北京联合大学数学教研室 编

高等数学

（下）

清华大学出版社

北京联合大学数学教研室 编

高等数学

(下)

清华大学出版社
北京

内容简介

本书分上、下两册，共由 10 章组成. 上册内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分与定积分、定积分的应用. 下册内容包括多元微分与重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程.

本书是以非重点院校的工科类及经济管理类的本科生及专升本学生为主要对象编写的，在保留本课程的系统性、科学性的前提下，注意分散难点、突出应用，力求通俗易懂、易教易学.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下/北京联合大学数学教研室编. —北京：清华大学出版社，2007.8
ISBN 978-7-302-15158-6

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 北…　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 107800 号

责任编辑：佟丽霞　王海燕
责任校对：赵丽敏
责任印制：何　芉
出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175　　**邮购热线**：010-62786544
投稿咨询：010-62772015　　**客户服务**：010-62776969
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170×230　**印　张**：17.25　**字　数**：300 千字
版　　次：2007 年 8 月第 1 版　　**印　　次**：2007 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：25.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　　产品编号：023753-01

序

我国大学教育近年来有很大发展，不仅大学生人数增加，大学新办专业也在增加．除了传统的理科和工科外，经济管理、农、林、医甚至文科都需要开设数学课程，这为大学数学教育开辟了广阔的天地，同时也提出了不少新的挑战．面对不同专业的培养目标及不同学校的生源特点，如何保证和提高大学数学教学质量成为数学教学改革的新课题．对于大多数一般院校和以数学应用为主要目的非数学专业的学生，数学教育的目标和教学方法，成为近年来讨论的焦点．不少数学家和教育家发表了许多宝贵意见，但毋庸置疑在一般院校教学一线的广大教师，以多年与学生接触的亲身感受不断改进教学方式和调整教学内容，他们的长期思索和教学实践更为珍贵，他们经过多年教学不断完善的数学教材是非常有价值的．

一个刚满周岁的孩子初学走路时，我们不能要求他从爬行一下子就能健步如飞，他开始时跌跌撞撞，但是却充满走路的欲望，因为这可以使他更为独立地观察外面的五彩缤纷的世界，可以去做更多他渴望做的事情．类似地，对于以数学应用为主的大学生，一开始不需要向他们讲述太“严格”的数学和过于完备的内容，只需对于数学内容和方法有一个基本训练，重视讲授数学的应用和思考方式．更重要的是通过教学使学生认识到数学的重要性，建立起对数学的学习兴趣和学习欲望，使较多的学生今后有能力不断完善自己的数学知识，有意识地将数学工具和思考方式应用到工作中去．

北京联合大学的数学教师们经过多年教学和实践，并借鉴了国外大学数学教材的特点，编写了《高等数学》．这本教材充分考虑到一般院校非数学专业大学生的特点，不断

调整数学内容使学生易于接受，重视应用，在多年的数学实践中取得了很好的效果. 我相信本教材的出版会有益于高等院校数学教育事业. 希望本教材在今后更多学校的教学中不断完善，同时也欢迎有适合不同水平学生和不同专业需要的更多数学教材问世.

冯克勤

2007 年春于清华园

前言

本书是以非重点院校的工科类及经济管理类的本科生及专升本学生为主要对象编写的.根据一般院校生源的特点,在保留本课程的系统性、科学性的前提下,深入讨论了教育部最新制订的教学基本要求,参考了国内外同类教材,在编写时对教材的内容及难度进行了适当的调整.例如,将微分中值定理的拉格朗日中值定理放在讨论函数的单调性之前;将柯西中值定理放在用洛必达法则求不定式的极限之前;将泰勒中值定理放在泰勒级数之前,旨在分散难点、突出应用.将部分概念性强的内容放在附录里,旨在通俗易懂、易教易学.在几何直观及应用实例上下工夫,力求最大限度地提高学生的理解力和接受率.标有 * 的内容供学有余力和立志考研的学生深入学习.

在学习过程中,起主导作用的其实是学生自己.与其他学科相比,数学能为学生提供更多独立思考的机会.事实上,学习的过程也是再创造的过程."I hear,I forget. I see, I remember. I do,I understand."这一流行于美国麻省理工学院的话语,正说明这一道理.希望读者通过"看"和"做"本书的内容和习题之后,能够感受到数学工具和思考方式的有用性,并能够在今后从事各种工作时,有意识地采用数学工具和思考方式,从而终生与数学相伴并喜欢数学.

本书分上、下两册,共由10章组成.上册内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分与定积分、定积分的应用.下册内容包括多元微分与重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程.

本书由北京联合大学数学教研室编写,主编陈冬.上册副主编尚学海、崔海英.各章具体分工如下:崔海英编写

第 1 章，尚学海编写第 2 章、第 3 章，陈冬编写第 4 章，常广平编写第 5 章. 参与上册各章习题编写的有崔海英、常广平、张静. 上册各章的总练习题由魏荣编写，第 0 章及附录部分由陈冬、魏荣、崔海英编写. 下册副主编魏荣、张立新. 各章具体分工如下：侯文宇编写第 6 章，史凤丽编写第 7 章，张立新编写第 8 章，魏荣编写第 9 章，车燕编写第 10 章. 参加下册习题编写的有李林杉、崔海英、张立新、曹彩霞. 下册的附录部分由陈冬、魏荣编写. 各章的总练习题由魏荣编写. 全书的框架，统稿由陈冬、魏荣完成.

本书在编写与出版过程中，得到清华大学出版社的大力支持，清华大学韩云瑞教授、北京航空航天大学李心灿教授、北京联合大学李英教授、王勇烈副教授、李宗杰副教授和李大矛副教授仔细审阅了全书的初稿，并提出了修改意见. 北京联合大学赵杰民教授、方新教授、李红星教授也对本书提出了宝贵意见. 杨静博士参与了全书的校对工作，在此一并表示衷心的感谢.

作　者

2007 年 1 月

目录

多元函数微分法及其应用 第6章

在前面几章，我们主要介绍了两个变量间（即一元函数）的函数关系及其变化规律. 事实上，在科学实践中，自变量的个数大多是多于一个的，为此，我们必须研究、学习多元函数的关系及其变化规律. 本章重点介绍二元函数微分学及其应用，得到的一些结果，也可以容易地推广到 n 元函数的场合.

6.1 预备知识

在学习多元函数微分学的理论之前，有必要回忆一些有关向量和空间几何学的知识.

6.1.1 向量

初等数学中，已详细介绍过向量的概念及其运算. 由于初等数学中主要讨论平面上的向量，而多元函数微积分主要用空间中的向量，所以我们把有关平面上向量的概念和结论对应推广到空间中，这里介绍一些常用的结论.

既有大小，又有方向的量叫做**向量**. 在数学上，常用有向线段表示向量，如图 6-1 所示，这个向量可记为$\overrightarrow{AB}$. 当不需要指出起点和终点时，可用粗体字母表示向量，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{F}$ 等. 由于粗体字母不易书写，故书写时可用带箭头的字母表示向量，如$\vec{a}$，$\vec{r}$，$\vec{v}$，$\vec{F}$等.

图 6-1

向量的大小又叫向量的**模**或**长度**. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模，记作$|\boldsymbol{a}|$；向量$\overrightarrow{AB}$的模记作$|\overrightarrow{AB}|$. 模为 1 的向量叫做**单位向量**. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的**单位向量**，记作 $\boldsymbol{a}^{\circ}$.

与平面直角坐标系类似，空间中三条有公共坐标原点和单位长度的两两垂直的数轴构成**空间直角坐标系**，三条数轴分别叫做 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），如图 6-2 所示. 每两个坐标轴都确定一个坐标面，三个坐标面分别为 xOy 面，yOz 面和 zOx 面.

坐标空间中，点 M 与三元有序数组 (x,y,z) 间有一一对应关系，并称 (x,y,z) 为点 M 的坐标，记作 $M(x,y,z)$，如图 6-3.

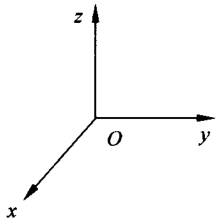

图　6-2

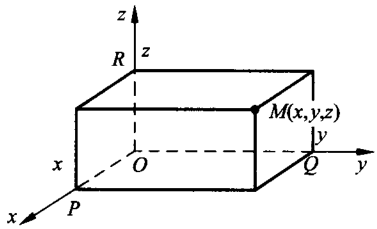

图　6-3

三个坐标面把整个空间分成八个部分，每个部分叫做一个卦限. 由 x 轴，y 轴，z 轴的正半轴确定的卦限为第一卦限. 第一、二、三、四卦限在 xOy 面上方，且从第一卦限起按逆时针方向依次确定. 第五、六、七、八卦限分别在第一、二、三、四卦限下方. 八个卦限依次用字母Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ表示，如图 6-4.

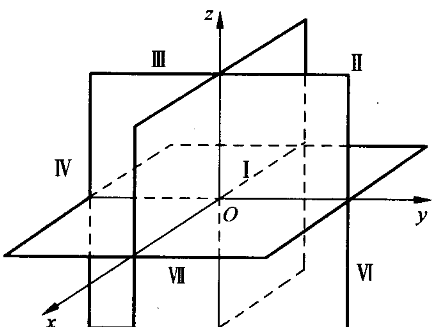

图　6-4

易知点 $A(1,2,3)$ 在第一卦限，点 $B(1,-2,-3)$ 在第八卦限.

通过平移使向量 $\boldsymbol{r}$ 的起点在坐标原点，于是可得如下的一一对应关系：

$$\text{向量终点 } M \leftrightarrow \text{向量 } \boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM} \leftrightarrow \text{有序数组}(x,y,z),$$

此时称向量 $\boldsymbol{r}$ 的终点 M 的坐标 (x,y,z) 为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标，记作 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，并称此式为**向量的坐标表示式**，x,y,z 分别叫做向量 $\boldsymbol{r}$ 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示与 x 轴、y 轴和 z 轴方向相同的单位向量，并称它们为**基本单位向量**. 根据向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标 (x,y,z) 可写出向量 $\boldsymbol{r}$ 按基本单位向量的分解式：

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

已知空间中两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$，则向量

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),$$

A,B 两点间的距离

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

它也等于向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模 $|\overrightarrow{AB}|$.

下面给出两向量的数量积和向量积的定义.

定义 6.1.1 已知两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，称数值 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**，又称**点积**，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，其中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，即点积

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

数量积有下列运算规律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$（$\lambda$ 是一个数）；

(3) 分配律：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

定义 6.1.2 已知两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足：(1) $\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角. (2) $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都垂直，其指向按右手法则（如图 6-5）从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定. 则称 $\boldsymbol{c}$ 为两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**，又称**叉积**，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

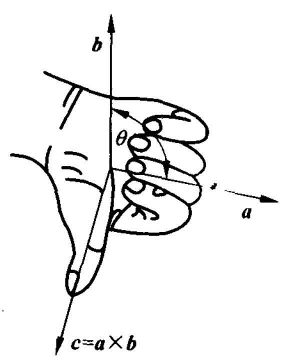

图 6-5

向量积有下列运算规律：

(1) 反交换律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$（$\lambda$ 是一个数）；

(3) 分配律：$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

特别注意的是，两向量的叉积不满足交换律，而满足反交换律，这是因为按右手法则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 和从 $\boldsymbol{b}$ 转向 $\boldsymbol{a}$ 所确定的方向恰好相反.

利用坐标进行向量的运算或判断两向量间的

位置关系是重要的.

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，于是

$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$；

$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$（其中 λ 是一个数）；

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$；

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & y_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k};$$

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$；

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为非零向量，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow$存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\Leftrightarrow$ $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

$\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$表示 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的坐标对应成比例. 需要说明的是，若分母上的某个数为零，则表示分子上对应的数也为零，如可认为 $\boldsymbol{a}=(1,0,2)$ 与 $\boldsymbol{b}=(2,0,4)$ 是坐标对应成比例的两个向量.

例 6.1.1　已知两点 $A(4,0,5)$ 与 $B(7,1,3)$，求向量$\overrightarrow{AB}$的模$|\overrightarrow{AB}|$和与向量$\overrightarrow{AB}$的方向相同的单位向量的坐标.

解　$\overrightarrow{AB}=(7-4,1-0,3-5)=(3,1,-2)$；$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$；与$\overrightarrow{AB}$的方向相同的单位向量的坐标为$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\left(\dfrac{3}{\sqrt{14}},\dfrac{1}{\sqrt{14}},-\dfrac{2}{\sqrt{14}}\right)$.

例 6.1.2　设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求：(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；(2)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；(3)与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都垂直的单位向量.

解　可直接用点积和叉积的计算公式解(1)和(2).

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=1\times2+0\times3+(-1)\times1=1$.

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$.

(3) 注意到与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都垂直的单位向量有方向相反的两个. 由于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都垂直，故与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都垂直的单位向量为

$$\pm\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}=\pm\frac{3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}}{3\sqrt{3}}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}).$$

例 6.1.3　设 $\boldsymbol{a}=(1,p,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,3,-q)$，问：p，q 满足什么条件时

(1)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$; (2)$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$?

解 分别使用两向量垂直和平行的充要条件.

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times2+p\times3+(-2)\times(-q)=2+3p+2q$. 因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直当且仅当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,故 $3p+2q=-2$ 时 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

(2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行当且仅当它们的坐标对应成比例,即$\frac{1}{2}=\frac{p}{3}=\frac{-2}{-q}$,于是当 $p=\frac{3}{2}$,$q=4$ 时 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

例 6.1.4 设$\triangle ABC$ 的顶点为 $A(3,0,2)$,$B(5,3,1)$,$C(0,-1,3)$,求三角形的面积.

解 根据三角形面积公式,有$\triangle ABC$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}\mid\overrightarrow{AB}\mid\cdot\mid\overrightarrow{AC}\mid\sin\theta=\frac{1}{2}\mid\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\mid,$$

其中 θ 为$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角. 因为$\overrightarrow{AB}=(2,3,-1)$,$\overrightarrow{AC}=(-3,-1,1)$,所以

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 3 & -1\\ -3 & -1 & 1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k},$$

故$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+1^2+7^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$,于是 $S=\frac{3}{2}\sqrt{6}$.

例 6.1.5 已知三点 $M(1,1,1)$,$A(2,2,1)$,$B(2,1,2)$,求$\angle AMB$.

解 $\overrightarrow{MA}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{MB}=(1,0,1)$,根据两向量点积的定义有

$$\cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}|\,|\overrightarrow{MB}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2},$$

故$\angle AMB=\frac{\pi}{3}$.

6.1.2 平面及其方程

与平面解析几何类似,在空间解析几何中,曲面被看作点的轨迹并可用三元方程表示.

定义 6.1.3 如果曲面 S 与三元方程 $F(x,y,z)=0$ 有下述关系:

(1) 曲面 S 上任意一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$;

(2) 不在曲面 S 上的任意一点的坐标都不满足方程 $F(x,y,z)=0$.

那么,方程 $F(x,y,z)=0$ 叫做**曲面 S 的方程**,而曲面 S 叫做方程 $F(x,y,z)=0$的**图形**.

平面是最简单的曲面,首先来建立平面的方程.

称与平面垂直的非零向量为平面的**法向量**. 容易知道,平面的法向量不唯一且平面上的任一向量都与该平面的法向量垂直.

现已知平面 Π 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和它的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$. 设 $M(x,y,z)$ 为平面 Π 上的任一点,如图 6-6. 于是向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 必在平面 Π 上,故有 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直,所以

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0.$$

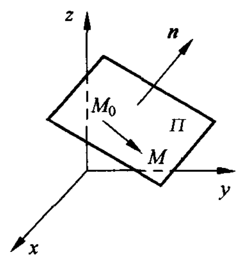

图　6-6

由于

$$\boldsymbol{n}=(A,B,C),\quad \overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0),$$

所以

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

这就是平面 Π 的方程,并称它为**平面的点法式方程**.

例 6.1.6　求过点 $(1,-3,0)$ 且以 $\boldsymbol{n}=(2,-2,3)$ 为法向量的平面的方程.

解　根据平面的点法式方程,得所求平面的方程为

$$2(x-1)-2(y+3)+3z=0,$$

即 $2x-2y+3z=8$.

例 6.1.7　求过三点 $M_1(2,-1,4)$,$M_2(-1,3,-2)$ 和 $M_3(0,2,3)$ 的平面的方程.

分析　要利用平面的点法式方程,必须求出平面的一个法向量的坐标,容易想到可利用叉积.

解　根据叉积的定义,可知 $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$ 可作为平面的法向量 $\boldsymbol{n}$. 因为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(-3,4,-6),\quad \overrightarrow{M_1M_3}=(-2,3,-1),$$

所以

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -3 & 4 & -6\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}=14\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

根据平面的点法式方程,得所求平面的方程为

$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0,$$

即 $14x+9y-z-15=0$.

由于平面的点法式方程是 x,y,z 的一次方程,而任一平面都可以用它上面的一点及它的法向量来确定,所以任一平面的方程都是三元一次方程.

反过来,设有三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0.$$