



全国高校网络教育公共基础课统一考试用书

# 高等数学

## (2007年修订版)

全国高校网络教育考试委员会办公室 组编



科学出版社

www.sciencep.com

---

全国高校网络教育公共基础课统一考试用书

---

# 高等数学

(2007年修订版)

全国高校网络教育考试委员会办公室 组编

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书是全国高校网络教育考试委员会办公室组织编写的现代远程教育全国统一考试用书。使用对象为教育部批准的现代远程教育试点高校网络教育学院和中央广播电视大学“人才培养模式改革和开放教育试点”项目中自2004年3月1日(含3月1日)以后入学的本科层次学历教育的学生。

本考试用书依据全国网络教育统考《高等数学》考试大纲(2007年版)的要求而编写,基本知识的深度、广度依考试大纲而选定,基本例题依考试的难度与题型而编写。书末附有考试大纲、题型示例和样卷。

高等数学(A)考试大纲适用于数学类专业的本科学生;高等数学(B)考试大纲适用于理工类专业(除数学类专业外),财经类专业及其他非文、史、法、医、教育、艺术类专业的本科学生。

### 图书在版编目(CIP)数据

高等数学/全国高校网络教育考试委员会办公室组编。一修订本。—北京:科学出版社,2007

(全国高校网络教育公共基础课统一考试用书)

ISBN 978-7-03-018883-0

I. 高… II. 全… III. 高等数学-高等学校:网络教育-教材 IV. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第095488号

责任编辑:赵 靖 李晓鹏 / 责任校对:鲁 素  
责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2005年3月第一版 开本:787×960 1/16

2007年7月修订版 印张:14

2007年7月第六次印刷 字数:276 000

印数:30 001—36 000

定价:25.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换<路通>)

## 出版说明

自1999年现代远程教育试点工作开展以来,我国网络教育蓬勃发展,试点规模不断扩大,取得了可喜的经验和成果,但在发展中也存在着一些问题,为进一步加强网络教育的规范管理,提高网络教育的社会声誉,确保网络教育人才培养的质量,促进网络教育健康、有序地发展,教育部决定对现代远程教育试点高校网络教育学生的部分公共课实行全国统一考试。

试点高校网络教育学生的部分公共课全国统一考试工作在教育部领导下,由全国高校网络教育考试委员会具体组织与实施。

考试对象为现代远程教育试点普通高校的本科层次网络学历教育的学生和中央广播电视大学“人才培养模式改革与开放教育试点”项目的本科层次学历教育的学生。2004年3月1日以后(含3月1日)入学注册的学生的统考合格成绩作为教育部高等教育学历证书电子注册资格的条件之一。

统考工作按照网络教育应用型人才的培养目标,针对从业人员继续教育的特点,重在检验学生掌握基础知识的水平及应用能力。

统考实行全国统一大纲、统一试题、统一标准。

统考科目按不同学历起点和不同专业类别确定:

一、高中起点本科学生的统考科目是:

(一)理工类专业统考科目包括:“大学英语(B)”、“计算机应用基础”、“高等数学(B)”(数学专业考“高等数学(A)”);

(二)文史法医教育类专业统考科目包括:“大学英语(B)”、“计算机应用基础”、“大学语文(B)”(文史类专业考“大学语文(A)”);

(三)英语类专业统考科目包括:“大学英语(A)”、“计算机应用基础”、“大学语文(B)”;

(四)艺术类专业统考科目包括:“大学英语(C)”、“计算机应用基础”、“大学语文(B)”;

(五)其他专业统考科目包括:“大学英语(B)”、“计算机应用基础”,由试点学校在“高等数学(B)”和“大学语文(B)”中再任选一门进行统考。

二、专科起点本科学生的统考科目是：

(一) 英语类专业统考科目包括：“大学英语(A)”、“计算机应用基础”；

(二) 艺术类专业统考科目包括：“大学英语(C)”、“计算机应用基础”；

(三) 其他专业统考科目包括：“大学英语(B)”、“计算机应用基础”。

专科起点本科教育入学考试科目中没有“大学语文”或“高等数学”成绩的，按不同专业须加试统考科目“大学语文(B)”或“高等数学(B)”，考试科目的选择同高中起点本科学生的专业分类。

2005年全国高校网络教育部分公共基础课全国统一考试试点工作实施以来，依据全国高校网络教育考试委员会制定的统考考试大纲，成功开展了各次考试。根据统考试点工作经验，为更好地适应网络教育发展的需要，更贴近成人业余学习特点，全国高校网络教育考试委员会对统考课程考试大纲进行了修订。本套教材是根据全国高校网络教育考试委员会制订的2007年修订版统考课程大纲编写的考试辅导用书。内容涵盖了课程考试大纲中规定的各个部分。试点高校网络教育公共课全国统一考试是提高网络教育办学质量和社会声誉的一项重要举措，各有关单位务必要高度重视，做好统考的舆论宣传工作和各项组织工作，保证统考工作的顺利进行。

全国高校网络教育考试委员会办公室

二〇〇七年七月

## 修订版前言

教育部批准的现代远程教育试点高校网络教育学院和中央广播电视大学“人才培养模式改革和开放教育试点”项目中自2004年3月1日(含3月1日)以后入学的本科层次学历教育的学生,应参加网络教育的部分公共基础课全国统一考试。

全国统一考试,遵循网络教育应用型人才的培养目标,针对从业人员继续教育的特点,重在检查学生掌握基础知识的水平及应用能力,以全面提高现代远程高等学历教育的教学质量。

高等数学课程是现代远程教育试点高校网络教育实行全国统一考试的4门公共基础课之一。考试定位于基础水平检测性考试,水平线定在考试合格者应达到与成人高等教育本科相应高等数学课程要求的基本水平。考试的目标是考查学生的高等数学的基本概念、基本理论、基本方法和常用的技能,并以此检测学生分析问题、解决问题的能力。

这本辅导教材是为了帮助学生复习、备考而编写的,因此称之为考试辅导教材。本书严格按照考试大纲的要求编写。基本知识的选取深度、广度依考试大纲而确定,基本例题的选取依考试题目的难度与题型而确定。

考试大纲分高等数学(A),高等数学(B)两类。高等数学(A)大纲适用于数学类专业的本科学生;高等数学(B)大纲适用于理工类专业(除数学类专业外),财经类专业及其他非文、史、法、医、教育、艺术类专业本科学生。

2007年的新版考试大纲与2004年的考试大纲相比有较大的变化。尤其是高等数学(B),在考试内容方面,去掉了“多元函数微积分”的全部内容,“函数”部分中“隐函数”的内容,“连续”部分中“反函数的连续性”的内容等。在试卷结构与题型方面也作了较大的调整。

请注意:本辅导教材中注\*的部分仅高等数学(A)大纲要求,注\*\*的部分仅高等数学(B)大纲要求,未作标注部分,为高等数学(A)与高等数学(B)大纲共同要求的内容。

本书编写组  
二〇〇七年七月

## 前 言

教育部批准的现代远程教育试点高校网络教育学院和中央广播电视大学“人才培养模式改革和开放教育试点”的学校,自 2004 年 3 月 1 日(含 3 月 1 日)以后入学的本科学历教育的学生,都应参加网络教育的部分公共基础课全国统一考试。

全国统一考试,旨在遵循网络教育应用型人才的培养目标,针对从业人员继续教育的特点,重在检查学生掌握基础知识的水平及应用能力,全面提高现代远程高等学历教育的教学质量。

高等数学课程是现代远程教育试点高校网络教育实行全国统一考试的公共基础课之一。考试定位于基础水平检测性考试,水平线定在考试合格者应达到与成人高等教育本科相应高等数学课程要求的水平。考试的目标是考查学生的高等数学的基本概念、基本理论、基本方法和常用的技能,并以此检测学生分析问题、解决问题的能力。

这本辅导教材是为了帮助考生复习、备考而编写,因此称之为考试辅导教材。本书依照考试大纲的要求而编写。基本知识的选取深、广度依考试大纲而确定,基本例题的选取依考试题目的难度与题型而确定。

考试大纲分高等数学 A,高等数学 B 两类。高等数学 A 大纲适用于数学类的高中起点本科生。高等数学 B 大纲适用于除数学类以外的其他理工类专业的高中起点本科学生及非文、史、法、医、教育、艺术类的高中起点本科学生。

请考生注意:本辅导教材中注 \* 的部分仅高等数学 A 大纲要求,本辅导教材中注 \* \* 的部分仅高等数学 B 大纲要求。

本书编写组

二〇〇四年十二月

# 目 录

第 1 章 函数、极限、连续	1
1.1 函数	1
一、考试内容	1
二、考试要求	1
三、基本知识	1
四、例题分析	2
练习题 1.1	5
练习题 1.1 参考解答	6
1.2 极限	7
一、考试内容	7
二、考试要求	7
三、基本知识	7
四、例题分析	9
练习题 1.2	13
练习题 1.2 参考解答	15
1.3 连续	18
一、考试内容	18
二、考试要求	18
三、基本知识	18
四、例题分析	19
练习题 1.3	23
练习题 1.3 参考解答	24
第 2 章 一元函数微分学	26
2.1 导数与微分	26
一、考试内容	26
二、考试要求	26
三、基本知识	26
四、例题分析	30
练习题 2.1	37
练习题 2.1 参考解答	39



* 2.2 微分中值定理 .....	44
一、考试内容 .....	44
二、考试要求 .....	44
三、基本知识 .....	44
四、例题分析 .....	44
练习题 2.2 .....	46
练习题 2.2 参考解答 .....	46
2.3 导数的应用 .....	47
一、考试内容 .....	47
二、考试要求 .....	47
三、基本知识 .....	48
四、例题分析 .....	49
练习题 2.3 .....	54
练习题 2.3 参考解答 .....	56
<b>第 3 章 一元函数积分学 .....</b>	<b>59</b>
3.1 不定积分 .....	59
一、考试内容 .....	59
二、考试要求 .....	59
三、基本知识 .....	59
四、例题分析 .....	62
练习题 3.1 .....	71
练习题 3.1 参考解答 .....	73
3.2 定积分 .....	77
一、考试内容 .....	77
二、考试要求 .....	77
三、基本知识 .....	78
四、例题分析 .....	81
练习题 3.2 .....	88
练习题 3.2 参考解答 .....	91
<b>** 第 4 章 常微分方程 .....</b>	<b>97</b>
一、考试内容 .....	97
二、考试要求 .....	97
三、基本知识 .....	97
四、例题分析 .....	98
练习题 4.1 .....	107

练习题 4.1 参考解答	108
* 第 5 章 多元函数微积分	117
5.1 多元函数微分学	117
一、考试内容	117
二、考试要求	117
三、基本知识	117
四、例题分析	124
练习题 5.1	133
练习题 5.1 参考解答	137
5.2 二重积分	143
一、考试内容	143
二、考试要求	143
三、基本知识	144
四、例题分析	146
练习题 5.2	154
练习题 5.2 参考解答	157
* 第 6 章 无穷级数	165
6.1 数项级数	165
一、考试内容	165
二、考试要求	165
三、基本知识	165
四、例题分析	166
练习题 6.1	170
练习题 6.1 参考解答	171
6.2 幂级数	174
一、考试内容	174
二、考试要求	174
三、基本知识	174
四、例题分析	177
练习题 6.2	182
练习题 6.2 参考解答	184
附录 《高等数学》考试大纲	190
高等数学(A)考试大纲(2007 年版)	190
高等数学(B)考试大纲(2007 年版)	200

# 第1章 函数、极限、连续

## 1.1 函 数

### 一、考试内容

函数的定义,函数的表示,分段函数,反函数,复合函数,\* 隐函数和由参数方程所确定的函数,函数的性质(有界性、奇偶性、周期性、单调性),基本初等函数,初等函数.

### 二、考试要求

1. 理解函数的概念,了解函数的表示法,会求函数的定义域.
2. 了解函数的有界性、奇偶性、周期性和单调性.
3. 了解分段函数、反函数、复合函数、\* 隐函数和由参数方程所确定的函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质和图像,了解初等函数的概念.

### 三、基本知识

#### 1. 函数的定义

对于变量  $x$  和  $y$  来说,如果对于  $x$  所考虑范围内的每一个值,  $y$  按照一定规则对应着一个确定的值,则称  $y$  是  $x$  的函数,记作  $y=f(x)$ . 相应地,变量  $x$  被称为自变量,变量  $y$  被称为因变量.

#### 2. 定义域

对于自变量  $x$  变化范围内的每一个值  $x_0$ , 函数  $y$  有一个确定的值  $y_0$  与之对应,我们称函数  $y$  在点  $x_0$  处是有定义的,使函数有定义的点的全体(也就是自变量  $x$  的变化范围)被称为函数的定义域.

#### 3. 反函数

设函数  $y=f(x)$ , 当自变量  $x$  在一个点集  $D_f$  内变化时, 变量  $y$  在点集  $R_f$  内变化. 如果对于变量  $y$  在  $R_f$  内任取一个值  $y_0$ , 自变量  $x$  在  $D_f$  内有一个确定的值  $x_0$ , 使得  $y_0=f(x_0)$ , 则变量  $x$  是变量  $y$  的函数, 用  $x=\varphi(y)$  表示. 通常称函数  $y=\varphi(x)$  为函数  $y=f(x)$  的反函数.

#### 4. 复合函数

两个函数的所谓复合, 实际上就是中间变量介入到从自变量到因变量的变化过程. 设有

如下两个函数  $f: y=f(u), u \in D_f, g: u=g(x), x \in D_g$ .

若有  $R_g \subset D_f$ , 这样就可以得到复合函数  $y=f(g(x)), x \in D_g$ .

由复合函数的定义可知, 函数  $f$  和  $g$  能否构成复合函数  $y=f(g(x))$ , 关键在于第二个函数的值域  $R_g$  是否包含在第一个函数的定义域  $D_f$  中, 故有时候复合函数的定义域要相对小一些.

#### 5. 有界性

若存在两个数  $A$  和  $B$ , 对一切  $x \in D_f$  恒有  $A \leq f(x) \leq B$ , 则称函数  $y=f(x)$  在  $D_f$  内是有界函数, 否则就称为无界函数.

#### 6. 奇偶性

设函数  $y=f(x), x \in (-a, a)$ , 那么:

(1) 若对任何  $x \in (-a, a)$ , 恒有  $f(-x) = -f(x)$ , 则称函数  $y=f(x)$  为  $(-a, a)$  内的奇函数.

(2) 若对任何  $x \in (-a, a)$ , 恒有  $f(-x) = f(x)$ , 则称函数  $y=f(x)$  为  $(-a, a)$  内的偶函数.

#### 7. 周期性

设函数  $y=f(x), x \in (-\infty, +\infty)$ , 若存在  $\omega \neq 0$ , 对一切  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 恒有  $f(x+\omega) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  为周期函数,  $\omega$  为  $f(x)$  的一个周期.

#### 8. 单调性

设函数  $y=f(x), x \in D_f$ , 若对任意两点  $x_1, x_2 \in D_f$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , 则称函数  $f(x)$  在  $D_f$  内单调增加; 反之, 若对任意两点  $x_1, x_2 \in D_f$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , 则称函数  $f(x)$  在  $D_f$  内单调减少.

#### 9. 基本初等函数

基本初等函数是指: 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

#### 10. 初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和复合运算而得到的能用一个解析表达式表示的函数称之为初等函数.

### 四、例题分析

(一) 是非题 针对每小题的表述, 给出正确与否的判断.

例 1 函数  $f(x) = \cos x, g(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$  表示同一个函数.

分析 如果两个函数的定义域相同, 并且所对应的规律相同, 则两个函数相同.

函数  $f(x) = \cos x$  与  $g(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$  的定义域均为  $(-\infty, +\infty)$ , 但它们的对应规则不同,  $g(x) = |\cos x|$ , 故  $f(x)$  与  $g(x)$  是不同的函数.

结论:错

例2 函数  $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$  的定义域是  $x \neq 0$ .

分析 函数  $f(x)$  的分母  $1+x^2 \neq 0$ , 故  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ .

结论:错

例3 函数  $y = 1+x^3$  的反函数是  $y = \sqrt[3]{x-1}$ .

分析 由于  $y = 1+x^3$ , 则  $x^3 = y-1$ ,  $x = \sqrt[3]{y-1}$ . 所以  $y = \sqrt[3]{x-1}$  为所求函数的反函数.

结论:错

例4 函数  $f(x) = \sin|x|$  是有界函数.

分析 若存在两个数  $A$  和  $B$ , 对一切  $x \in D_f$  恒有  $A \leq f(x) \leq B$ , 则称函数  $y = f(x)$  在  $D_f$  内是有界函数.

函数  $|f(x)| = |\sin|x|| \leq 1$ , 则  $-1 \leq f(x) \leq 1$ , 故  $f(x)$  是有界函数.

结论:对

例5 函数  $f(x) = \sin x + x$  是奇函数.

分析 如果函数  $f(x)$  满足  $f(-x) = -f(x)$ , 则函数  $f(x)$  是奇函数.

函数  $f(x) = \sin x + x$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 且  $f(-x) = \sin(-x) - x = -\sin x - x = -(\sin x + x) = -f(x)$ , 故函数  $f(x) = \sin x + x$  是奇函数.

结论:对

例6 函数  $f(x) = x^2 + \sin x$  是周期函数.

分析 若存在  $\omega \neq 0$ , 对一切  $x \in D_f$ , 恒有  $f(x+\omega) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  为周期函数,  $\omega$  为  $f(x)$  的一个周期.

函数  $\sin x$  是周期函数, 但是  $x^2$  不是周期函数, 故  $f(x)$  不是周期函数.

结论:错

(二) 选择题 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 选出符合题目要求的选项.

例7 函数  $f(x) = \frac{1}{|x-5|}$  的定义域是( ).

A.  $(-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$

B.  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

C.  $(-\infty, 6) \cup (6, +\infty)$

D.  $(-\infty, +\infty)$

分析 分母  $|x-5| \neq 0$ , 因此  $x \neq 5$ . 故知  $f(x)$  的定义域是 A.

例8 函数  $y = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$  的定义域是( ).

A.  $(-1, +\infty)$

B.  $[-1, +\infty)$

C.  $(1, +\infty)$

D.  $[1, +\infty)$

分析 由于对数的真数 $(x+1)>0$ ,并且开平方根的表达式 $x-1\geq 0$ 且 $x-1\neq 0$ ,于是,可得 $\begin{cases} x+1>0, \\ x-1>0, \end{cases}$ 解得 $x>1$ . 故选 C.

例 9 设  $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<-1, \\ x^2-1, & x\geq -1, \end{cases}$  则  $f(0)=$  ( ).

- A. -1                      B. 0                      C. 1                      D. 2

分析 因为  $0>-1$ , 当  $x\geq -1$  时,  $f(x)=x^2-1$ . 因此  $f(0)=-1$ , 故选 A.

例 10 设  $f(x-a)=x(x-a)$  ( $a$  为大于零的常数), 则  $f(x)=$  ( ).

- A.  $x(x-a)$               B.  $x(x+a)$               C.  $(x-a)(x+a)$               D.  $(x-a)^2$

分析 设  $x-a=t$ , 则  $x=t+a$ , 因此, 将它分别代入  $f(x-a)=x(x-a)$  的左右两边, 可以得到

$$f(t) = f(x-a) = (t+a)t,$$

因此

$$f(x) = x(x+a).$$

故选 B.

例 11 函数  $f(x)=\cos \frac{1}{x}$  是定义域内的 ( ).

- A. 周期函数              B. 单调函数              C. 有界函数              D. 无界函数

分析 由于  $\left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1$ , 故选 C.

例 12 函数  $y=\lg(\sqrt{1+x^2}+x)$  是 ( ).

- A. 偶函数                      B. 奇函数  
C. 非奇非偶函数              D. 既是偶函数又是奇函数

分析 因为

$$\begin{aligned} f(-x) &= \lg(\sqrt{1+x^2}-x) = \lg \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x} \\ &= \lg \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = -\lg(\sqrt{1+x^2}+x) = -f(x). \end{aligned}$$

故选 B.

例 13 函数  $f(x)=|\sin 2x|$  的周期是 ( ).

- A.  $4\pi$                       B.  $2\pi$                       C.  $\pi$                       D.  $\frac{\pi}{2}$

分析 因为

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \left| \sin 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \right| = \left| \sin(2x+\pi) \right| = \left| \sin 2x \right| = f(x).$$

故选 D.



## (三) 填空题

1. 函数  $f(x) = \frac{\lg(1-x)}{1-|x|}$  的定义域是\_\_\_\_\_.
2. 若  $f(2^x - 1) = x + 1$ , 则  $f(x) =$ \_\_\_\_\_.
3. 若  $f(x) = x^2$ ,  $\varphi(x) = e^x$ , 则  $f(\varphi(x)) =$ \_\_\_\_\_.

## 练习题 1.1 参考解答

## (一) 是非题

1. 由于函数  $f(x) = 2\lg x$  和  $g(x) = \lg x^2$  的定义域不同, 故它们的函数图像不相同.

结论: 错

2. 设  $0 < x_1 < x_2$ , 则有  $x_1 x_2 > 0$ ,  $x_2 - x_1 > 0$ , 并且

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} > 0,$$

因此  $f(x_1) > f(x_2)$ , 故, 函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上是减函数.

结论: 对

## (二) 选择题

1. 函数  $|f(x)| = 1$ , 可知  $\left| \frac{1}{f(x)} \right| = 1$ , 从而知  $f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = 1$ , 故选 A.
2. 由于  $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$ , 可得  $e^x y + y = e^x$ , 可以得到,  $e^x = \frac{y}{1-y}$ , 因此

$$x = \ln \frac{y}{1-y}.$$

可知, 其反函数为  $y = \ln \frac{x}{1-x}$ , 故选 B.

## (三) 填空题

1. 要使函数  $f(x)$  有意义,  $x$  必须满足:  $1 - |x| \neq 0$  且  $1 - x > 0$ , 即  $x \neq \pm 1$  且  $x < 1$ . 所以,  $f(x)$  的定义域是  $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$ .

2. 令  $t = 2^x - 1$ , 则  $x = \log_2(t+1)$ , 可得  $f(t) = \log_2(t+1) + 1$ , 因此

$$f(x) = \log_2(x+1) + 1.$$

3.  $f(\varphi(x)) = (\varphi(x))^2 = (e^x)^2 = e^{2x}$ .



## 1.2 极 限

### 一、考试内容

\* 数列极限的定义和性质, 函数极限的定义和\* 性质, 函数的左极限与右极限, 无穷小和无穷大的概念及其关系, 无穷小的性质与等价无穷小, 极限的四则运算, 两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

### 二、考试要求

1. \* 理解数列极限的概念, 理解函数极限的概念(对极限定义中的“ $\epsilon$ - $\delta$ ”等形式表述不作要求), \* 了解函数在一点处极限存在的充分必要条件.
2. \* 会求数列的极限, 会求函数的极限.
3. 掌握极限的性质和四则运算法则.
4. 了解无穷小和无穷大的概念、无穷小的性质、无穷小与无穷大的关系、等价无穷小的概念, \* 会用等价无穷小求极限.
5. 掌握利用两个重要极限求极限的方法.

### 三、基本知识

#### 1. \* 数列 $\{u_n\}$ 的极限定义

· 如果对于任意给定的正数  $\epsilon$ , 总存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 恒有  $|u_n - A| < \epsilon$  成立(其中  $A$  为常数), 则称  $A$  是数列  $\{u_n\}$  当  $n$  趋于无穷大时的极限, 或者说数列  $\{u_n\}$  收敛于  $A$ , 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = A \quad \text{或} \quad u_n \rightarrow A.$$

如果数列  $\{u_n\}$  的极限不存在, 就称数列  $\{u_n\}$  是发散的.

#### 2. 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 以 $A$ 为极限的定义

\* 如果对于任意给定的正数  $\epsilon$ , 总存在正数  $\delta$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 恒有  $|f(x) - A| < \epsilon$  成立, 则称  $A$  是函数  $f(x)$  当  $x$  趋于  $x_0$  时的极限, 记作  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ , 表示当  $x$  小于  $x_0$  并趋于  $x_0$  时, 函数  $f(x)$  以  $A$  为极限, 称  $A$  为函数  $f(x)$  的左极限, 常记为  $f(x_0^-) = A$ ; 同理,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ , 表示当  $x$  大于  $x_0$  并趋于  $x_0$  时, 函数  $f(x)$  以  $A$  为极限, 称  $A$  为函数  $f(x)$  的右极限, 常记为  $f(x_0^+) = A$ .

#### 3. 无穷小量和无穷大量

所谓无穷小量, 就是以零为极限的变量.