山东省强化建设重点学科
“聊城大学课程与教学论”基金项目

现代数学课程研究

宋宝和　主编
房元霞　副主编

现代数学课程的学科基础

房元霞　于兴江　宗培磊　著

山东大学出版社

责任编辑
孙秀英

封面设计
午云

ISBN 7-5607-3244-5

9 787560 732442 >

定价(全三册)：48.00元

山东省强化建设重点学科
“聊城大学课程与教学论”基金项目

现代数学课程研究

宋宝和　主编
房元霞　副主编

现代数学课程的学科基础

房元霞　于兴江　宗培磊　著

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

现代数学课程的学科基础/宋宝和主编．—济南：
山东大学出版社，2006.8
（现代数学课程研究）
ISBN 7-5607-3244-5

Ⅰ．现...
Ⅱ．宋...
Ⅲ．数学教学-教学研究-高等学校
Ⅳ．01-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 099270 号

山东大学出版社出版发行
（山东省济南市山大南路 27 号　邮政编码：250100）
山 东 省 新 华 书 店 经 销
济南景升印业有限公司印刷
850×1168 毫米　1/32　21 印张　528 千字
2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷
定价（全三册）：48.00 元

主编简介

宋宝和，博士，聊城大学教授、研究生导师，山东省新课程高考改革研究项目“语文、数学、外语”课题组组长，山东省强化重点建设学科“数学课程与教学论方向”学科带头人，全国合作教学研究中心副主任，《数学教育学报》编委，教育部山东师范大学教育课程研究中心兼职研究员，长期从事数学及数学教育研究，主持多项国家及省级研究课题，已出版专著四部、教材一部，在《课程 教材 教法》、《中国教育学刊》、《数学教育学报》等学术期刊发表论文40余篇。

目　录

第一章

开关电路与布尔代数

高度的抽象性及其带来的符号化、形式化是数学的基本特征之一。不同的实际问题经抽象、概括后，可以得到相同的数学概念、运算法则，乃至同一数学理论。反之，同一数学概念、运算法则和数学理论可应用到表面看来完全不同的实际问题中。

布尔代数最初是作为对逻辑思维法则的研究出现的。英国哲学家布尔（George Boole，1815～1864）于 1847 年的论文《逻辑的数学分析》及《思维法则的研究》中引入了布尔代数。20 世纪 30 年代，信息论科学的创始人美国的申农（C. E. Shannon，1916～2001）发表了《继电器和开关电路的符号分析》一文，为布尔代数在工艺技术中的应用开创了道路。20 世纪 50 年代苏联科学家把布尔代数发展成为接点网络实用中的通用理论，又使布尔代数又成了计算机科学重要的基础理论。

从逻辑上讲，布尔代数是一个命题演算系统。

从抽象代数的观点讲，布尔代数是一个代数系统。

从集合的观点讲，它是一个集合代数。

从工程技术的观点讲，布尔代数是电路代数，数字电路的设计离不开它。

你可能了解数理逻辑、集合论和抽象代数的有关知识(不了解的读者不妨从第二节开始阅读),所以在本章中,我们不再重复这些内容,而是先回顾布尔代数的抽象定义,再结合开关电路来体会布尔先生创造的这种崭新的代数系统,把逻辑思维的规律,归结为代数演算的过程,并初步认识布尔代数在数字电路设计中的应用价值。

第一节　布尔代数的一般理论

设$(S,\leqslant)$是偏序集,如果$\forall a,b\in S$,$\{a,b\}$都有最小上界和最大下界,则称S关于偏序关系$\leqslant$作成一个格。

由于最小上界和最大下界的唯一性,可以把求$\{a,b\}$的最小上界和最大下界看成a与b的二元运算"$\wedge$"与"$\vee$",即$a\vee b$和$a\wedge b$分别表示a与b的最小上界和最大下界。这里出现的$\vee$与$\wedge$不再代表逻辑上的析取与合取运算,而是格中的运算符。

偏序集$(P(A),\subseteq)$是格。因为$\forall x,y\in P(A)$,$x\vee y$就是$x\cup y$,$x\wedge y$就是$x\cap y$。由于$\cup$和$\cap$运算在$P(A)$上是封闭的,所以$x\cup y,x\cap y\in P(A)$。我们称$(P(A),\subseteq)$为A的幂集格。偏序集$(Z,\leqslant)$也是格。因为$\forall a,b\in Z$,$a\vee b=\max\{a,b\}$,$a\wedge b=\min\{a,b\}$,它们都是整数。这样$\vee$与$\wedge$分别是偏序集$(Z,\leqslant)$上的"取大"和"取小"运算。任一全序集都是格。这是因为如果a与b是全序集的两个元素,我们有$a\leqslant b$或$b\leqslant a$,在前一种情况下,$a\vee b=b$,$a\wedge b=a$,而在后一种情况下,$a\vee b=a$,$a\wedge b=b$。

在一个偏序集中,如果它的每一个子集(有限集或无限集)都有一个最小上界和最大下界,就称这种格为完全格。对于任一完全格L,L本身作为一个子集它的最小上界就是整个格的最大元素,L的最大下界就是整个格的最小元素,分别记为1和0。这样在一个完全格中,对于任一元素a,有$0\leqslant a$和$a\leqslant 1$。

A 的幂集格 $P(A)$ 是一个完全格，格中的最大元素为 $1=A$（全集），最小元素为 $0=\varnothing$（空集）。集合 $B=\{1,2,3,6\}$，取偏序关系为整除关系，这时 $a\vee b=[a,b]$（a 与 b 的最小公倍数），$a\wedge b=(a,b)$（a 与 b 的最大公约数）。显而易见 B 是一个完全格，最大元是 6，最小元是 1。

在一个格 L 中，$a\wedge b$ 与 $a\vee b$ 可视为格上的两种运算，可以证明这两种运算适合交换律、结合律、幂等律和吸收律，这样格就是具有两个二元运算的代数系统 $(L,\wedge,\vee)$。

一般说来，格中运算 $\vee$ 与 $\wedge$ 不一定满足分配律，满足分配律的格成为分配格。

设 $(L,\vee,\wedge)$ 是格，若 $\forall a,b,c\in L$，有

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

则称 L 为分配格。

前述两个完全格都是分配格。

具有最大元素与最小元素的格称为有界格。在有界格中同一律和零律成立。

在一个有界格 L 中，如果对于 L 的元素 a，存在元素 $\overline{a}\in L$，使得 $a\vee\overline{a}=1$，同时 $a\wedge\overline{a}=0$，就称 $\overline{a}$ 为 a 的补元（余元）。如果 L 中的每一个元素都有补元，就称 L 为有补格。

定理 1　设 $(L,\wedge,\vee,0,1)$ 是有界分配格。若 $a\in L$，且对于 a 存在补元 b，则 b 是 a 的唯一补元。

证明　假设 $c\in L$ 也是 a 的补元，则有

$$a\vee c=1,\quad a\wedge c=0$$

又知 b 是 a 的补元，故

$$a\vee b=1,\quad a\wedge b=0$$

从而得到

$$a\vee c=a\vee b,\quad a\wedge c=a\wedge b$$

由于 L 是分配格

$$\begin{aligned} c &= c\vee(a\wedge c)=c\vee(a\wedge b)=(c\vee a)\wedge(c\vee b) \\ &=(b\vee a)\wedge(c\vee b)=(b\vee a)\wedge(b\vee c) \\ &=b\vee(a\wedge c)=b\vee(a\wedge b)=b \end{aligned}$$

定义 1 一个有补、分配格称为一个布尔代数。

布尔代数的一个重要的例子就是 A 的幂集 $P(A)$ 所成的格，我们称其为集合代数。在布尔代数中，每个元素都存在着唯一的补元，可以把求补元的运算看作是布尔代数中的一元运算。从而可以把一个布尔代数标记为 $(B,\wedge,\vee,-,0,1)$，其中"$-$"为求补运算。由此可以看出，下文我们所说的布尔代数，实际上仅是一个除空集外最简单的布尔代数。

定理 2 设 $(B,\wedge,\vee,-,0,1)$ 是布尔代数，则

(1)双重否定律 $\forall a\in B,\ \bar{\bar{a}}=a$

(2)德摩根律 $\forall a,b\in B,\ \overline{a\wedge b}=\bar{a}\vee\bar{b},\overline{a\vee b}=\bar{a}\wedge\bar{b}$

证明 (1)$\bar{a}$ 是 a 的补元，a 也是 $\bar{a}$ 的补元，由补元的唯一性得 $\overline{(\bar{a})}=\bar{\bar{a}}=a$。

(2)对于 $\forall a,b\in B$ 有

$$\begin{aligned} (a\wedge b)\vee(\bar{a}\vee\bar{b}) &= (a\vee\bar{a}\vee\bar{b})\wedge(b\vee\bar{a}\vee\bar{b}) \\ &=(1\vee\bar{b})\wedge(\bar{a}\vee 1)=1\wedge 1=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a\wedge b)\wedge(\bar{a}\vee\bar{b}) &= (a\wedge b\wedge\bar{a})\vee(a\wedge b\wedge\bar{b}) \\ &=(0\wedge b)\vee(a\wedge 0)=0\vee 0=0 \end{aligned}$$

所以 $\bar{a}\vee\bar{b}$ 是 $a\wedge b$ 的补元，根据补元的唯一性有 $\overline{a\wedge b}=\bar{a}\vee\bar{b}$。同理可证 $\overline{a\vee b}=\bar{a}\wedge\bar{b}$。

当我们验证一个代数系统是布尔代数时，根据定义，必须验证交换律、结合律、吸收律、分配律成立，还必须验证每个元素都存在补元，实际上可以简单一些。

定义 2 设 $(B,*,\circ)$ 是代数系统，$*$ 和 $\circ$ 是二元运算。若 $*$ 和 $\circ$ 满足：

(1)交换律,即 $\forall a,b\in B$ 有

$$a*b=b*a,\quad a\circ b=b\circ a$$

(2)分配律,即 $\forall a,b,c\in B$ 有

$$a*(b\circ c)=(a*b)\circ(a*c),\quad a\circ(b*c)=(a\circ b)*(a\circ c)$$

(3)同一律,即存在 $0,1\in B$,使得 $\forall a\in B$ 有

$$a*1=a\quad a\circ 0=a$$

(4)互补律(矛盾律和排中律),即 $\forall a\in B$,存在 $\overline{a}\in B$ 使得

$$a*\overline{a}=0,\quad a\circ\overline{a}=1$$

则称$(B,*,\circ)$是一个布尔代数。

以上定义中的同一律是说 1 是 $*$ 运算的单位元,0 是 $\circ$ 运算的单位元,可以证明 1 和 0 分别也是 $\circ$ 和 $*$ 运算的零元。为了证明$(B,*,\circ)$是布尔代数,只须证明它是一个格,即证明 $*$ 和 $\circ$ 运算满足结合律和吸收律,我们在此略去证明,有兴趣的读者可以作为练习。

第二节　开关电路与布尔代数

我们以开关电路为背景引出布尔代数。

电子数字计算机、电子交换机等数字系统虽然十分复杂,但是它们主要都是用开关元件构成的。所谓开关元件,指的是这类元件本身具有或者表现出两种截然不同的状态。例如,一般的电键或开关具有闭合与断开两种状态;电磁继电器有动作或释放两种状态;晶体二极管或三极管的截止及导通;晶体管电路输出电位的高低;脉冲电路输出脉冲的有无,等等。

用开关元件构成的电路叫做开关电路,而用电子开关元件构成的电路则通常称为数字电路(这里仅研究数字电路的逻辑功能方面)。

由于开关元件具有相同的共性,所以我们仅以开关控制的电路为例说明。每一开关有两种状态:通和不通;每一电路也有两种

状态:通和不通。我们用小写英文字母表示开关,大写英文字母表示电路。图 1-2-1 是由一个开关控制的电路,图 1-2-2 表示开关 a 和开关 b 串联得到的电路,只有当两个开关同时闭合时,指示灯才会亮;图 1-2-3 表示开关 a 和开关 b 并联得到的电路,只要任何一个开关闭合,指示灯都会亮;而在图 1-2-4 中,开关断开时灯亮,开关闭合时灯反而不亮。

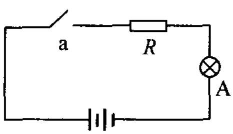

图 1-2-1

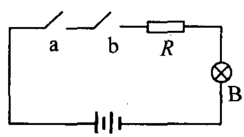

图 1-2-2

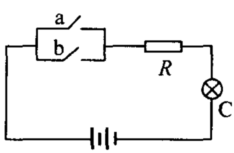

图 1-2-3

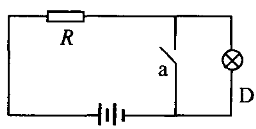

图 1-2-4

一般地,对任意电路 A,B 也可经过串联、并联或反演得到新的电路,它们顺序记作“A 串联 B”、“A 并联 B”、“A 的反演”。A,B 原来的状态与新的电路的状态之间的关系如表 1-2-1～1-2-3 所示。

表 1-2-1

电路 A	电路 B	A 串联 B
不通	不通	不通
不通	通	不通
通	不通	不通
通	通	通

表 1-2-2

电路 A	电路 B	A 串联 B
不通	不通	不通
不通	通	通
通	不通	通
通	通	通

表 1-2-3

电路 A	A 的反演
不通	通
通	不通

我们已经习惯于数学的符号化方法。只要把上面各表中的状态“通”、“不通”用简单符号表示，就能大大简化。我们用数字“1”表示“通”，用数字“0”表示“不通”。在其他开关元件中用“1”表示电位信号中的高电位，脉冲信号中的有脉冲，或继电器电路中的继电器开关或接点的动作状态；反之，用“0”表示低电位，无脉冲信号或者继电器开关或接点的静止状态。当然在这里“1”与“0”已失去原来的数字意义，只是代表两种截然不同的电路的状态或命题的真值。再进一步符号化，而用“·”表示“串联”，“+”表示“并联”，用“－”表示“反演”，这样“A·B”就是“A 串联 B”，“A+B”就是“A 并联 B”，“$\overline{A}$”就是“A 的反演”，这些关系可用表 1-2-4～1-2-6 表示。

表 1-2-4

A	B	A·B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表 1-2-5

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

表 1-2-6

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

现在来看看，经过符号化后，我们得到了什么。

(1)一个集合 $B=\{0,1\}$ 和在集合 B 上规定的三种运算，分别记作"·"(乘)，"+"(加)，"—"(补或非)如下：

"·"：$0\cdot 0=0$　　"+"：$0+0=0$　　"—"：$\overline{0}=1$

$0\cdot 1=0$　　$0+1=1$　　$\overline{1}=0$

$1\cdot 0=0$　　$1+0=1$

$1\cdot 1=1$　　$1+1=1$

三种运算的顺序是先"－",后"·"和"＋","·"可省略不写,有括号的先算括号里面的。不难证明,$\{B=\{0,1\};\cdot,+,1\}$为一个布尔代数。

(2)任何电路可以表示成一个布尔代数式。例如,电路图 1-2-5 可表示成:$((a\cdot b)+(c\cdot d))\cdot\bar{e}$。欲知电路的效应,例如当 $a=1,b=0,c=1,d=1,e=0$ 时,按照前面提供的规则进行计算得:

$$((1\cdot 0)+(1\cdot 1))\cdot\bar{0}=(0+1)\cdot 1=1\cdot 1=1$$

即此时的状态是"通"。

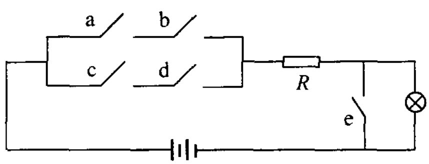

图 1-2-5

当然,每一个类似上面这样有一些小写字母(表示开关)经"＋","·","－"运算及适当的括号连接起来的布尔代数式也给出一个电路来。

在本节最后,我们提出下面一个具体问题:设计一个三人表决的电路,当多数人赞同时,表决通过。即实现表 1-2-7 效应的电路。

表 1-2-7

a	b	c	$f(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1

1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

事实上，这个电路所要求效应，就不是前述简单的电键开关电路所容易实现的，还需要我们展开对布尔代数的进一步讨论。

第三节 布尔代数的运算法则、布尔函数和基本定理

一、布尔代数的运算法则

设 a,b,c 为布尔代数中的任意变量。

(1)双重否定律 $\bar{\bar{a}}=a$

(2)幂等律 $a\cdot a=a,\ a+a=a$

(3)交换律 $a\cdot b=b\cdot a,\ a+b=b+a$

(4)结合律 $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c),\ (a+b)+c=a+(b+c)$

(5)分配律 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,\ a+b\cdot c=(a+b)\cdot(a+c)$

(6)德摩根律 $\overline{a\cdot b}=\bar{a}+\bar{b},\ \overline{a+b}=\bar{a}\cdot\bar{b}$

(7)吸收律 $a\cdot(a+b)=a,\ a+a\cdot b=a$

(8)零律 $a\cdot 0=0,\ a+1=1$

(9)同一律 $a\cdot 1=a,\ a+0=a$

(10)排中律 $a+\bar{a}=1$

(11)矛盾律 $a\cdot\bar{a}=0$

这些定律你可能比较熟悉，因为它们在集合论、概率论、命题逻辑中都成立。把布尔代数与开关电路相联系，物理也会给出我们一些启示。例如，设 a 表示开关 a，两个开关 a 串联和由一个开关 a 组成的电路是等效的，所以 $a\cdot a=a$ 在布尔代数 B 中也应该