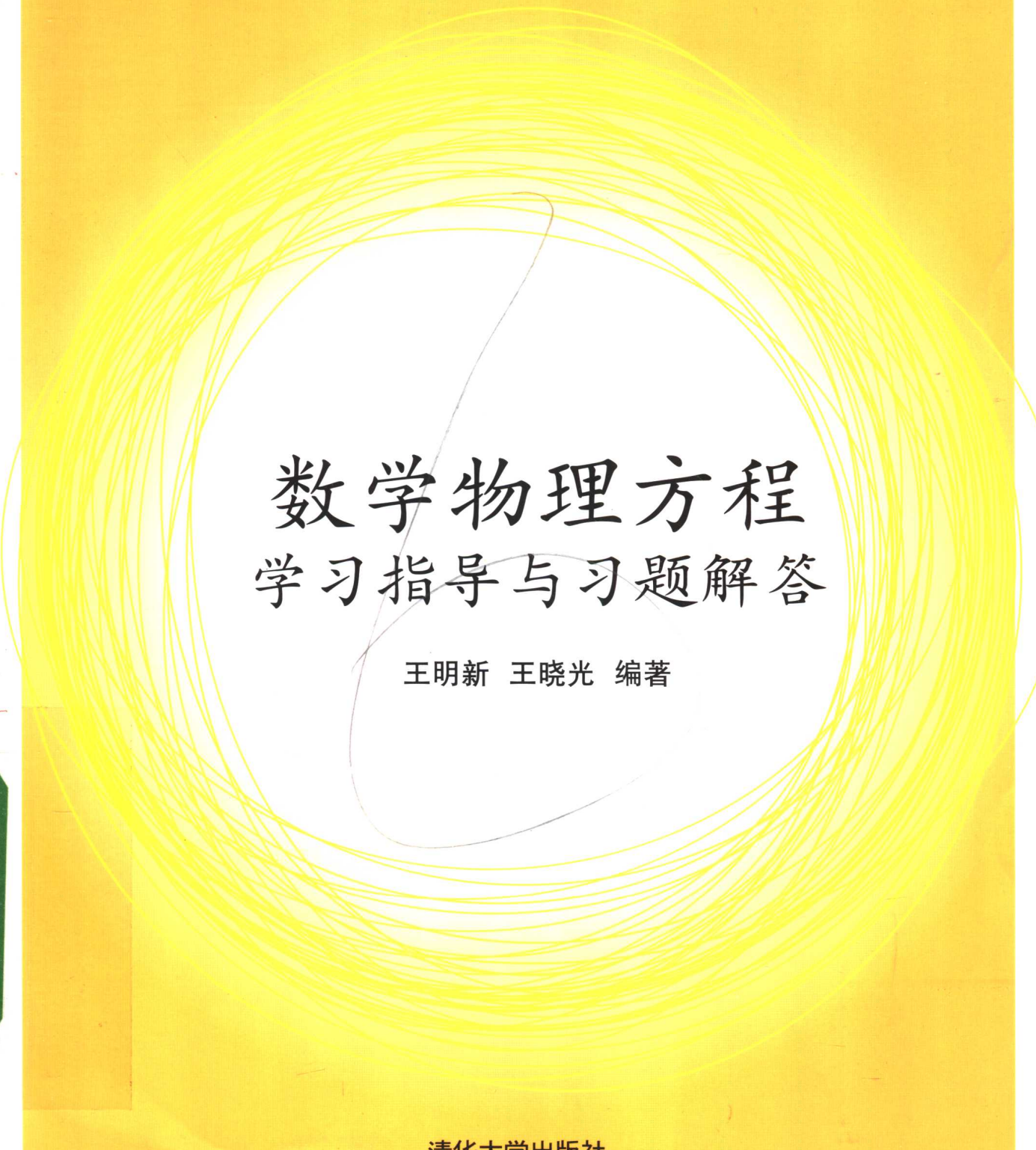


A large, hand-drawn yellow scribble in the shape of a circle, composed of many overlapping, slightly irregular lines, framing the central text.

数学物理方程 学习指导与习题解答

王明新 王晓光 编著

清华大学出版社

0411.1/68C

2007

数学物理方程

学习指导与习题解答

王明新 王晓光 编著



清华大学出版社

北京 /

内 容 简 介

本书可作为数学和应用数学、计算数学、物理、力学专业的本科生以及工科相关专业的研究生的教学参考书,也可供数学工作者、物理工作者和工程技术人员参考。

本书是数学物理方程学习指导与习题解答参考书,它是与《数学物理方程》(王明新,清华大学出版社,2005)配套的教学辅导书。每章都包含三部分内容,即内容提要、《数学物理方程》中相应章节的习题解答和相关补充习题及其解答。阅读本书,可以了解和掌握各种解题方法和技巧。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程学习指导与习题解答/王明新,王晓光编著. —北京:清华大学出版社, 2007.12

ISBN 978-7-302-15850-9

I. 数… II. ①王… ②王… III. 数学物理方程-高等学校-教学参考资料
IV. O175.24

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第116384号

责任编辑:佟丽霞 王海燕

责任校对:王淑云

责任印制:杨 艳

出版发行:清华大学出版社 地 址:北京清华大学学研大厦A座

<http://www.tup.com.cn> 邮 编:100084

c-service@tup.tsinghua.edu.cn

社总机:010-62770175 邮购热线:010-62786544

投稿咨询:010-62772015 客户服务:010-62776969

印刷者:北京四季青印刷厂

装订者:三河市李旗庄少明装订厂

经 销:全国新华书店

开 本:185×230 印 张:18 字 数:366千字

版 次:2007年12月第1版 印 次:2007年12月第1次印刷

印 数:1~4000

定 价:27.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770177 转 3103 产品编号:024067-01

序 言

这是一本数学物理方程学习指导与习题解答参考书,是与《数学物理方程》(王明新,清华大学出版社,2005)配套的教学辅导书.每章都包含三部分内容,即内容提要、《数学物理方程》中相应章节的习题解答和相关补充习题及其解答.

数学物理方程是大学教育中一门重要课程.综合性大学、理工科大学和师范院校的数学、物理、力学及相关专业都开设该课程.在该课程的学习中,同学们普遍感到做习题是比较困难的,一是因为该课程习题的计算量较大、容易算错,二是因为该课程的牵涉面广、内容较为繁琐.因此,编写一本该课程的学习指导与习题解答参考书,供同学们学习时参考,是有必要的.需要指出的是,为了学好数学物理方程课程,同学们应该独立完成教师布置的作业,而不能抄袭本书的解答.再次声明,这只是一本参考书,仅供学习时参考以及各种解题方法和技巧的了解.

本书除了提供《数学物理方程》(王明新,清华大学出版社,2005)一书全部习题解答,还补充了若干相关习题与解答.大多数补充题都超出了大学数学物理方程的内容,这些补充题是数学专业研究生的偏微分方程课程和相关学科研究生的数学物理方法课程中的重要结论(定理,求解方法和求解公式).这样做的目的,一是为同学们提供一本内容较为全面的数学物理方程学习指导与习题解答参考书,二是可以供低年级研究生参考,三是为物理、力学、工程、电子等相关学科人员提供一些特殊问题的直接求解公式.因此,本书不但对于本科生,而且对于数学、物理、力学以及相关学科的研究生和工程技术人员而言,都是一本不可或缺的参考书.

本书的部分内容参考了国内外出版的一些教材,请参阅所附的参考文献.第一作者的几位研究生,对部分习题的解法提出了宝贵的修改意见,并改正了一些打印错误,在此一并致谢.由于作者学识所限,错误和不足之处在所难免,还望读者予以批评指正.

作 者

2007年6月

目 录

第 1 章	典型方程的导出、定解问题及二阶方程的分类与化简	1
1.1	内容提要	1
1.2	习题解答	1
1.3	补充习题与解答	16
第 2 章	分离变量法	25
2.1	内容提要	25
2.2	习题解答	28
2.3	补充习题与解答	67
第 3 章	积分变换法	80
3.1	内容提要	80
3.2	习题解答	88
3.3	补充习题与解答	104
第 4 章	波动方程	135
4.1	内容提要	135
4.2	习题解答	136
4.3	补充习题与解答	144
第 5 章	位势方程	172
5.1	内容提要	172
5.2	习题解答	176
5.3	补充习题与解答	191
第 6 章	三类典型方程的基本理论	230
6.1	内容提要	230
6.2	习题解答	230
6.3	补充习题与解答	249
附录 A	常见的数学物理方程及求解公式	258
附录 B	积分变换表	279
参考文献		281

第1章 典型方程的导出、定解问题及二阶方程的分类与化简

1.1 内容提要

建立偏微分方程模型的基本原理是两大物理定律, 即守恒律和变分原理, 其数学方法是微元法和 Fubini 交换积分次序定理. 常常用到微积分学中如下的三个基本结论.

命题 1.1 设开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, f 在 Ω 内连续. 如果对于任意的子集 $\Omega' \subset \Omega$, 都有

$$\int_{\Omega'} f(x) dx = 0,$$

则在 Ω 上 $f \equiv 0$.

命题 1.2 设开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, f 在 Ω 内连续. 如果对于任意的 $v \in C_0^\infty(\Omega)$, 都有

$$\int_{\Omega} f(x) v(x) dx = 0,$$

则在 Ω 上 $f \equiv 0$.

命题 1.3 (Stokes 公式) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 是一个有界光滑区域, 对于 m 维向量值函数 $v \in C^1$, 下面的积分等式成立:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} v dx = \int_{\partial\Omega} v \cdot n dS, \quad (1.1)$$

其中 n 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量, dS 是 $\partial\Omega$ 上的面积元素. 当 $m = 1, 2, 3$ 时, 公式(1.1)分别是 Newton-Leibniz 公式、Green 公式和 Ostrogradski-Gauss 公式.

1.2 习题解答

1.1 有一长为 l 的均匀而柔软的细线, 上端 ($x = 0$) 固定, 在自身重力的作用下, 此弦处于铅直的平衡位置. 试导出此弦相对于竖直线的微小横振动方程.

解 将弦振动模型一般化. 如图 1.1 所示建立坐标系, 弦密度是位置的函数, 记为 $\rho(x)$, 弦的张力亦是位置的函数, 记为 $T(x)$, 在 u 的正方向、单位长度上的外力密度记为 $f_0(x, t)$.

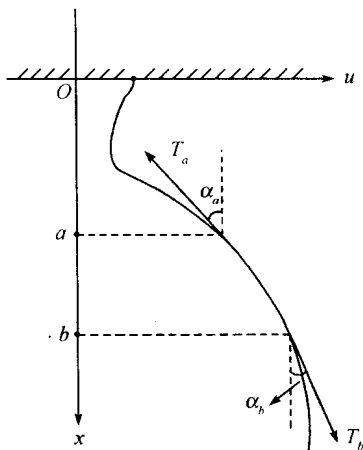


图 1.1

我们利用动量守恒定律来导出 u 的变化规律 (参见图 1.1). 任取一小段弦 $[a, b]$, 某一时间段 $[t_1, t_2]$, 在 $[a, b] \times [t_1, t_2]$ 上研究弦的变化情况. 这时, 沿竖直方向的动量守恒定律可以写成:

$$\boxed{\begin{array}{c} t = t_2 \\ \text{时的动量} \end{array}} - \boxed{\begin{array}{c} t = t_1 \\ \text{时的动量} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} \text{外力在 } [a, b] \times [t_1, t_2] \\ \text{内产生的冲量} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{c} \text{张力在竖直方} \\ \text{向产生的冲量} \end{array}},$$

即

$$\int_a^b \rho u_t|_{t=t_2} dx - \int_a^b \rho u_t|_{t=t_1} dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b f_0 dx dt + \int_{t_1}^{t_2} [T(b) \sin \alpha_b - T(a) \sin \alpha_a] dt.$$

利用

$$\sin \alpha_a = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \Big|_{x=a} \approx u_x|_{x=a}, \quad \sin \alpha_b = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \Big|_{x=b} \approx u_x|_{x=b},$$

可得

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{t_1}^{t_2} \rho(x) u_{tt} dt dx &= \int_a^b \rho(x) [u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1)] dx \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b f_0 dx dt + \int_{t_1}^{t_2} [T(b) u_x(b, t) - T(a) u_x(a, t)] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b f_0 dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b (T(x) u_x)_x dx dt. \end{aligned}$$

根据 Fubini 交换积分次序定理以及 a, b, t_1, t_2 的任意性, 可得

$$\rho(x) u_{tt} = (T(x) u_x)_x + f_0(x, t). \quad (1.2)$$

在本题中, 弦密度 $\rho(x) = \rho$ 是常数, 张力 $T(x) = (l-x)\rho g$, 外力密度 $f_0(x, t) = 0$. 代入 (1.2) 式得弦的振动方程为

$$u_{tt} = g[(l-x)u_x]_x.$$

1.2 一根细弦在媒质中作横振动, 假设媒质的阻力的大小与速度的大小成正比. 试导出弦的横振动方程.

解 因为本题考虑的是细弦, 所以 $\rho(x) = \rho_0$ (常数), $T(x) = T_0$ (常数), $f_0(x, t) = -\gamma u_t$, 其中 $\gamma > 0$ 是阻力系数, 负号表示阻力与速度方向相反. 代入 (1.2) 式得

$$\rho_0 u_{tt} = (T_0 u_x)_x - \gamma u_t.$$

若记 $a^2 = T_0/\rho_0$, $k^2 = \gamma/\rho_0$, 上式可写成

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - k^2 u_t.$$

1.3 均匀细杆在外力作用下沿杆的方向作微小纵振动. 试导出每一截面离开平衡位置所满足的方程 (参见图 1.2).

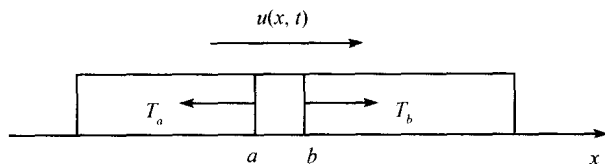


图 1.2

解 将杆的振动模型一般化. 杆密度是位置的函数, 记为 $\rho(x)$. 杆的横截面积亦是位置的函数, 记为 $S(x)$. 那么杆的截面所受张力为 $T(x) = ES(x)u_x$, 其中 E 是杨氏模量. 在 u 的正方向、单位长度上的外力密度是 $f_0(x, t)$. 在 $[a, b] \times [t_1, t_2]$ 上研究杆的振动情况. 杆的动量变化为

$$\Delta P = \int_a^b \rho(x)S(x) [u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1)] dx = \int_a^b \rho(x)S(x) \left(\int_{t_1}^{t_2} u_{tt} dt \right) dx.$$

冲量包括两部分: 张力在 u 方向的冲量 I_1 和外力在 u 方向的冲量 I_2 , 即

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{t_1}^{t_2} (ES(x)u_x|_{x=b} - ES(x)u_x|_{x=a}) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b (ES(x)u_x)_x dx dt, \\ I_2 &= \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b f_0(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

由动量守恒定律 $I_1 + I_2 = \Delta P$, Fubini 交换积分次序定理以及 a, b, t_1, t_2 的任意性, 可得

$$\rho(x)S(x)u_{tt} = (ES(x)u_x)_x + f_0(x, t). \quad (1.3)$$

因为本题中的杆是均匀细杆, 所以 $\rho(x) = \rho$ (常数), $S(x) = S_0$ (常数). 记 $f = f_0/S_0$. 将它们代入 (1.3) 式得杆的微小纵振动方程为

$$\rho u_{tt} = (Eu_x)_x + f(x, t).$$

1.4 有一圆锥形轴 (参见图 1.3), 其高为 h , 密度和杨氏模量分别为常数 ρ 和 E . 试证明其纵振动方程为

$$E \left[\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 u_x \right]_x = \rho \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 u_{tt}.$$

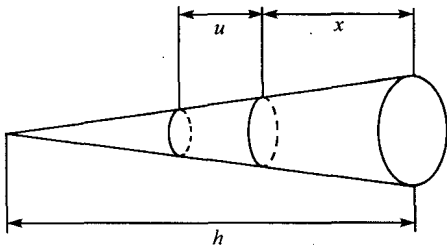


图 1.3

解 在 1.3 题的一般模型中, 取 $\rho(x) = \rho$ (常数), 外力密度 $f_0(x, t) = 0$. 利用初等几何的方法, 可导出杆的横截面积与位置的关系为

$$S(x) = S_0 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2,$$

其中 S_0 为圆锥形轴的底面积. 代入 (1.3) 式得圆锥形轴的纵振动方程为

$$E \left[\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 u_x \right]_x = \rho \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 u_{tt}.$$

1.5 试导出薄膜的横振动方程, 并分别对如下三种情况: (1) 边界固定在钢丝上, (2) 边界部分受到外力的作用, (3) 边界固定在弹性支承上, 写出定解条件.

解 设薄膜在 xOy 平面上的投影区域为 Ω . 在 Ω 上一点 (x, y) 处及时刻 t , 薄膜的位移为 $u = u(x, y, t)$. 任取时间段 $[t_1, t_2]$, 区域 $D \subset \Omega$, 对应于薄膜上的小块记为 S , 其边界 ∂S 从 u 轴上方看取正向, 即顺时针方向. 在 ∂S 上任取一小段 dl , 其上受到的外部张力的大小为 kdl , 其中 k 为弹性系数, 其方向为沿着曲面 S 位于 dl 处的切平面方向, 同时

也垂直于曲线 dl 的切向量 $\beta = (dx, dy, du)$. 记切平面的法向量为 $\alpha = (-u_x, -u_y, 1)$. 由右手系知, dl 上受到的外部张力为

$$dT = kdl \frac{\beta \times \alpha}{|\beta \times \alpha|}.$$

因为 $\alpha \perp \beta$, $|\alpha| = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}$, $|\beta| = dl$, 所以 dT 在 u 轴上的投影为

$$\begin{aligned} dP &= dT \cdot (0, 0, 1) \\ &= kdl \frac{1}{|\beta \times \alpha|} (\beta \times \alpha) \cdot (0, 0, 1) \\ &= \frac{k}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ dx & dy & du \\ -u_x & -u_y & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{k}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} (u_x dy - u_y dx). \end{aligned}$$

由于薄膜做微小模振动, 所以 $\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} \approx 1$, 即 $dP \approx k(u_x dy - u_y dx)$. 于是, 外部张力产生的冲量为

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial S} dP dt &\approx \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial D} k(u_x dy - u_y dx) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_D \nabla \cdot (k \nabla u) dx dy dt. \end{aligned}$$

记外力密度为 f_1 , 则外力产生的冲量为

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_S f_1 dS dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_D f_1 \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy dt \approx \int_{t_1}^{t_2} \int_D f_1 dx dy dt.$$

动量的增量为

$$\begin{aligned} \int_S \rho u_t|_{t=t_2} dS - \int_S \rho u_t|_{t=t_1} dS &= \int_D \rho u_t \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}|_{t=t_2} dx dy \\ &\quad - \int_D \rho u_t \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}|_{t=t_1} dx dy \\ &\approx \int_D \rho u_t|_{t=t_2} dx dy - \int_D \rho u_t|_{t=t_1} dx dy \\ &= \int_D \int_{t_1}^{t_2} \rho u_{tt} dt dx dy. \end{aligned}$$

由动量守恒定律得

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_D \rho u_{tt} dx dy dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_D \nabla \cdot (k \nabla u) dx dy dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_D f_1 dx dy dt.$$

根据 D, t_1, t_2 的任意性得

$$\rho u_{tt} = \nabla \cdot (k \nabla u) + f_1, \quad \text{或者 } u_{tt} = a^2 \Delta u + f.$$

初值条件是 $u(x, y, 0) = \varphi(x, y), u_t(x, y, 0) = \psi(x, y), (x, y) \in \Omega$.

边界条件分别是:

$$(1) u(x, y, t) = g(x, y, t), (x, y) \in \partial\Omega, t \geq 0,$$

$$(2) \frac{\partial u}{\partial n} = g(x, y, t), (x, y) \in \partial\Omega, t \geq 0,$$

$$(3) \alpha u + \frac{\partial u}{\partial n} = 0, (x, y) \in \partial\Omega, t \geq 0.$$

1.6 在杆纵向振动时, 假设 (1) 端点固定; (2) 端点自由; (3) 端点固定在弹性支承上. 试导出杆的纵振动方程, 并写出这三种情况下对应的边界条件.

解 记杆的杨氏模量为 E , 密度为 ρ , 横截面面积为 S . 取一小段杆长 $[a, b]$, 某一时间段 $[t_1, t_2]$. 在 a, b 点处的张力分别为 $ESu_x(a, t)$ 和 $ESu_x(b, t)$, 小杆所受的张力之和为 $ESu_x(b, t) - ESu_x(a, t)$, 冲量为

$$\int_{t_1}^{t_2} [ESu_x(b, t) - ESu_x(a, t)] dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b (ESu_x)_x dx dt.$$

在 t_1 和 t_2 时刻的动量分别为 $\int_a^b \rho Su_t|_{t_1} dx$ 和 $\int_a^b \rho Su_t|_{t_2} dx$. 根据动量守恒定律, 可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_a^b (ESu_x)_x dx dt = \int_a^b \rho Su_t|_{t_2} dx - \int_a^b \rho Su_t|_{t_1} dx = \int_a^b \int_{t_1}^{t_2} \rho Su_{tt} dt dx.$$

由 a, b, t_1, t_2 的任意性以及 Fubini 交换积分次序定理, 得

$$\rho Su_{tt} = (ESu_x)_x.$$

边界条件分别为

$$(1) u(0, t) = u(l, t) = 0;$$

$$(2) u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0;$$

$$(3) (\alpha u - \beta u_x)|_{x=0} = (\alpha u + \beta u_x)|_{x=l} = 0.$$

1.7 有一个半径为 r , 线密度为 ρ 的均匀圆柱体. 假设该圆柱体的同一横截面上的温度是相同的, 圆柱体的侧面与周围介质有热交换, 且满足牛顿热交换定律. 记圆柱体的

比热是 c , 热传导系数是 k , 介质的温度是 u_0 (常数), 热交换系数是 k_1 . 试导出温度分布 u 满足的微分方程.

解 圆柱体在轴方向 $[a, b]$ 段内的区域记为 V . 研究在区域 V 及时间段 $[t_1, t_2]$ 内热量的变化情况. 由能量守恒定律知, $[t_1, t_2]$ 时段内 V 中增加的热量等于 $[t_1, t_2]$ 时段通过边界 ∂V 流入 V 的热量. 在 $[t_1, t_2]$ 时段内 V 中温度升高增加的热量是

$$Q = \int_a^b S c \rho (u|_{t=t_2} - u|_{t=t_1}) dx = \int_a^b \int_{t_1}^{t_2} S c \rho u_t dt dx.$$

通过边界 ∂V 流入 V 的热量 Q^* 包含两部分, 即圆柱内部的热传导以及与外界进行热交换所吸收的热量:

$$\begin{aligned} Q^* &= \int_{t_1}^{t_2} S (k u_x|_{x=b} - k u_x|_{x=a}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b l k_1 (u_0 - u) dx dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b S k u_{xx} dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b l k_1 (u_0 - u) dx dt, \end{aligned}$$

其中 $S = \pi r^2$ 是圆柱横截面积, $l = 2\pi r$ 是圆柱截面周长. 再由 $Q = Q^*$, Fubini 交换积分次序定理以及 a, b, t_1, t_2 的任意性, 可得

$$u_t = \frac{k}{c\rho} u_{xx} + \frac{2k_1}{c\rho} (u_0 - u).$$

1.8 气体 (或液体) 在多孔介质中扩散, 浓度为 $u(x, y, z, t)$, 满足 Nernst 定律, 即分子运动速度与浓度的梯度成正比、方向相反: $\mathbf{v} = -D\nabla u$, 其中 D 为扩散系数. 设介质的空隙系数为 c . 试导出 u 所满足的微分方程.

解 溶质扩散的质量守恒定律为: $[t_1, t_2]$ 时段内 V 中增加的溶质的质量 m_1 等于 $[t_1, t_2]$ 时间段内通过边界 ∂V 流入 V 的溶质的质量 m_2 . 易知

$$\begin{aligned} m_1 &= \int_V (cu|_{t=t_2} - cu|_{t=t_1}) dx dy dz = \int_V \int_{t_1}^{t_2} (cu)_t dt dx dy dz, \\ m_2 &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial V} D \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_V \nabla \cdot (D\nabla u) dx dy dz dt. \end{aligned}$$

根据 Fubini 交换积分次序定理, $m_1 = m_2$ 及 t_1, t_2, V 的任意性, 可得

$$(cu)_t = \nabla \cdot (D\nabla u).$$

1.9 一均匀圆盘的整个表面都是绝热的. 假设在 $t=0$ 时刻其温度只是 r 的函数, r 为圆盘上的点到圆盘中心的距离. 试导出圆盘上的温度 $u(r, t)$ 所满足的微分方程是

$$u_t = a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right).$$

解 考察圆盘上对应于 $r_1 \leq r \leq r_2$ 的区域 Ω (见图 1.4).

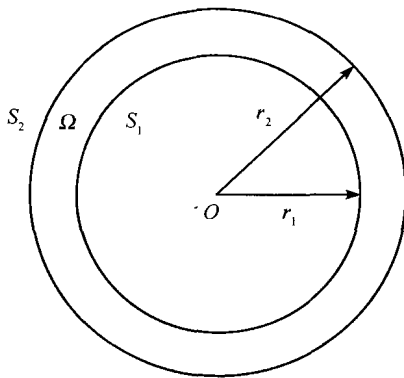


图 1.4

由能量守恒定律知, 在 $[t_1, t_2]$ 时段内 Ω 中增加的热量 Q 等于通过边界 $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$ 流入 Ω 的热量 Q^* . 记圆盘的比热和面密度分别为 c 和 ρ (它们都是常数). 因为 $t=0$ 时刻的温度只是 r 的函数, 所以 $u = u(r, t)$ 只是 r, t 的函数. 于是

$$\begin{aligned} Q &= \int_{\Omega} (c\rho u|_{t=t_2} - c\rho u|_{t=t_1}) dx dy \\ &= c\rho \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} (u|_{t=t_2} - u|_{t=t_1}) r dr d\theta \\ &= 2\pi c\rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{r_1}^{r_2} r u_t dr dt. \end{aligned}$$

记热传导系数为 k , 则热流密度为

$$\mathbf{q} = -k(u_x, u_y) = -k(u_r r_x, u_r r_y) = -k u_r (\cos \theta, \sin \theta) \stackrel{\text{def}}{=} -k u_r \mathbf{n}_0.$$

在边界 S_1 上, 外法向 $\mathbf{n} = -(\cos \theta, \sin \theta) = -\mathbf{n}_0$. 在边界 S_2 上, 外法向 $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta) = \mathbf{n}_0$. 由此得 $[t_1, t_2]$ 时段内通过边界 $\partial\Omega$ 流入 Ω 的热量是

$$Q^* = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} (-\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} k u_r \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n} dS dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{2\pi} (kru_r|_{r=r_2} - kru_r|_{r=r_1}) d\theta dt \\
 &= 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \int_{r_1}^{r_2} k(ru_r)_r dr dt.
 \end{aligned}$$

利用 $Q = Q^*$ 以及 t_1, t_2, r_1, r_2 的任意性, 可得

$$cpru_t = k(ru_r)_r.$$

若记 $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, 上式可以写成

$$u_t = a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right).$$

1.10 均匀细导线, 每单位长的电阻为 R , 通以恒定的电流 I , 导线表面与周围温度为零度的介质进行热交换. 试导出导线上的温度 u 满足的定解问题 (设初始温度和两端温度都是零度).

解 先导出温度 u 所满足的微分方程. 用 l 表示导线的长度, S 表示导线的横截面积, ρ 表示导线密度, L 表示导线横截面周长, c 表示导线比热, R 表示导线单位长度的电阻, I 表示流过导线的电流强度, k 表示导线内部的热传导系数, k_1 表示导线与周围介质的热交换系数, γ 表示导线对电流产生的热量的吸收率.

考察导线在 $[a, b]$ 段及时段 $[t_1, t_2]$ 内热量变化情况. 在 $[t_1, t_2]$ 时段内导线增加的热量是

$$Q = \int_a^b c\rho S (u|_{t=t_2} - u|_{t=t_1}) dx.$$

在 $[t_1, t_2]$ 时段内流入 $[a, b]$ 段的热量包含两部分, 即导线内部的热传导以及与外界热交换所产生的热量:

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} S(ku_x|_{x=b} - ku_x|_{x=a}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b k_1 L(0 - u) dx dt.$$

在 $[t_1, t_2]$ 时段内电流产生的热量被导线吸收的部分为

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \gamma I^2 R dx dt.$$

由能量守恒定律: $Q = Q_1 + Q_2$, 以及 t_1, t_2, a, b 的任意性, 得

$$c\rho S u_t = k S u_{xx} - k_1 L u + \gamma I^2 R.$$

若记 $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, $b = \frac{k_1 L}{c\rho S}$, $u_0 = \frac{\gamma I^2 R}{c\rho S}$, 上式可以写成

$$u_t - a^2 u_{xx} + bu = u_0.$$

再利用初值条件及边界条件, 可得如下定解问题:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + bu = u_0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

1.11 证明两个自变量的二阶线性偏微分方程经过可逆变换后, 它的类型不会改变. 也就是说, 经可逆变换后, $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ 的符号不变.

证明 假设原二阶线性偏微分方程为

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f. \quad (1.4)$$

在可逆的自变量变换

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta), \quad \text{或} \quad \xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$$

之下, (1.4) 式变成

$$a_{11}^* u_{\xi\xi} + 2a_{12}^* u_{\xi\eta} + a_{22}^* u_{\eta\eta} + b_1^* u_\xi + b_2^* u_\eta + c^* u = f^*,$$

并且系数有如下关系

$$a_{11}^* = (\nabla\xi)^T A \nabla\xi, \quad a_{22}^* = (\nabla\eta)^T A \nabla\eta, \quad a_{12}^* = (\nabla\xi)^T A \nabla\eta = (\nabla\eta)^T A \nabla\xi,$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \nabla\xi = (\xi_x, \xi_y)^T, \quad \nabla\eta = (\eta_x, \eta_y)^T.$$

于是

$$A^* \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\nabla\xi)^T A \nabla\xi & (\nabla\xi)^T A \nabla\eta \\ (\nabla\eta)^T A \nabla\xi & (\nabla\eta)^T A \nabla\eta \end{pmatrix} = J A J^T.$$

这里, $J = (\nabla\xi, \nabla\eta)^T$ 是 Jacobi 矩阵. 上式两边取行列式得

$$-\Delta^* = |A^*| = |A| \cdot |J|^2 = -\Delta \cdot |J|^2.$$

因为 $|J|^2 \neq 0$, 故 Δ^* 与 Δ 同号.

1.12 判断下述方程的类型:

$$(1) \quad x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0;$$

$$(2) u_{xx} + (x+y)^2 u_{yy} = 0;$$

$$(3) u_{xx} + xy u_{yy} = 0;$$

$$(4) xu_{xx} + 4u_{yy} = f(x, y).$$

解 (1) $\Delta = x^2 y^2$. 当 $xy = 0$ 时, $\Delta = 0$, 方程为抛物型方程; 当 $xy \neq 0$ 时, $\Delta > 0$, 方程为双曲型方程.

(2) $\Delta = -(x+y)^2$. 当 $x+y = 0$ 时, $\Delta = 0$, 方程为抛物型方程; 当 $x+y \neq 0$ 时, $\Delta < 0$, 方程为椭圆型方程.

(3) $\Delta = -xy$. 当 $xy = 0$ 时, $\Delta = 0$, 方程为抛物型方程; 当 $xy > 0$ 时, $\Delta < 0$, 方程为椭圆型方程; 当 $xy < 0$ 时, $\Delta > 0$, 方程为双曲型方程.

(4) $\Delta = -4x$. 当 $x = 0$ 时, $\Delta = 0$, 方程为抛物型方程; 当 $x > 0$ 时, $\Delta < 0$, 方程为椭圆型方程; 当 $x < 0$ 时, $\Delta > 0$, 方程为双曲型方程.

1.13 将下列方程化为标准形式:

$$(1) u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0;$$

$$(2) u_{xx} + y u_{yy} = 0;$$

$$(3) u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = e^y;$$

$$(4) u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0.$$

解 (1) $\Delta = -1$, 方程为椭圆型方程, 对应的特征方程是

$$(dy)^2 - 4dx dy + 5(dx)^2 = 0.$$

把它分解为两个方程:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \pm i,$$

解得两簇特征线 (积分曲线):

$$y - 2x \pm ix = C_{\pm}.$$

选取变换

$$\xi = y - 2x, \quad \eta = x,$$

可把原方程化简为

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\eta} = 0.$$

(2) $\Delta = -y$. 当 $y = 0$ 时, $\Delta = 0$, 方程为抛物型方程, 标准形式为 $u_{xx} = 0$; 当 $y > 0$ 时, $\Delta < 0$, 方程为椭圆型方程, 对应的特征方程是

$$(dy)^2 + y(dx)^2 = 0.$$

解得两簇特征线:

$$2\sqrt{y} \pm ix = C_{\pm}.$$

选取变换

$$\xi = 2\sqrt{y}, \quad \eta = x,$$

可把原方程化简为

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\xi}u_{\xi} = 0.$$

当 $y < 0$ 时, $\Delta > 0$, 方程为双曲型方程, 对应的特征方程是

$$(\mathrm{d}y)^2 + y(\mathrm{d}x)^2 = 0.$$

解得两簇特征线:

$$-2\sqrt{-y} \pm x = C_{\pm}.$$

选取变换

$$\xi = x - 2\sqrt{-y}, \quad \eta = x + 2\sqrt{-y},$$

可把原方程化简为

$$u_{\xi\eta} = -\frac{1}{2(\xi - \eta)}(u_{\xi} - u_{\eta}).$$

(3) $\Delta = 0$, 方程为抛物型方程, 对应的特征方程是

$$(\mathrm{d}y)^2 + 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 4(\mathrm{d}x)^2 = 0.$$

解得一簇积分曲线:

$$y + 2x = C.$$

选取变换

$$\xi = y + 2x, \quad \eta = y,$$

可把原方程化简为

$$4u_{\eta\eta} = e^{\eta}.$$

(4) $\Delta = -\frac{3}{4}$, 方程为椭圆型方程, 对应的特征方程是

$$(\mathrm{d}y)^2 - \mathrm{d}x\mathrm{d}y + (\mathrm{d}x)^2 = 0.$$

解得两簇积分曲线:

$$y - \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)x = C_{\pm}.$$

选取变换

$$\xi = x - 2y, \quad \eta = x,$$