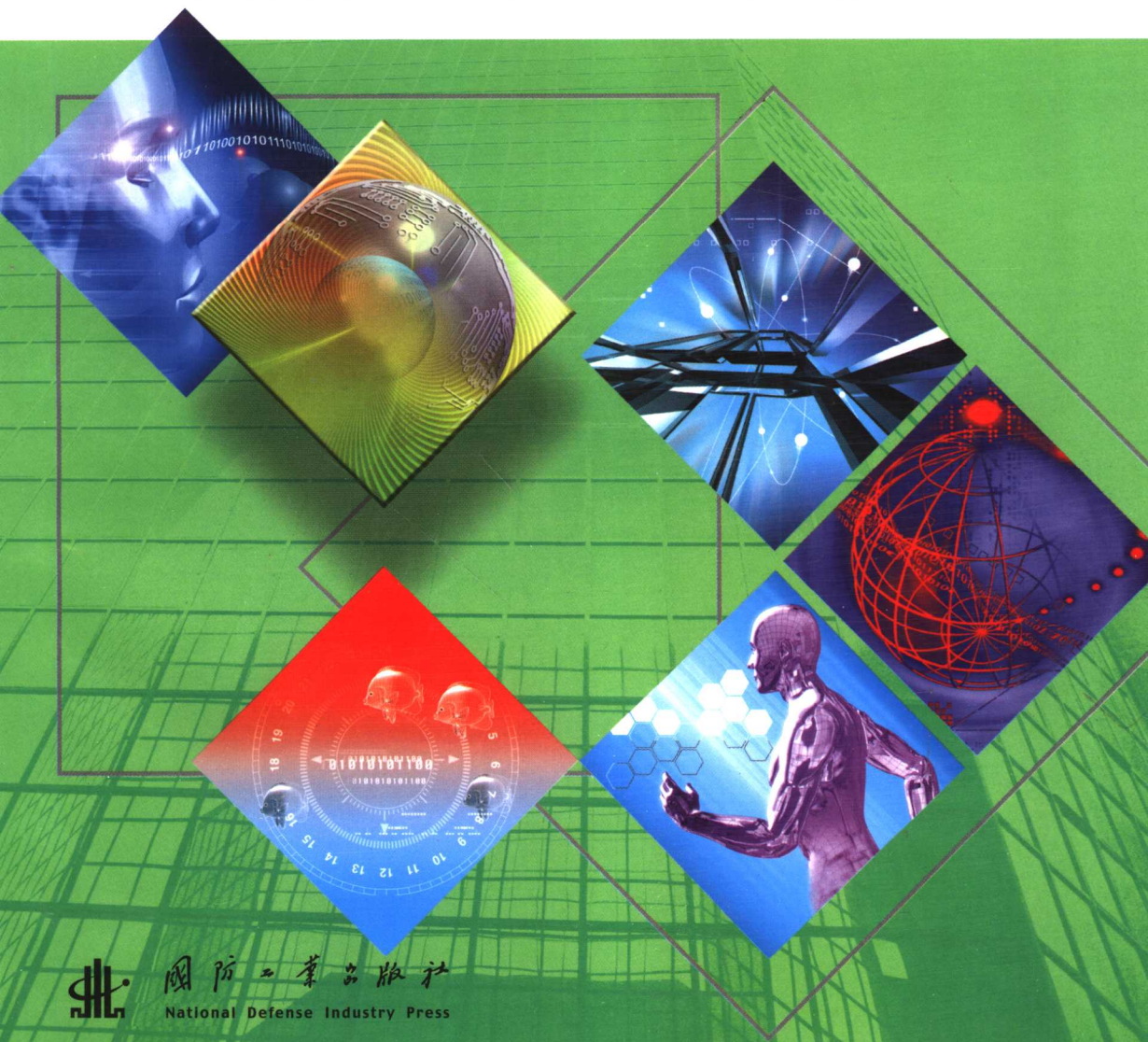


Matlab

Matlab 应用教程丛书

小波分析与应用 (第2版)

高 成 主 编 董长虹 郭 磊 李阳明 副主编 高 志 余啸海 编著



国防工业出版社
National Defense Industry Press

Matlab 应用教程丛书

Matlab 小波分析与应用

(第2版)

		高 成	主 编
董长虹	郭 磊	李阳明	副主编
	高 志	余啸海	编 著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书以 Matlab 小波工具箱为基础,详细介绍了小波分析应用于信号处理和图像处理的基本原理和基本方法,并对小波分析的数学基础做了简要介绍,通过大量的示例使读者可以尽快地了解小波分析,而且在每种分析方法的介绍中同时介绍其问题背景,读者可以直接通过 Matlab 使用小波分析解决实际问题。

本书的读者对象为大中专院校通信或信号处理专业的学生,或从事信号处理、图像处理等方面工作的工程技术人员,也可作高等学校小波分析课程的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

Matlab 小波分析与应用 / 高志,余啸海编著. —2 版.

北京:国防工业出版社,2007.7

(Matlab 应用教程丛书/高成主编)

ISBN 978-7-118-05188-9

I. M... II. ①高... ②余... III. 计算机辅助计算—软件包, Matlab—应用—小波分析—教材 IV. TP391.75 0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 071216 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 18½ 字数 326 千字

2007 年 7 月第 2 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 28.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

前言

在科学研究和工程应用中,往往需要进行大量的数学计算,其中就包括矩阵运算。一般来说,这些运算难以用手工精确、快捷地进行,而要借助计算机编制相应的程序做近似计算。目前较多的是利用 Basic、Fortran 和 C 语言编制计算程序,既需要对有关算法有深刻的了解,还需要熟练地掌握所用语言的语法及编程技巧。对多数科学工作者而言,同时具备这两方面技能有一定困难。并且,编制程序相当繁杂,不仅消耗人力与物力,而且影响工作进程和效率。为克服上述困难,美国 Mathwork 公司于 1967 年推出了“Matrix Laboratory”(缩写为 Matlab)软件包,之后又不断加以更新和扩充,目前最新的 7.x 版本(Windows 环境下运行)已经成为一种功能强、效率高、便于进行科学和工程计算的交互式软件包。软件包有:一般数值分析、矩阵运算、数字信号处理、建模、系统控制和优化等应用程序,并把应用程序和图形集成于一个使用方便的环境中。在此环境下所解问题的 Matlab 语言表述形式和其数学表达形式相同,不需要按传统的方法编程。但 Matlab 毕竟是一种新的计算机语言,要想运用自如,充分发挥它的威力,也需先系统地学习它。不过由于使用

Matlab 编程运算与人进行科学计算的思路和表达方式完全一致,所以不像学习其他高级语言——如 Basic、Fortran 和 C 语言等——那样难于掌握。实践证明,在短短的几十分钟内你就可以学会 Matlab 的基础知识,在几个小时的使用中就能初步掌握它,并进而进行高效率 and 富有创造性的计算。Matlab 大大降低了对使用者的数学基础和计算机语言知识的要求,不仅编程效率和计算效率极高,还可在计算机上直接输出计算结果和精美的图形拷贝,不愧为一高效的科研助手。一推出即风行美国,流传世界。

Matlab 的另一个主要特点是提供了功能丰富的工具箱函数,将应用最广泛的一些功能集成到工具箱中,用户在使用时只需关注问题本身的特点,从而得以从繁复的重复劳动中解脱出来。本书将要介绍的就是 Matlab 提供的众多工具箱中的一个——近年来发展迅速且备受关注的小波工具箱(Wavelet Toolbox)。下面我们先来介绍一下小波变换的背景知识。

小波变换的概念是由法国从事石油信号处理的工程师 J. Morlet 在 1974 年首先提出的,他还通过物理的直观和信号处理的实际需要经验地建立了反演公式,但当时并未得到数学家的认可。1986 年著名数学家 Y. Meyer 偶然构造出一个真正的小波基,并与 S. Mallat 合作建立了构造小波基的同样方法及其多尺度分析之后,小波分析才开始蓬勃发展起来,其中比利时女数学家 I. Daubechies 撰写的《小波十讲》^①(*Ten Lectures on Wavelets*)对小波的普及起了重要的推动作用。与 Fourier 变换、窗口 Fourier 变换(也就是 Gabor 变换)不同,小波变换是一个时间和

① 其中文版已由国防工业出版社出版。

频率的局域变换,能有效地从信号中提取信息,并通过伸缩和平移等运算功能对函数或信号进行多尺度细化分析(Multiscale Analysis),从而解决了 Fourier 变换不能解决的许多问题,被誉为“数学显微镜”,是调和分析发展史上里程碑式的进展。

小波分析的应用是与小波分析的理论研究紧密地结合在一起的。现在,它已经在科技信息产业领域取得了令人瞩目的成就。电子信息技术是六大高新技术中的一个重要领域,图像和信号处理又是电子信息技术领域的重要方面。现今,信号处理已经成为当代科学技术工作的重要组成部分。信号处理的目的是:对信号进行准确地分析、诊断、编码压缩和量化、快速传递或存储、精确地重构(或恢复)。从数学角度来看,信号与图像处理可以统一看作是信号处理(图像可以看作是二维信号),小波分析和应用中的许多问题都可以归结为信号处理问题。现在,对性质随时间稳定不变的信号,处理的理想工具仍然是傅里叶分析。但在实际应用中,绝大多数信号是非稳定的,小波分析正是适用于非稳定信号的处理工具。

事实上小波分析的应用领域十分广泛,包括:数学领域的许多学科;信号分析、图像处理;量子力学、理论物理;军事电子对抗与武器的智能化;计算机分类与识别;音乐与语言的人工合成;医学成像与诊断;地震勘探数据处理;大型机械的故障诊断等。例如,在数学领域,它已应用于数值分析、构造快速数值方法、曲线曲面构造、微分方程求解、控制论等方面;在信号分析方面应用于滤波、去噪声、压缩、传递等;在图像处理方面用于图像压缩、分类、识别与诊断、去污等;在医学成像方面用于减少 B 超、CT、核磁共振成像的时间,提高分辨率等。

综合小波变换的优点和 Matlab 的丰富功能,就有了

基于 Matlab 的小波变换。本书分以下 5 章来介绍。

第 1 章简要介绍小波分析的数学基础,主要以小波的发展过程为线索,从传统的傅里叶分析入手,通过对比傅里叶分析、短时傅里叶分析和小波分析的优缺点,指出了小波分析在分析数学领域的地位及其必然性。通过本章的学习,读者可以在以后各章的学习中更深刻地了解各种方法的原理及处理技巧。

第 2 章以 Matlab 小波工具箱为基础,介绍小波工具箱中各种小波变换的命令和基本的使用方法,并通过大量的例子来说明这些命令。通过本章的学习,读者可以对 Matlab 小波工具箱有个基本的了解,并应用其解决一些简单的问题。

第 3 章详细介绍如何用小波工具箱提供的命令实现一些通用的处理方法,包括阈值化方法、前处理和后处理方法、数据归类方法等,在介绍这些方法的过程中,给出了大量的实例。通过本章的学习,读者可以更好地弥补理论和实践之间的差距,尽快地把小波工具箱应用到解决实际问题中去,本章还对图像处理进行了一些实例介绍,而更多的关于信号处理的介绍将在第 5 章详细介绍。

第 4 章主要介绍小波工具箱的 GUI 用法,其功能与前两章介绍的命令没有本质区别,只是包装了更为友好、更便于交互的图形界面,用户通过对 GUI 的熟悉和使用可以更为快捷地对一些通用的问题进行小波处理。

第 5 章主要对一些在理论和应用上广泛应用的信号处理问题进行详细分析,读者通过本章的学习,可以了解到如何从小波域的分解系数中找到问题关键性质的方法。最后给出了一个实际的电网检测的信号分析的例子,读者通过该例子的学习可以了解在实际问题处理中需要考虑的众多问题和解决办法。

附录 A 是小波工具箱各命令的调用方式和功能说明。

附录 B 给出了小波工具箱中主要命令的 Matlab 实现,对有编程经验的读者有一定的启发,有助于其了解 Matlab 的内部实现机制,并在此基础上对其进行完善。

编 者

2006 年 12 月

目 录

.....

第1章 小波分析的数学基础.....	1
1.1 傅里叶分析与小波分析.....	2
1.1.1 傅里叶级数	2
1.1.2 傅里叶变换	2
1.1.3 窗函数和测不准原理	3
1.1.4 小波分析	6
1.2 一维连续小波变换.....	8
1.3 多分辨分析	10
1.4 正交小波变换	12
1.5 双正交小波	14
1.6 小波包分析	17
1.7 常用小波函数介绍	18
1.7.1 小波的选择.....	18
1.7.2 Haar 小波	19
1.7.3 Daubechies 小波	19
1.7.4 SymletsA(symN)小波族.....	20
1.7.5 Biorthogonal(biorNr. Nd)小波族	23
1.7.6 Coiflet(coifN)小波族	24
1.7.7 Morlet 小波	25
1.7.8 Mexican Hat 小波	25
1.7.9 Meyer 小波	26
1.7.10 小波函数小结	27

第2章 小波变换在 Matlab 中的实现	29
2.1 一维连续小波变换	29
2.2 一维离散小波变换	32
2.2.1 一维离散小波变换的分解算法	32
2.2.2 一维离散小波变换的重建算法	36
2.3 二维离散小波变换	40
2.3.1 二维离散小波变换的分解算法	40
2.3.2 二维离散小波变换的重建算法	45
2.4 小波工具箱中的图像表示	49
2.4.1 索引位图在小波分解中的表示	50
2.4.2 有关 Matlab 小波工具箱中图像处理的命令	52
2.5 静态离散小波变换	53
2.5.1 静态离散小波变换的概念	53
2.5.2 一维静态离散小波变换	55
2.5.3 二维静态离散小波变换	61
2.6 小波包变换	67
2.6.1 小波包分解	70
2.6.2 小波树的操作	74
2.7 信号的扩展	78
2.8 添加小波函数	80
2.8.1 小波函数的添加	80
2.8.2 小波函数族的添加	84
2.8.3 小波函数添加的后续工作	94
2.9 小波树对象的使用方法	94
2.9.1 小波树相关对象简介	95
2.9.2 应用小波树对象的例子	95
第3章 Matlab 的小波分析	104
3.1 小波变换用于信号降噪的原理	104
3.1.1 信号降噪的准则	105
3.1.2 小波分析用于降噪的过程	105
3.1.3 基本降噪模型	105
3.1.4 从原始信号确定各级阈值	106
3.1.5 基于样本估计的阈值的选取	110
3.1.6 硬阈值和软阈值	111

3.2	Matlab 用于信号降噪	112
3.2.1	Matlab 中用于降噪的函数	112
3.2.2	通过抑制细节系数实现降噪	114
3.2.3	通过 FFT 实现信号降噪的方法	116
3.2.4	Matlab 缺省的降噪命令	120
3.2.5	二维信号的小波降噪	122
3.3	信号压缩	124
3.3.1	问题描述	125
3.3.2	性能度量	125
3.3.3	实现方法	125
3.3.4	Matlab 小波工具箱中信号压缩的实现	126
3.3.5	正交小波同双正交小波	127
3.3.6	Matlab 小波压缩的例子	127
3.3.7	二维信号的压缩	129
3.3.8	基于离散余弦变换(DCT)的图像压缩	129
3.3.9	基于小波变换的图像局部压缩	132
3.3.10	小波变换用于二维信号压缩的一般方法	133
3.3.11	基于小波包变换的图像压缩	136
3.4	小波分析用于图像增强	139
3.4.1	图像增强问题描述	139
3.4.2	图像钝化	139
3.4.3	图像锐化	141
3.5	小波分析用于样本估计	144
3.5.1	密度估计	144
3.5.2	回归估计	147
3.6	小波分析方法小结	150
第4章	小波工具箱的 GUI 用法	152
4.1	小波工具箱图形窗口的启动	153
4.2	一维小波分析工具类	154
4.2.1	一维小波变换工具	154
4.2.2	小波工具箱图形工具的通用方法	159
4.2.3	一维小波包工具	161
4.2.4	一维连续小波工具	165
4.3	二维小波分析工具类	166

4.3.1	二维小波压缩工具	168
4.3.2	二维小波降噪工具	171
4.3.3	二维小波统计工具	172
4.3.4	二维小波直方图工具	173
4.3.5	二维小波包工具	174
4.4	显示工具类	179
4.5	特殊小波工具集	181
4.5.1	一维静态小波降噪工具	182
4.5.2	密度估计工具	184
4.5.3	一维回归估计工具	186
4.5.4	小波系数选择工具	188
4.5.5	二维静态小波降噪工具	189
4.5.6	二维小波系数选择工具	191
4.6	扩展工具集	193
4.6.1	信号扩展工具	193
4.6.2	图像扩展(二维信号扩展)工具	195
第5章	小波实例分析——信号处理	197
5.1	概述	197
5.2	间断点的检测	198
5.2.1	问题总结	199
5.2.2	处理技巧	199
5.3	间断检测二	200
5.4	识别信号发展趋势	201
5.5	检测信号的自相似性	202
5.6	识别信号频谱成分	203
5.7	抑制信号成分	206
5.8	大矩阵的快速乘法	207
5.9	小波分析实例	210
5.9.1	常用信号小波分析演示	211
5.9.2	正弦波的线性组合	213
5.9.3	不同频率的分段信号	214
5.9.4	对称区间上的均匀白噪声	216
5.9.5	有色、三阶自适应模型噪声	217
5.9.6	染噪的多项式信号	219

5.9.7	阶跃信号	220
5.9.8	接近的不连续信号	221
5.9.9	二阶导数不连续信号	222
5.9.10	染噪的斜坡信号	223
5.9.11	加入有色噪声的斜坡信号	224
5.9.12	染噪的正弦信号	225
5.9.13	三角波与正弦波的线性组合	226
5.9.14	染噪的正弦波与三角波的叠加	227
5.9.15	实际的电力信号分析	228
5.10	小波分析实例研究——电网监测	229
5.10.1	数据和外部信息表示	230
5.10.2	每日中部时间段信号分析	231
5.10.3	深夜时段的信号分析	232
5.10.4	进一步分析方向	234
附录 A	小波工具箱中的命令说明	238
附录 B	主要小波命令实现	263
参考文献		282

第 1 章 小波分析的数学基础

小波分析是近 15 年来发展起来的一种新的时频分析方法,我们可以先粗略地区分一下时域分析和频域分析。

时域分析的基本目标:

- (1) 边缘检测和分割;
- (2) 将短时的物理现象作为一个瞬态过程分析。

其典型应用包括齿轮变速控制、起重机的非正常噪声、自动目标锁定、物理中的间断现象等。

而频域分析的着眼点在于区分突发信号和稳定信号以及定量分析其能量,典型应用包括细胞膜的识别、金属表面的探伤、金融学中快变量的检测、Internet 的流量控制等。

从以上的信号分析的典型应用可以看出,时频分析应用非常广泛,涵盖了物理学、工程技术、生物科学、经济学等众多领域,而且在很多情况下只分析其时域或频域的性质是不够的,比如在电力监测系统中,既要监控稳定信号的成分,又要准确定位故障信号。这就需要引入新的时频分析方法,小波分析正是由于这类需求发展起来的。

在传统的傅里叶分析中,信号完全是在频域展开的,不包含任何时域的信息,这对于某些应用来说是很恰当的,因为信号的频率信息对其是非常重要的。但其丢弃的时域信息可能对某些应用同样非常重要,所以人们对傅里叶分析进行了推广,提出了很多能表征时域和频域信息的信号分析方法,如短时傅里叶变换、Gabor 变换、时频分析、Randon - Wigner 变换、小波变换等。其中短时傅里叶变换是在傅里叶分析基础上引入时域信息的最初尝试,其基本假定在于在一定的时间窗内信号是平稳的,那么通过分割时间窗,在每个时间窗内把信号展开到频域就可以获得局部的频域信息,但是它的时域区分度只能依赖于大小不变的时间窗,对某些瞬态信号来说还是粒度太大。换言之,短时傅里叶分析只能在一个分辨率上进行。所以对很多应用来说不够精确,存在很大的缺陷。

而小波分析则克服了短时傅里叶变换在单分辨率上的缺陷,具有多分辨率分析的特点,在时域和频域都有表征信号局部信息的能力,时间窗和频率窗都可以根据信号的具体形态动态调整,在一般情况下,在低频部分(信号较平稳)可以采用较低的时间分辨率,而提高频率的分辨率;在高频情况下(频率变化不大)可以用

较低的频率分辨率来换取精确的时间定位。因为这些特点,小波分析可以探测正常信号中的瞬态成分,并展示其频率成分,被称为数学显微镜,广泛应用于各个时频分析领域。

1.1 傅里叶分析与小波分析

1.1.1 傅里叶级数

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数,且 $f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$, 那么

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} \right\}_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots}$$

是 $L^2(-\pi, \pi)$ 的标准化正交基, 则 $f(x)$ 可展开为

$$f(x) = \sum_n \hat{f}(n) e^{-inx}$$

其中

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx$$

称为 $f(x)$ 的傅里叶级数。其中 n 的取值为整数, 傅里叶级数把函数分解成在一组归一化正交系函数(也就是正弦波)上的叠加, 刻画了在频域的每个离散点上信号的成分, 即一个均匀离散谱。

傅里叶分析把以 2π 为周期且能量有限的信号($f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$) 分解到一组在 $(-\pi, \pi)$ 上的正交基。这组正交基在 $L^2(-\pi, \pi)$ 上稠密, 也就是说其线性组合可以覆盖在 $L^2(-\pi, \pi)$ 所有的函数。这样对信号的限制是很明显的, 首先它要求信号以 2π 为周期, 而且这组正交基的频率分辨率是一定的; 只能在特定的频率点上进行分解, 为了得到连续的能量谱, 就要在这个实轴上对信号进行分解, 因此引入了(积分)傅里叶变换。

1.1.2 傅里叶变换

傅里叶级数把信号分解为离散谱上函数的叠加, 但是在对频率变化敏感的某些应用中, 离散的频率信息显得太粗糙, 傅里叶变换就是傅里叶级数在连续情况下的推广:

定义: 函数 $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ 的傅里叶变换为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad (1.1)$$

$F(\omega)$ 的傅里叶逆变换定义为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega \quad (1.2)$$

傅里叶变换有很明确的物理意义,如果 f 是一个能量有限的模拟信号,那么 $(\hat{f})$ 就是它的频谱,引入负的频率是为了方便表示,根据 Parseval 等式,可以得到一个信号的能量与它频谱的含量成比例,即

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle \quad (1.3)$$

傅里叶变换存在的条件是 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上绝对可积,从公式(1.1)可以看出,傅里叶变换把信号完全转换到频域进行分析,不但为了某一点频率的频谱需要计算过去和未来所有时间的信号,而且丢弃了时域的所有信息,图 1.1(引自 Matalb 官方网站)显示了一个由多个频率正弦波叠加构成的信号经过傅里叶变换后在频域的特性。

如果处理的信号是平稳信号(也就是不随时间变化的信号),那么傅里叶变换不会有什么缺陷,但对于非平稳信号,比如前面提到的 Internet 流量控制,即需要区分各种频率成分,而且需要每个时刻附近的频率成分,那么傅里叶分析的方法就无能为力了。实际上,我们需要的是怎么通过频谱分析使得在任何希望的频率范围或频带上取得确定时间间隔的频率信息。而且,因为一个信号的频率与其周期长度成正比,那么对于高频信息,时间间隔要相对小以给出比较好的精度,而对于低频信息,时间间隔要相对宽以保持信息的完整,这就是后面提出的小波变换的根本出发点。

还有一点需要注意的是,正如在傅里叶分析中体现的,傅里叶级数和(积分)傅里叶变换是两个不相关的分析方法,相应地,在小波分析中,也存在小波级数和(积分)小波变换。



图 1.1 正弦波叠加信号的傅里叶变换

1.1.3 窗函数和测不准原理

为了弥补傅里叶变换不能表达随时间变化的频率这个概念,人们提出了窗函数的概念。即提出一个灵活可变的时间—频率窗,使得在这个“窗”内部能够体现频率的信息,而窗和窗之间则反映的是频率随时间的变化。所以这种分析又被称为“时间—频率分析”在这里只介绍一种固定窗的时间—频率分析方法,短时傅里叶变换(Short-Time Fourier Transform, STFT)。

定义:非平凡函数 $\omega \in L^2(\mathbb{R})$ 称为一个窗函数,如果 $xw(x)$ 也是属于 $L^2(\mathbb{R})$ 的。一个窗函数的中心与半径的定义分别是

$$t^* = \frac{1}{\|w\|_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} x |w(x)|^2 dx} \quad (1.4)$$

$$\Delta_w = \frac{1}{\|w\|_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (x - t^*)^2 |w(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.5)$$

如果将这个窗函数取成 Gaussian 函数,那么这个变换就被称为 Gabor 变换。Gaussian 函数的表达式如下:

$$g_a(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{t^2}{4a}} \quad (1.6)$$

以 Gaussian 函数为窗的 Gabor 变换则定义为

$$S(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) g_a(t - \tau) dt \quad (1.7)$$

在式(1.7)中可以看到在傅里叶变换的基础上,加入了 Gaussian 函数来限制需要做分解的函数的时间。随着 τ 的变化, $g_a(t - \tau)$ 确定的时间窗在整个实数轴上移动,这样就可以对不同时段信号逐段进行分析。这样, $S(\omega, \tau)$ 就大致反映了在 τ 时刻,频率为 ω 的信号相对含量。为了使局部的分解有意义,在数学上要求窗函数满足本节的定义,可以验证, Gaussian 函数满足这个定义。

下一个问题就是精度,图 1.2 显示了不同 a 值下的 Gaussian 函数的图形,由这张图可以看出,在 a 值越小的情况下, Gaussian 函数的时间精度越高,也就是用其做短时傅里叶变换的时间窗越小。这个窗的宽度可以通过式(1.8)求得:

$$\Delta_{g_a} = \frac{1}{\|g_a\|_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (x - t^*)^2 |g_a(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \quad (1.8)$$

式(1.8)的右边通过变换可得到如下形式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) g_a(t - b) dt = \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-ib\omega} \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ib\eta} \hat{f}(\eta) g_{1/4a}(\eta - \omega) d\eta \quad (1.9)$$

式(1.9)中 $\hat{f}(\eta)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶变换。这个式子表明,在 $t=b$ 处具有窗函数 g_a 的窗口傅里叶变换和在 $\omega=\eta$ 处具有窗口函数 $g_{1/4a}$ 的 $\hat{f}(\eta)$ 的窗口逆傅里叶变换一致。所以 g_a 的频率分辨率为

$$\Delta_{g_{1/4a}} = \sqrt{\frac{1}{4a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

那么时间窗和频率窗的乘积:

$$(2\Delta_{G_{g_a}})(2\Delta_{H_{g_a}}) = (2\Delta_{g_a})(2\Delta_{g_{1/4a}}) = 2$$