(2) 能构造真值表,求命题公式的真值.

(3) 能判断永真式、永假式、偶然式.

(4) 能求出命题公式的对偶式.

3. 命题公式的范式及分类

(1) 熟悉命题的基本和、基本积.

(2) 能求出命题公式的析取范式、合取范式.

(3) 能构造命题的极大项、极小项.

(4) 能求出命题公式的主析取范式、主合取范式.

4. 命题推理的常用公理

(1) 熟悉命题推理的常用公理.

(2) 熟悉命题推理的 P、T 规则.

(3) 能对命题进行有效论证.

本章的重点：

(1) 命题公式主析取范式、主合取范式的求法.

(2) 命题公式的有效论证.

本章的难点：

(1) 恒等式的推导.

(2) 永真蕴涵式的推导.

四、习题详解

习题　1.1

1. 判断下列语句是否是命题，若是命题，指出其真值.

(1) 上海位于中国的东部.

(2) $8 < 3$.

(3) 这个命题的真的.

(4) 一个整数为偶数当且仅当它能被 2 整除.

(5) 你说什么？

解　(1) 命题，真.

(2) 命题，假.

(3) 否.

(4) 命题，真.

(5) 否.

2. 将下列命题符号化.

(1) 他们明天或后天去看电影.

(2) 他如今不是在上海就是在杭州.

(3) 如果天不下雪和我有时间，那么我就去逛街.

(4) 天正在下雪，我也没有去逛街.

(5) 除非我得到认可，否则我不会告诉你.

(6) 说逻辑学枯燥无味和毫无价值，这是不对的.

(7) 如果你想中奖，你就得买奖票；如果你买了奖票，你一定是想中奖.

(8) 如果我不获得更多帮助，我不能完成这个任务.

解 (1) 设 P:他们明天去看电影，Q:他们后天去看电影，则有 $P \vee Q$.

(2) 设 P:他如今在上海，Q:他如今在杭州，则有 $P \vee Q$.

(3) 设 P:天下雪，Q:我有时间，R:我去逛街，则有$(\neg P \wedge Q) \rightarrow R$.

(4) 设 P:天下雪，R:我去逛街，则有 $P \wedge \neg R$.

(5) 设 P:我得到认可，R:我会告诉你，则有 $P \rightarrow R$.

(6) 设 P:逻辑学有兴趣，Q:逻辑学有价值，则有 $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$.

(7) 设 P:想中奖，Q:买奖票，则有 $P \leftrightarrow Q$.

(8) 设 P:我完成这个任务，Q:我获得更多的帮助，则有 $P \rightarrow Q$.

3. 否定下列命题

(1) 每个自然数都是偶数.

(2) 仅当你去我才去.

(3) 只要风调雨顺，农业就能获得丰收.

(4) 张三的每门课程都很优秀.

解 (1) 并非每个自然数都是偶数.

(2) 并非你去了我才去.

(3) 并非风调雨顺农业才能获得丰收.

(4) 并非张三的每门课程都很优秀.

4. 写出下列命题的逆命题和否命题.

(1) 如果 $a \times b = 0$，则 $a = 0$ 或 $b = 0$.

(2) 如果张三生病了，那么就让李四去出差.

(3) 如果天下雨，我将不去.

解 (1) 逆命题：如果 $a = 0$ 或 $b = 0$，则 $a \times b = 0$.

否命题：并非 $a \times b = 0$，则 $a = 0$ 或 $b = 0$.

(2) 逆命题：如果让李四出差，则是张三病了.

否命题：张三病了并非会让李四出差.

(3) 逆命题：如果我不去，天将下雨.

否命题：如果天不下雨，我将去.

5. 设 P 表示命题“他迟到了”，Q 表示命题“他错过了面试的机会”，R 表示“他找到了工作”. 试用陈述句复述下列命题.

(1)$P \rightarrow Q$.

(2)$P \vee Q \vee R$.

(3)$\neg(P \vee Q) \wedge R$.

(4)$P \leftrightarrow Q$.

(5)$(P \wedge Q) \rightarrow \neg R$.

解 (1) 他迟到了，所以他错过了面试的机会.

(2) 他或许是迟到了，或许是错过了面试的机会，或许他找到了工作.

(3) 他并没有迟到也没有错过面试的机会，他找到了工作.

(4) 如果他迟到，他就错过了面试的机会；如果他错过了面试的机会，那么是他迟到了.

(5) 如果他迟到了且错过了面试的机会，那么他将找不到工作.

6. 构造下列公式的真值表：

(1) $P \vee Q \wedge R$.

(2) $P \wedge Q \wedge R \vee \neg((P \vee Q) \vee (P \vee S))$.

(3) $(\neg(P \wedge Q) \vee \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \vee \neg R) \wedge S)$.

(4) $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee R)$.

解 (1) 真值表如表1.1所示.

表 1.1

P	Q	R	$P \vee Q$	$P \vee Q \wedge R$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

(2) 真值表如表1.2所示.

表 1.2

P	Q	R	S	$P \wedge Q \wedge R$	$(P \vee Q) \vee (P \vee S)$	$\neg((P \vee Q) \vee (P \vee S))$	原式
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	1

(3) 真值表如表 1.3 所示.

表 1.3

P	Q	R	S	$\neg(P \wedge Q) \vee \neg R$	$(\neg P \wedge Q \vee \neg R) \wedge S$	原式
0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0

(4) 真值表如表 1.4 所示.

表 1.4

P	Q	R	$P \vee Q$	$\neg P \vee R$	$Q \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

7. 证明下列公式的真值与它们变元的真值无关.

(1) $P \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$.

(2) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$.

(3) $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$.

(4) $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q)$.

证明 (1) 真值表 1.5 所示.

表 1.5

P	Q	$P \rightarrow Q$	$P \wedge (P \rightarrow Q)$	$P \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

真值表说明该公式恒为真,与命题变元的指派无关.

(2) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow \neg (P \rightarrow Q) \vee (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow \neg (\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow T$

(3)
$$\begin{aligned}
(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R) \Leftrightarrow\ & (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R) \Leftrightarrow \\
& \neg ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \vee (P \rightarrow R) \Leftrightarrow \\
& \neg (P \rightarrow Q) \vee \neg (Q \rightarrow R) \vee (P \rightarrow R) \Leftrightarrow \\
& (P \wedge \neg Q) \wedge (Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow \\
& (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow \\
& (P \vee \neg P) \wedge (\neg R \vee \neg P) \vee Q \Leftrightarrow \\
& \neg R \vee R \vee Q \Leftrightarrow T
\end{aligned}$$

(4) 真值表如表 1.6 所示.

表 1.6

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q$	$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q)$
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

8. 五种命题运算符 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ 中,有部分满足运算的交换律和结合律,指出是哪些运算,并用真值表证明该运算的交换律和结合律成立.

证明 $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ 满足运算的交换律和结合律.各自的真值表分别如表 1.7,表 1.8,表 1.9 所示.

表 1.7

P	Q	R	$P\wedge Q$	$Q\wedge P$	$(P\wedge Q)\wedge R$	$P\wedge(Q\wedge R)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

表 1.8

P	Q	R	$P\vee Q$	$Q\vee P$	$(P\vee Q)\vee R$	$P\vee(Q\vee R)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

表 1.9

P	Q	R	$P\leftrightarrow Q$	$Q\leftrightarrow P$	$(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R$	$P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R)$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

习题 1.2

1.判断下列命题哪些是重言式、矛盾式和偶然式?

(1)$P \vee \neg P$.

(2)$P \wedge \neg P$.

(3)$((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$.

(4)$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$.

(5)$(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$.

(6)$((P \to Q) \wedge (R \to Q)) \to ((P \wedge R) \to Q)$.

(7)$P \wedge (Q \vee R) \to (P \wedge Q \vee P \wedge R)$.

(8)$(P \wedge Q \leftrightarrow P) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$.

解 (1) 重言式.

(2) 矛盾式.

(3) 重言式.

(4) 重言式.

(5) 重言式.

(6) 偶然式.

(7) 重言式.

(8) 偶然式.

2.将下列表达式转换成仅有 $\vee$ 和 $\neg$ 运算的等价表达式,并尽可能简单.

(1)$P \vee (Q \vee \neg R)$.

(2)$P \vee (\neg Q \wedge R \to P)$.

(3) $P \to (Q \to P)$.

(4)$(P \wedge Q) \wedge \neg R$.

(5)$(P \to (Q \vee \neg R)) \wedge \neg P \wedge Q$.

(6)$\neg P \wedge \neg Q \wedge (\neg R \to P)$.

解 (1)$P \vee (Q \vee \neg R) \Leftrightarrow P \vee Q \vee \neg R$.

(2)$P \vee (\neg Q \wedge R \to P) \Leftrightarrow P \vee (\neg(\neg Q \wedge R) \vee P) \Leftrightarrow P \vee (Q \vee \neg R \vee P) \Leftrightarrow Q \vee \neg R \vee P$.

(3)$P \to (Q \to P) \Leftrightarrow \neg P \vee (Q \to P) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee P \Leftrightarrow T \vee \neg Q \Leftrightarrow T$.

将下列表达式转换成仅有 $\wedge$ 和 $\neg$ 运算的等价表达式,并尽可能简单.

(4)$(P \wedge Q) \wedge \neg R \Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \neg R$.

(5)
$$
\begin{aligned}
(P \to (Q \vee \neg R)) \vee \neg P \vee Q \Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge \neg P \wedge Q \Leftrightarrow \\
& (\neg P \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (\neg R \wedge \neg P) \wedge Q \Leftrightarrow \\
& \neg P \wedge Q \vee (Q \wedge \neg P \wedge Q) \vee (\neg R \wedge \neg P \wedge Q) \Leftrightarrow \\
& \neg(\neg(\neg P \wedge Q) \wedge \neg(Q \wedge \neg P \wedge Q) \wedge \neg(\neg R \wedge \neg P \wedge Q))
\end{aligned}
$$

(6)
$$
\begin{aligned}
\neg P \wedge \neg Q \wedge (\neg R \to P) \Leftrightarrow\ & \neg P \wedge \neg Q \wedge (R \vee P) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge P) \Leftrightarrow \\
& (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee F \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)
\end{aligned}
$$

3. 证明下列等价关系

(1) $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$.

(2) $P\rightarrow(Q\rightarrow R)\Leftrightarrow Q\rightarrow(P\rightarrow R)$.

(3) $P\rightarrow(Q\rightarrow P)\Leftrightarrow\neg P\rightarrow(P\rightarrow\neg Q)$.

(4) $(\neg P\wedge\neg Q)\rightarrow\neg R\Leftrightarrow R\rightarrow(Q\vee P)$.

(5) $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow Q)\Leftrightarrow(P\vee R)\rightarrow Q)$.

(6) $\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$.

(7) $\neg(P\rightarrow Q)\Leftrightarrow P\wedge\neg Q$.

(8) $\neg P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow P\leftrightarrow\neg Q$.

证明 (1) $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P)\Leftrightarrow(\neg P\vee Q\wedge\neg Q)\vee(\neg P\vee Q\wedge P)\Leftrightarrow$

$(\neg P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge P)\vee(Q\wedge P)\Leftrightarrow$

$(\neg P\wedge\neg Q)\vee F\vee F\vee(Q\wedge P)\Leftrightarrow(Q\wedge P)\wedge(\neg P\wedge\neg Q)$

(2) $P\rightarrow(Q\rightarrow R)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q\vee R\Leftrightarrow\neg Q\vee\neg P\vee R\Leftrightarrow\neg Q\vee(\neg P\vee R)\Leftrightarrow$

$\neg Q\vee(P\rightarrow R)\Leftrightarrow Q\rightarrow(P\rightarrow R)$

(3) $P\rightarrow(Q\rightarrow P)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q\vee P\Leftrightarrow P\vee\neg P\vee\neg Q\Leftrightarrow P\vee(P\rightarrow\neg Q)\Leftrightarrow P\rightarrow(P\rightarrow\neg Q)$.

(4) $(\neg P\wedge\neg Q)\rightarrow\neg R\Leftrightarrow\neg(\neg P\wedge\neg Q)\vee\neg R\Leftrightarrow\neg R\vee(P\vee Q)\Leftrightarrow R\rightarrow(Q\vee P)$.

(5) $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow Q)\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge(\neg R\vee Q)\Leftrightarrow(\neg P\wedge(\neg R)\vee Q\Leftrightarrow$

$\neg(P\vee R)\vee Q\Leftrightarrow(P\vee R)\rightarrow Q)$

(6) $\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow\neg((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P))\Leftrightarrow\neg((\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P))\Leftrightarrow$

$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

(7) $\neg(P\rightarrow Q)\Leftrightarrow P\wedge\neg Q\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\Leftrightarrow P\wedge\neg Q$.

(8) $\neg P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(\neg P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow\neg P)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)\Leftrightarrow$

$(\neg Q\rightarrow P)\wedge(P\rightarrow\neg Q)\Leftrightarrow P\leftrightarrow\neg Q$

4. 使用恒等式证明下列各式.

(1) $\neg(\neg P\vee\neg Q)\vee\neg(\neg P\vee Q)\Leftrightarrow P$.

(2) $(P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)$.

(3) $Q\vee\neg((\neg P\vee Q)\wedge P)\Leftrightarrow T$.

证明 (1) $\neg(\neg P\vee\neg Q)\vee\neg(\neg P\vee Q)\Leftrightarrow(Q\wedge P)\vee(P\wedge\neg Q)\Leftrightarrow(P\wedge(Q\vee\neg Q))\Leftrightarrow P$.

(2) $(P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)\Leftrightarrow(P\vee(\neg Q\wedge Q))\wedge(\neg P\vee\neg Q)\Leftrightarrow$

$P\wedge(\neg P\vee\neg Q)\Leftrightarrow$

$(P\wedge\neg P)\vee(P\wedge\neg Q)\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)$

(3) $Q\vee\neg((\neg P\vee Q)\wedge P)\Leftrightarrow Q\vee\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow Q\vee\neg Q\vee\neg P\Leftrightarrow T\vee\neg P\Leftrightarrow T$.

5. 求出下列公式的对偶式

(1) $\neg(\neg(Q\rightarrow P)\rightarrow(\neg Q\vee R)$.

(2) $(\neg P\wedge Q)\rightarrow\neg(Q\vee\neg R)$.

(3) $\neg(\neg Q\vee R)\rightarrow(Q\rightarrow P)$.

(4) $Q\rightarrow(P\vee R)$.

(5) $(P\wedge Q)\rightarrow\neg R$.

解　(1)$\neg(\neg(Q\to P)\to(\neg Q\lor R)\Leftrightarrow\neg(\neg(\neg Q\lor P)\to(\neg Q\lor R)\Leftrightarrow\neg(Q\land\neg P)\to(\neg Q\lor R)\Leftrightarrow$

$$(Q\land\neg P)\lor(\neg Q\lor R)$$

对偶式为
$$(Q\lor\neg P)\land(\neg Q\land R)$$

(2)$(\neg P\land Q)\to\neg(Q\lor\neg R)\Leftrightarrow(\neg P\land Q)\lor(\neg Q\land R)\Leftrightarrow(P\lor\neg Q)\lor(\neg Q\land R)$.

对偶式为
$$(P\land\neg Q)\land(\neg Q\lor R)$$

(3)$\neg(\neg Q\lor R)\to(Q\to P)\Leftrightarrow(\neg Q\lor R)\lor(\neg Q\lor P)$.

对偶式为
$$(\neg Q\land R)\land(\neg Q\land P)$$

(4)$Q\to(P\lor R)\Leftrightarrow\neg Q\lor P\lor R$.

对偶式为
$$\neg Q\land P\land R$$

(5)$(P\land Q)\to\neg R\Leftrightarrow\neg(P\lor Q)\lor\neg R\Leftrightarrow\neg P\lor\neg Q\lor\neg R$.

对偶式为
$$\neg P\land\neg Q\land\neg R$$

6.证明下列蕴含式

(1)$P\land Q\Rightarrow(P\to Q)$.

(2)$P\Rightarrow(Q\to P)$.

(3)$(P\to(Q\to R))\Rightarrow(P\to Q)\to(P\to\neg R)$.

(4)$P\to Q\Rightarrow P\to P\land Q$.

(5)$(P\to Q)\to Q\Rightarrow P\lor Q$.

证明　(1)$P\land Q\to(P\to Q)\Leftrightarrow\neg(P\land Q)\lor(\neg P\lor Q)\Leftrightarrow(\neg P\lor\neg Q)\lor(\neg P\lor Q)\Leftrightarrow$

$$\neg P\lor\neg Q\lor Q\Leftrightarrow T$$

为永真式，故
$$P\land Q\Rightarrow(P\to Q)$$

(2)$P\to(Q\to P)\Leftrightarrow\neg(P\lor(P\lor\neg Q))\Leftrightarrow T$.

为永真式，故
$$P\Rightarrow(Q\to P)$$

(3)

$$\begin{aligned}(P\to(Q\to R))\to(P\to Q)\to(P\to\neg R)\Leftrightarrow{}&\neg(\neg P\lor(R\lor\neg Q))\lor(\neg(P\lor\neg Q)\lor(R\lor\neg P))\Leftrightarrow\\&(P\land Q\land\neg R)\lor(P\land\neg Q)\lor\neg P\lor R\Leftrightarrow\\&(P\land Q\land\neg R)\lor((P\lor\neg P)\land(\neg Q\lor\neg P))\lor R\Leftrightarrow\\&(P\land Q\land\neg R)\lor\neg(Q\land P\land\neg R)\Leftrightarrow T\end{aligned}$$

为永真式，故
$$(P\to(Q\to R))\Rightarrow(P\to Q)\to(P\to\neg R)$$

(4) 设 $P\to P\land Q$ 为 F，则 P 为 T，Q 为 F，则 $P\to Q$ 为 F，所以

$$P\to Q\Rightarrow P\to P\land Q$$

(5) 设 $P\lor Q$ 为 F，则 P 为 F，Q 为 F，则$(P\to Q)\to Q$ 为 F，所以

$$(P\to Q)\to Q\Rightarrow P\lor Q$$

习题　1.3

1.求出等价于下列公式的析取范式和主析取范式.

(1)$P\to Q$.

(2)$P\to(\neg Q\lor R)$.

(3)$(P\land Q)\lor(\neg Q\leftrightarrow R)$.