高职高专计算机教材精选

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

离散数学

（第二版）

邵学才　蒋强荣
石嘉明　邓米克　编著

清华大学出版社

离散数学

（第二版）

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高职高专计算机教材精选

离散数学

（第二版）

邵学才　蒋强荣
石嘉明　邓米克　编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

离散数学是高等院校理工科计算机专业必修的专业基础课程。其基本内容由集合论(包括二元关系和函数)、代数结构、图论和数理逻辑四部分构成。本教材在叙述上简明扼要,深入浅出,通过大量的例题把抽象的理论“具体化”,是一本可读性很强的教材。

本教材适合于高等院校计算机专业专修科的学生使用,也适合于函授大学、职工大学、高职高专、成人教育的计算机专业的学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/邵学才等编著. —2 版. —北京:清华大学出版社,2007.4
高职高专计算机教材精选
ISBN 978-7-302-14601-8

Ⅰ. 离…　Ⅱ. 邵…　Ⅲ. 离散数学—高等学校—教材　Ⅳ. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 010544 号

责任编辑:谢　琛
责任校对:袁　芳
责任印制:李红英
出版发行:清华大学出版社　　**地　　址**:北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**:100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机:010-62770175　　**邮购热线**:010-62786544
投稿咨询:010-62772015　　**客户服务**:010-62776969
印 刷 者:北京市世界知识印刷厂
装 订 者:三河市李旗庄少明装订厂
经　　销:全国新华书店
开　　本:185×260　**印　张**:13.75　**字　数**:315 千字
版　　次:2007 年 4 月第 2 版　　**印　　次**:2007 年 4 月第 1 次印刷
印　　数:1~5000
定　　价:20.00 元

第二版前言

《离散数学》作为“21世纪计算机专业大专系列教材”于2001年7月由清华大学出版社出版。该教材出版后，受到众多高等院校的关注，成为这些高等院校计算机专业专修科教学的首选教材。对此，清华大学出版社和作者深表谢意。

《离散数学》出版已有5年。5年来，我国高等教育事业发展迅速，特别是在办学规模方面，已完成由精英型转化为大众型的历史进程。为了适应新形势的需求，清华大学出版社与作者商定，出版《离散数学》第二版。《离散数学》第二版本着“淡化理论，加强应用”的修订原则，使教材更加通俗易懂，在教和学的两个方面更贴近大专生的实际水平，更符合大专生的培养目标。

在《离散数学》第二版中，主要修订的内容是：改写了第5章图论的大部分内容和第7章谓词逻辑的全部内容。在第二版中，进一步删去了一些定理的证明，而用一些说理性的叙述和例子来替代，使抽象的理论转化成形象思维，易于接受并能加深对基本概念的理解。

在《离散数学》第二版中，习题也有相应的变动，第5章图论和第7章谓词逻辑的习题全部更新。为此，将同时出版与其配套的辅导教材《离散数学习题与解答》的第二版，它将给出《离散数学》第二版中全部习题的解答。

《离散数学》第二版的修订和编写工作是由北京工业大学计算机学院邵学才、蒋强荣、邓米克和北京语言大学石嘉明共同承担的。在修订和编写过程中，得到亲友朱道奎、张秀云、邵佩珍、孙方策、邵学正和程玉环的悉心帮助，作者深表谢意。作者还要感谢上海大学叶秀明教授，他的指导和建议使作者受益匪浅。

邵学才

2006年10月

第一版前言

离散数学是以研究离散结构为对象的数学课程。离散数学与计算机科学理论、应用技术有着密切的联系。离散数学中的综合、分析、归纳、演绎、递推等方法在计算机科学技术中有着广泛的应用。离散数学是理工科高等院校计算机专业必修的、重要的专业基础课程。离散数学不仅为后续课程，如数据结构、操作系统、数据库原理等作必要的理论准备，而且其课程内容中所提供的一些把科学理论应用于实践的范例，可以培养学生逐步增强如何实施“科学理论—技术—生产力”转化的观念和方法，提高学生在知识经济时代中的适应能力。

离散数学的主要内容由集合论、代数结构、图论和数理逻辑等四部分构成。它具有“内容广泛、抽象理论多”的特点，在培养学生的抽象思维和创新能力方面有独特作用。

本教材是专为计算机专业专修科的学生编写的，同时也适合于高职高专、各类函授大学、职工大学等成人教育的计算机专业。作者在编写过程中，充分考虑到使用对象的现有水平及其学习特点，对于传统的离散数学的内容在取舍和编排上做了精心的处理，淡化了某些理论性的证明，而注重介绍理论在实际中的应用。在教材中有大量例题，它们有层次地使学生由了解概念、深化概念，直至引发进一步思考。“深入浅出”是编写教材的指导思想，期望能得到读者的认可。

本教材是由邵学才、蒋强荣、石嘉明和张秀珍编写，由邵学才统稿。在编写过程中，自始至终得到了北京工业大学李大友教授的热情支持和悉心帮助，对此作者表示深切的谢意。

作　者

2001 年 2 月

目 录

第1章

集　合

集合论是现代数学的基础，几乎与现代数学的各个分支都有着密切联系，并且渗透到所有科技领域。集合论的内容极其丰富，本章主要介绍朴素集合论的基本内容，包括什么是集合以及有关子集、空集、全集、补集、幂集等概念；集合的基本运算和集合代数的有关公式。

1.1 集合的基本概念

集合是具有某种特点的对象的聚合，每一个对象称为这个集合的元素。例如北京工业大学学生的全体可以构成一个集合，而北京工业大学的每一个学生就是这个集合中的一个元素。又如正整数的全体构成一个集合，而每一个正整数就是这个集合的元素。通常用大写的英文字母 $A,B,C,\cdots$ 代表集合，用小写的英文字母 $a,b,c,\cdots$ 代表集合中的元素。如果 a 是集合 A 中的一个元素，称 a 属于 A，并记作 $a\in A$。如果 a 不是集合 A 中的元素，称 a 不属于 A，并记作 $a\notin A$。

集合有多种表示方法，这里介绍常用的两种方法。一是列举法（或称穷举法），这种表示方法是将集合中的所有元素一一列举出来，元素之间用逗号分开，并用花括号将它们括起来。如：

$A=\{2,4,6,8,10\}$，这表示集合 A 由 5 个元素组成，它们分别是 2,4,6,8,10。又如：$B=\{a,e,i,o,u\}$，这表示集合 B 由 5 个元素组成，它们分别是 a,e,i,o,u。

由此可见，$4\in A$，$a\in B$；而 $5\notin A$，$b\notin B$。

集合的另一种表示方法是特征法，它是以某个小写的英文字母统一表示该集合的元素，并指出这类元素的共同特征。如：

$$C=\{x\mid x\text{是不大于 10 的偶数},x>0\}$$

这里，符号“|”读作“系指”，花括号内的逗号读作“并且”。因此集合 C 中的元素是一些不大于 10 的偶数，并且大于 0，或者简单地说，C 是由不大于 10 的正偶数组成。实际上集合 C 的元素应该是 2,4,6,8,10。可见集合 C 和列举法中所提到的集合 A 的元素是完全相同的。又如：

$$D=\{x\mid x\text{是英文字母},x\text{是元音}\}$$

很明显，D 中元素和上述集合 B 中的元素是相同的。

当两个集合 X 和 Y 有相同的元素时，称这两个集合相等，记作 $X=Y$。很显然，上面提到的集合 A,B,C,D 中，有 $A=C$ 和 $B=D$。

有一些集合，以后常常要用到，所以用固定的符号表示，如：

N 是自然数集合：0，1，2，…；

I 是整数集合：…，−2，−1，0，1，2，…；

$\mathbf{I}_+$ 是正整数集合：1，2，3，…；

Q 是有理数集合；

R 是实数集合；

C 是复数集合。

一般地讲，用列举法来表示集合时，往往显得冗长而复杂，但当我们对集合的某些特征作抽象的讨论时，列举法能使问题显得直观和容易理解。

如果集合 A 中的每一个元素又都是集合 B 中的元素，则称 A 是 B 的子集，也可以说 A 含在 B 中，或 B 含有 A，这种关系写作

$$A\subseteq B \quad 或 \quad B\supseteq A$$

如果 A 不是 B 的子集，即在 A 中至少有一个元素不属于 B 时，称 B 不包含 A，记作

$$B\not\supseteq A \quad 或 \quad A\not\subseteq B$$

例如：设集合 $A=\{1,3,4,5\}$，$B=\{1,2,5\}$，$C=\{1,5\}$。易见 C 是 A 的子集，C 又是 B 的子集，但 B 不是 A 的子集，因为元素 $2\in B$ 而 $2\notin A$；同理 A 也不是 B 的子集，因为 $3\in A$ 而 $3\notin B$。

由集合间的包含关系，容易得到：

定理 1.1.1 集合 A 和集合 B 相等的充分必要条件是 $A\supseteq B$ 且 $B\supseteq A$。

这一结论在证明两个集合相等时，往往是一种有效而简便的方法。

如果 A 是 B 的子集，但 A 和 B 不相等，也就是说在 B 中总有一些元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集。记作 $B\supset A$。如集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3\}$，那么 A 是 B 的真子集。

不含有任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$ 或 $\{\}$，如：

$$A=\{x \mid x 是在 2000 年跳过 2.50 米的人\}$$

由于 2000 年还没有人跳过这个高度，所以 A 是空集，即 $A=\varnothing$。

由空集的定义可知，空集是一切集合的子集。

在实际工作中，我们所研究的对象总是限制在一定的范围内。比如，要研究北京市大学生的学习情况时，研究对象可以是清华大学的学生，也可以是北京工业大学的学生，但研究的对象总是限制在北京市大学生这个范围内。在这种情况下，我们称“北京市大学生的全体”组成的集合为全集。又如在初等数论中，研究的对象是整数，在这种情况下，全体整数组成的集合就是全集，全集通常用 U 表示。

请注意，全集的概念和研究对象所处的范围密切相关，不同的情况就有不同的全集。例如，当我们研究人口问题时，全世界所有的人就构成了全集；当我们研究中国妇女的生

活现状时，全中国所有的妇女构成了全集；甚至当研究的对象仅限制在一个较小的范围时，如仅研究北京工业大学一年级学生的学习情况时，北京工业大学一年级学生的全体就是全集。总之，全集是和研究对象密切相关的。简单地讲，当我们的讨论总是限制在某个集合的子集时，这个集合就是全集。

A 是一个集合，由属于全集 U 但不属于 A 的所有元素组成的集合称为 A 的补集，记作 $\overline{A}$ 或 $\sim A$。例如

$$U = \{x \mid x \text{是北京工业大学的学生}\}$$
$$A = \{x \mid x \text{是北京工业大学的女学生}\}$$

则 A 的补集

$$\overline{A} = \{x \mid x \text{是北京工业大学的男学生}\}$$

又如

$$U = \{x \mid x \text{是正整数}\}$$
$$A = \{x \mid x \text{是正偶数}\}$$

则 A 的补集

$$\overline{A} = \{x \mid x \text{是正奇数}\}$$

集合中的元素可以是多种多样的，因此一个集合作为另一个集合的元素是完全可以的。例如，集合 $A=\{a,b,\{c,d\}\}$，这表明集合 A 含有 3 个元素：$a,b,\{c,d\}$，这里集合 $\{c,d\}$ 就成为集合 A 的一个元素了。

一般地讲，从属关系"$\in$"是元素和集合之间的关系，包含关系"$\supseteq$"则是集合和集合之间的关系，但也存在着这样的情况：集合 A 属于 B，集合 A 又含在 B 中，如：

$$A = \{a,b\}$$
$$B = \{a,b,\{a,b\}\}$$

这里就有 $A\subset B$ 和 $A\in B$ 同时成立。

当一个集合中的元素个数为有限时，该集合称为有限集；集合中元素的个数为无限时，该集合称为无限集。有限集 A 中元素的个数称为集合 A 的基，记作 $|A|$，如 $A=\{a,b,c\}$，则 $|A|=3$。

A 是有限集合，由 A 的所有子集作为元素而构成的集合称为 A 的幂集，记作 $P(A)$，如

$$A = \{a,b,c\}$$

则

$$P(A) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

又如

$$A = \{1,2,3,4\}$$
$$P(A) = \{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$$

显然，当 $|A|=3$ 时，$|P(A)|=8$；当 $|A|=4$ 时，$|P(A)|=16$，在一般情况下有：

定理 1.1.2 A 是有限集，$|A|=n$，则 A 的幂集 $P(A)$ 的基为 2^n。

证明 由排列组合的知识可知，

$$|P(A)| = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

又由二项式定理可知，

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^n \cdot b + \cdots + C_n^{n-1} \cdot ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

特别取 $a=b=1$，则有：

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

所以可得

$$|P(A)| = 2^n$$

1.2 集合的运算

集合上的运算是以给定的集合(称为运算对象)按某种规则去确定一个新的集合(称为运算结果)。

1. 集合的并运算

定义 1.2.1 两个集合 A、B 的并记作 $A \cup B$，它也是一个集合，由所有属于 A 或者 B 的元素合并在一起而构成的，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad 或 \quad x \in B\}$$

例如

$$A = \{a,b,c\}$$
$$B = \{a,b,c,d,e\}$$

则

$$A \cup B = \{a,b,c,d,e\}$$

又如

$$A = \{1,2,3,4\}$$
$$B = \{1,3,5,7,9\}$$

则

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,7,9\}$$

集合的运算可以用文氏图形象地表示，在图 1.2.1 中，矩形表示全集 U，两个圆分别表示集合 A 和集合 B，阴影部分就是 $A \cup B$。

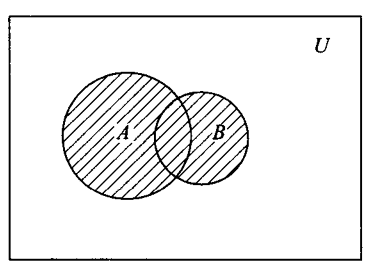

图 1.2.1

由集合并运算的定义可知，并运算具有以下性质：

(1) $A \cup A = A$

(2) $A \cup \varnothing = A$

(3) $A \cup U = U$

(4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(5) $A\cup B=B\cup A$

2. 集合的交运算

定义 1.2.2 两个集合 A 和 B 的交记作 $A\cap B$，它也是一个集合，由属于 A、B 两集合的所有共同元素构成，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

例如

$$A = \{a,b,c\}$$
$$B = \{a,b,d,f\}$$

则

$$A \cap B = \{a,b\}$$

又如

$$A = \{1,2,3,4\}$$
$$B = \{1,3,5,7,9\}$$

则

$$A \cap B = \{1,3\}$$

如果集合 $A\cap B=\varnothing$，也就是说 A 和 B 没有共同元素，则称 A、B 不相交，例如

$$A = \{1,2,3\}$$
$$B = \{4,5,6\}$$

那么 $A\cap B=\varnothing$，即 A、B 不相交。

集合的交运算的文氏图表示，见图 1.2.2，其中阴影部分就是 $A\cap B$。

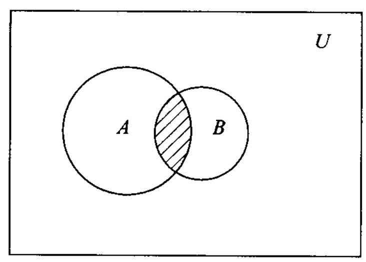

图 1.2.2

由集合交运算的定义可知，交运算具有以下性质：

(1) $A\cap A=A$

(2) $A\cap\varnothing=\varnothing$

(3) $A\cap U=A$

(4) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(5) $A\cap B=B\cap A$

定理 1.2.1 设 A,B,C 为 3 个集合，则下列分配律成立：

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

证明 这里只证明第一个等式，第二个等式的证明与第一个类似。

如果 $x\in A\cap(B\cup C)$，即 $x\in A$，且 $x\in B\cup C$，也即 $x\in A$ 且 $x\in B$ 或者 $x\in A$ 且 $x\in C$，也就是说 $x\in A\cap B$ 或者 $x\in A\cap C$，所以 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，即有 $(A\cap B)\cup(A\cap C)\supseteq A\cap(B\cup C)$。

另外，如果 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，则 $x\in(A\cap B)$ 或 $x\in(A\cap C)$，即 $x\in A$ 且 $x\in B$ 或者 $x\in A$ 且 $x\in C$，也即 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$，所以有 $x\in A\cap(B\cup C)$，于是 $A\cap(B\cup C)\supseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$，由此可得 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

定理 1.2.2 设 A、B 为集合,则下列关系式成立:

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

读者可以用文氏图验证之。

定理 1.2.3 设 A、B 为集合,则下列关系式成立:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

这里 $\overline{A}$ 为 A 的补集,补集的定义可参阅 1.1 节。

定理的证明从略,读者也可用文氏图验证之。定理 1.2.2 称为吸收律;定理 1.2.3 称为摩根定律,它们在集合的运算中有较大的用途。

3. 集合的减运算

定义 1.2.3 由属于集合 A 但不属于集合 B 的那些元素构成的集合称为 A 减 B 的差,记作 $A-B$,即

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

例如

$$A = \{a,b,c\}$$

$$B = \{a,b\}$$

则

$$A - B = \{c\}$$

又如

$$A = \{a,b,c,d\}$$

$$B = \{a,b,e,f\}$$

则

$$A - B = \{c,d\}$$

再如

$$A = \{a,b,c\}$$

$$B = \{e,f\}$$

则

$$A - B = \{a,b,c\}$$

集合的减运算,其文氏图表示见图 1.2.3。

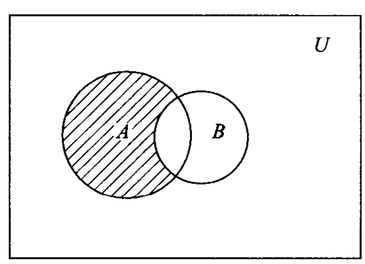

图 1.2.3

由减运算的定义可知,A 的补集就是全集减 A 的差,即

$$\overline{A} = U - A$$

集合的减运算有以下性质:

(1) $A-A=\varnothing$

(2) $A-\varnothing=A$

(3) $A-U=\varnothing$

(4) $A-B=A\cap\overline{B}$

性质(1),(2),(3)是显然的,性质(4)也可由减运算的定义直接得到。

例 1-1 设 A、B、C 为集合,证明:

$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$$

证明 利用性质(4),右式

$$\begin{aligned}(A\cap B)-(A\cap C)&=(A\cap B)\cap(\overline{A\cap C})\\&=(A\cap B)\cap(\overline{A}\cup\overline{C})\\&=(A\cap B\cap\overline{A})\cup(A\cap B\cap\overline{C})\\&=\varnothing\cup(A\cap B\cap\overline{C})\\&=A\cap B\cap\overline{C}\\&=A\cap(B-C)\end{aligned}$$

4. 集合的对称差

定义 1.2.4 集合 A 和 B 的对称差记作 $A\oplus B$,它是个集合,其元素或属于 A,或属于 B,但不能既属于 A 又属于 B。即

$$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$$

例如

$$A=\{a,b,c,d\}$$
$$B=\{a,c,e,f,g\}$$

那么

$$A\oplus B=\{b,d,e,f,g\}$$

集合的对称差的文氏图表示见图 1.2.4。

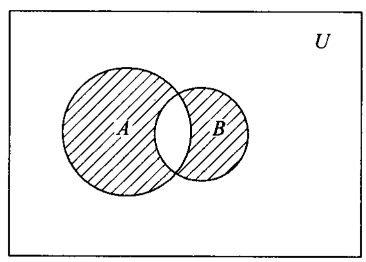

图 1.2.4

由对称差的定义易得下列性质:

(1) $A\oplus A=\varnothing$

(2) $A\oplus\varnothing=A$

(3) $A\oplus U=\overline{A}$

(4) $A\oplus B=B\oplus A$

(5) $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

(6) $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$

1.3 包含排斥原理

本节讨论有限集元素的计数问题。我们已经知道,有限集 A 中的元素个数记作 $|A|$。当有限集 A、B 不相交时,显然有 $|A\cup B|=|A|+|B|$,而当 A、B 相交时,由并运算的文氏图表示可知,应有

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

这个结论常称作包含排斥原理。

对于 3 个集合的并的元素计数公式是：

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C| \quad \text{(见图 1.3.1)}$$

这是因为

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C|&=|A\cup(B\cup C)|\\&=|A|+|B\cup C|-|A\cap(B\cup C)|\\&=|A|+|B|+|C|-|B\cap C|\\&\quad-|(A\cap B)\cup(A\cap C)|\\&=|A|+|B|+|C|-|B\cap C|\\&\quad-(|A\cap B|+|A\cap C|\\&\quad-|A\cap B\cap A\cap C|)\\&=|A|+|B|+|C|-|B\cap C|\\&\quad-|A\cap B|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|\end{aligned}$$

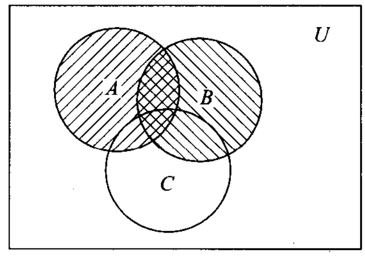

图 1.3.1

同理还可得到 4 个集合并的元素计数公式：

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C\cup D|=&|A|+|B|+|C|+|D|-|A\cap B|-|A\cap C|\\&-|A\cap D|-|B\cap C|-|B\cap D|-|C\cap D|\\&+|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|\\&+|B\cap C\cap D|-|A\cap B\cap C\cap D|\end{aligned}$$

用归纳法容易得到一般情况下的包含排斥原理。

定理 1.3.1 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为有限集合，则

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=&\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|\\&+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots\\&+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|\end{aligned}$$

例 1-2 在 20 个大学生中，有 10 人戴眼镜，有 8 人爱吃口香糖，有 6 人既戴眼镜又爱吃口香糖，问不戴眼镜又不爱吃口香糖的人数是多少？

解 设 A 是戴眼镜大学生的集合，B 是爱吃口香糖的大学生的集合，由题意可知：$|A|=10$，$|B|=8$，$|A\cap B|=6$。由包含排斥原理可得：

$$\begin{aligned}|A\cup B|&=|A|+|B|-|A\cap B|\\&=10+8-6=12\end{aligned}$$

而不戴眼镜又不爱吃口香糖的大学生数是 $20-|A\cup B|=8$。

例 1-3 对 100 名大学生进行调查的结果是：34 人爱好音乐，24 人爱好美术，48 人爱好舞蹈；13 人既爱好音乐又爱好舞蹈，14 人既爱好音乐又爱好美术，15 人既爱好美术又爱好舞蹈；有 25 人这三种爱好都没有，问这三种爱好都有的大学生人数是多少？

解 设 A 是爱好音乐的大学生的集合，B 是爱好美术的大学生的集合，C 是爱好舞蹈的大学生的集合。

由题意可知：