

HZ BOOKS

21世纪

高等院校电子信息类本科规划教材

信号处理基础

王宏 贾新民 编著



机械工业出版社
China Machine Press

21
世纪

高等院校电子信息类本科规划教材

信号处理基础

王宏 贾新民 编著



机械工业出版社
China Machine Press

本书主要介绍信号处理的基本概念、基本原理和基本方法。全书共分9章,主要内容包
括:信号处理的数学基础、MATLAB简介、信号处理中的基本概念、模拟信号分析、连续系
统和模拟滤波器设计、数字信号分析、离散系统和数字滤波器设计、数字信号处理中的误差、
随机信号分析等。

本书可作为高等院校电子信息工程、通信工程、计算机应用、自动控制等专业的本科教
材,也可供从事信号处理相关工作的专业工程技术人员学习参考。

版权所有,侵权必究。

本书法律顾问 北京市展达律师事务所

图书在版编目(CIP)数据

信号处理基础/王宏,贾新民编著. —北京:机械工业出版社,2007.6
(21世纪高等院校电子信息类本科规划教材)

ISBN 978-7-111-21413-7

I. 信… II. ①王… ②贾… III. 信号处理 - 高等学校 - 教材 IV. TN911.7

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第071233号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号 邮政编码 100037)

责任编辑:冯蕾

北京牛山世兴印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2007年8月第1版第1次印刷

184mm×260mm·18印张

定价:26.00元

凡购本书,如有倒页、脱页、缺页,由本社发行部调换
本社购书热线:(010)68326294

前 言

近年来,随着电子技术和计算机技术的飞速发展,信号处理的基本理论、方法和技术在通信、网络、信息、自动控制、医学工程等领域的应用越来越广泛,所起的作用也越来越关键。目前,信号处理这门课程已经成为电子技术、自动化技术、计算机科学与技术等专业共同的基础理论课程。为了让读者对信号处理的基本理论和技术有一个清晰的认识,同时也为了压缩课时,本书对传统课程信号与线性系统、数字信号处理以及随机信号处理的主要内容进行了整合和调整,省略了部分较繁琐的和难度较大的理论推导,而把重点放在介绍信号处理的本质和基本应用上。鉴于信号处理是一门理论性和实践性都很强的课程,希望读者在学习过程中,多思考书中基本概念的物理意义或工程背景,多注重计算工具(如 MATLAB)的运用,这对现实应用中很多问题的理解和快速解决非常有帮助。

现实世界充满了各种各样的信号,为了便于研究,这些信号在信号处理理论中被抽象为数学上的函数、波形或序列。而处理这些信号的物理系统相应就被抽象或简化为某种线性时不变模型或数学运算。这种高度的抽象使信号处理能应用于各种物理现象的研究,同时也意味着信号处理需要较多的数学知识。因此,在学习信号处理之前非常有必要复习和回顾一下有关的数学知识。本书第1章扼要介绍了各种积分变换和矩阵分析的基本知识。其中,傅里叶变换最为重要,它是确定性信号分析处理的基础。而矩阵分析则在阵列信号处理和数字信号处理等领域中有着广泛的应用。掌握这一章中所讲的数学知识会有助于降低全书的学习难度。

第2章是对 MATLAB 基本操作和使用的简单而必要的介绍。信号处理中的很多计算可以借助数学计算类应用软件(例如 MATLAB)来完成。MATLAB 提供了多个用于信号处理的基本工具箱和高级工具箱,用于系统仿真的 Simulink 模型库,以及与其他数字信号处理硬件的仿真接口。

第3章介绍信号处理中的基本概念,以期让读者对信号处理这门学科有一个全面的概要认识。信号无处不在,本章从信号的基本概念出发,介绍包括冲激信号在内的几种典型信号,以及常用的信号分解方式和分类方式,进而引出系统、信号处理、信号处理系统等概念和基本分析方法。本章是学习后续章节的基础。

第4章介绍模拟信号及其分析方法。现实世界中的信号都是模拟的。这一章首先介绍一些常见和常用的模拟信号,以及这些基本信号的性质。然后在模拟信号的时域分析方法中重点引出卷积和相关这两个重要概念;接着介绍信号的频域分析方法,从周期信号的傅里叶级数分解入手,以傅里叶变换为基础建立非周期信号的频域分析方法。最后,本章详细讨论采样信号的傅里叶变换和重要的采样定理,为模拟信号的数字化分析处理奠定基础。

第5章介绍线性时不变连续系统的概念。首先说明系统时域模型——微分方程的建立和求解方法。接着在拉普拉斯变换的基础上引出系统的频域模型——系统函数,并以信号的冲激函数分解为基础讲解系统冲激响应,以及卷积的主要性质及物理含义。在讨论无失真传输

和理想滤波器时重点阐述了吉布斯现象。最后说明常用模拟滤波器的设计方法和性能分析方法, 以及模拟滤波器的系统实现。

第6章介绍数字信号及其分析方法。尽管数字信号可以独立存在, 并不一定要依赖于某个模拟信号, 但是为了强调模拟世界和数字世界之间的关联, 本章还是先简单介绍模拟信号的数字化问题, 接着介绍一些典型的数字信号, 并引出与模拟信号类似的离散卷积和离散相关运算。然后从离散时间傅里叶变换入手, 重点讲解数字信号的DTFT及其性质。最后详细讨论DTFT的快速算法——FFT及其应用。到目前为止, FFT算法仍然是数字信号处理中最关键的算法之一。

第7章介绍离散系统的基本概念。离散系统的基本数学模型有时域模型(差分方程)和 Z 域模型(系统函数)两种。本章首先讨论这两种模型的建立方法、时域求解方法和 Z 域求解方法等内容。接下来介绍数字滤波器的概念和分类, 突出讲解IIR数字滤波器及FIR数字滤波器的基本特性、设计方法和基本实现结构。具体内容包括: 设计高通、带通、带阻IIR滤波器的频率变换方法; 从模拟原型滤波器开始设计IIR数字滤波器的冲激响应不变法和双线性变换法; FIR数字滤波器的窗函数设计法和频域采样设计法等。此外, 考虑到数字滤波器应用的广泛性, 本章专门辟出一节介绍了MATLAB的数字滤波器设计。本章最后深入探讨了DFT与 Z 变换、频谱分析之间的关系。

第8章分析数字信号处理的主要误差来源。目前信号处理的趋势是把模拟信号转换为数字信号, 然后用数字信号处理(DSP)的方法进行处理, 最后再还原出需要的模拟信号。本章详细讨论了在数字域对实际信号进行处理时必然带来的采样量化误差、有限字长效应和数字谱分析误差等。本章内容对实际的信号处理有较强的指导作用。

第9章介绍随机信号处理。随着计算技术和信息技术的发展, 随机信号处理的应用日渐广泛。前面章节主要讨论了确定性信号的分析处理方法, 而现实世界中更多的是随机信号(例如音乐、图像、视频、网络流量、物价波动等)。随机信号的分析处理离不开概率论和随机过程等数学知识, 因此本章从这些数学知识入手, 简要介绍随机信号的基本概念和处理方法, 内容包括随机信号的功率谱估计、随机信号检测和自适应滤波等。

本书编写过程中, 得到新疆大学冯泽森教授, 昌吉学院贺继宗、严文、陈刚等老师的热情帮助和支持, 谨在此向他们表示真诚的感谢。此外, 本书能够顺利成稿, 还要感谢机械工业出版社王颖编辑的关心和鼓励以及导师向大威教授的教诲。

作者水平有限, 书中难免有不妥之处, 恳请广大读者给予批评指正。

作者

2007年4月

目 录

前言

第 1 章 数学基础 1

1.1 积分变换 1

1.1.1 正交函数分解 1

1.1.2 傅里叶级数 2

1.1.3 傅里叶变换 3

1.1.4 拉普拉斯变换 8

1.1.5 Z 变换 13

1.1.6 离散傅里叶变换(DFT) 17

1.1.7 离散余弦变换(DCT) 19

1.2 矩阵 21

1.2.1 矩阵的定义和基本概念 21

1.2.2 行列式 22

1.2.3 矩阵的秩和逆矩阵 23

1.2.4 矩阵的基本运算 24

1.2.5 分块矩阵 25

1.2.6 特征值和特征向量 25

1.2.7 线性方程组和线性变换 26

1.2.8 相似变换 26

1.2.9 二次型 27

1.2.10 矩阵微积分 28

1.2.11 奇异值分解和主分量
分析 30

习题 32

第 2 章 MATLAB 简介 34

2.1 MATLAB 操作入门 35

2.2 MATLAB 的基本功能 37

2.2.1 数值计算功能 37

2.2.2 MATLAB 符号计算功能 39

2.2.3 MATLAB 图形可视化

功能 39

2.2.4 MATLAB 应用示例 41

2.3 MATLAB 程序设计 43

2.3.1 MATLAB 脚本和函数 43

2.3.2 函数的调用和分类 44

2.3.3 变量类型 45

2.3.4 MATLAB 调用优先级 46

习题 46

第 3 章 基本概念 47

3.1 信号 47

3.1.1 信息与信号 47

3.1.2 信号的分类 48

3.1.3 典型信号 51

3.1.4 信号的分解 55

3.2 系统 57

3.2.1 系统模型及其分类 58

3.2.2 系统函数 59

3.2.3 系统模型和系统分析
方法 60

3.3 信号处理 62

3.3.1 时域处理 62

3.3.2 频域处理 64

3.3.3 信号处理系统 65

习题 66

第 4 章 模拟信号分析 69

4.1 模拟信号的时域分析——卷积

和相关 69

4.1.1 卷积 69

4.1.2 信号的相关分析 71

4.2	周期信号的频域分析——傅里叶级数	74	5.4.2	理想滤波器	116
4.2.1	周期信号的频谱	74	5.4.3	理想滤波器的冲激响应	116
4.2.2	周期信号的功率谱	77	5.4.4	理想滤波器的阶跃响应	117
4.2.3	傅里叶有限项级数	77	5.5	模拟滤波器设计	118
4.3	非周期信号的频谱分析——傅里叶变换	79	5.5.1	实际滤波器的频率特性	118
4.3.1	傅里叶变换与反变换	79	5.5.2	巴特沃思滤波器	119
4.3.2	连续频谱和频谱密度	79	5.5.3	切比雪夫滤波器	121
4.3.3	典型非周期信号的频谱	80	5.5.4	椭圆滤波器	124
4.3.4	傅里叶变换性质应用 举例	83	5.5.5	频率变换	125
4.4	采样信号的傅里叶变换	86	5.5.6	模拟滤波器的性能 分析	126
4.4.1	采样信号	86	5.5.7	模拟滤波器的实现	127
4.4.2	采样信号的频谱	86	习题		128
4.4.3	采样定理	89	第6章	数字信号分析	134
4.4.4	信号的恢复	89	6.1	模拟信号的数字化	134
4.4.5	带通信号的采样	90	6.2	基本的数字信号序列	136
习题		91	6.2.1	常用数字信号序列	136
第5章	连续系统	98	6.2.2	序列的运算	139
5.1	连续系统的数学模型	98	6.3	数字信号的时域分析——卷积和 相关	141
5.1.1	系统的微分方程	98	6.3.1	序列的离散卷积	141
5.1.2	微分方程的解	99	6.3.2	序列的相关分析	143
5.1.3	拉普拉斯变换	101	6.4	离散时间傅里叶变换	147
5.1.4	应用拉普拉斯变换求解 微分方程	104	6.4.1	DTFT的定义	147
5.1.5	系统函数(传递函数)	105	6.4.2	DTFT的基本性质	149
5.2	连续系统的零输入解和零 状态解	109	6.5	数字信号的频域分析——离散 傅里叶变换	150
5.2.1	系统的零输入响应	109	6.5.1	傅里叶变换的离散性与 周期性	150
5.2.2	系统的零状态响应	109	6.5.2	离散傅里叶变换的 定义	152
5.2.3	零状态响应与卷积	110	6.5.3	离散傅里叶变换的 性质	153
5.3	无失真传输	113	6.6	快速傅里叶变换	158
5.3.1	系统的频率特性	113	6.6.1	旋转因子的计算	158
5.3.2	信号无失真传输的 条件	114			
5.4	理想滤波器特性	115			
5.4.1	滤波器	115			

6.6.2	基 2 按时间抽取的 FFT 算法	158	7.7.3	数字滤波器性能分析	211
6.6.3	基 2 按频率抽取的 FFT 算法	161	7.8	数字滤波器的实现结构	212
6.6.4	FFT 算法程序实现	162	7.8.1	IIR 数字滤波器的实现 结构	212
6.6.5	IDFT 的快速计算	164	7.8.2	FIR 数字滤波器的实现 结构	215
6.6.6	FFT 应用举例	164	7.9	离散傅里叶变换 DFT 的进 一步探讨	216
	习题	166	7.9.1	用 DFT[$x(n)$]表示 $Z[x(n)]$	216
第 7 章	离散系统	170	7.9.2	用 DFT[$x(n)$]表示频响 特性	217
7.1	离散系统的数学模型	170	7.9.3	离散频谱 $X(k)$ 与连续 频谱 $X(j\Omega)$ 的关系	218
7.1.1	线性时不变离散系统	170	7.9.4	DFT 的滤波器组等效	219
7.1.2	系统的差分方程	171		习题	221
7.1.3	差分方程的解	172	第 8 章	数字信号处理中的误差	225
7.1.4	Z 变换	173	8.1	采样的高频损失	225
7.1.5	Z 变换在求解差分方程中 的应用	177	8.2	数字化过程中的量化噪声	227
7.1.6	系统函数 $H(z)$	178	8.3	有限字长效应	228
7.2	系统的零状态解和零输入解	180	8.4	数字谱分析	229
7.3	数字滤波器	183	8.4.1	数字谱分析的主要误差 来源	229
7.3.1	数字滤波器的基本 概念	183	8.4.2	数字谱分析参数的 选取	234
7.3.2	数字滤波器的工作 原理	183	8.4.3	不同形式谱分布之间 的转换	235
7.3.3	数字滤波器分类	184		习题	236
7.4	IIR 无限冲激响应数字滤波器 的设计	186	第 9 章	随机信号分析基础	237
7.4.1	冲激响应不变法	186	9.1	概率论	237
7.4.2	双线性变换法	190	9.1.1	随机现象的数学模型	237
7.4.3	IIR 滤波器的设计步骤	191	9.1.2	随机变量	239
7.5	窗函数	196	9.1.3	随机变量的函数	241
7.6	有限冲激响应(FIR)数字 滤波器	199	9.1.4	统计平均和随机变量的 数字特征	243
7.6.1	FIR 数字滤波器的 特点	199	9.1.5	中心极限定理和离散概率 的最大似然估计	246
7.6.2	FIR 滤波器设计	201			
7.7	MATLAB 数字滤波器设计	202			
7.7.1	IIR 滤波器设计	202			
7.7.2	FIR 滤波器设计	205			

9.1.6	信息的度量和信息熵	246	9.3.1	连续随机信号的功率谱密度	254
9.2	随机过程	248	9.3.2	数字谱估计	255
9.2.1	随机过程的平稳性与统计独立性	249	9.3.3	平稳随机信号通过 LTI 系统	257
9.2.2	随机过程的数字特征	249	9.3.4	信号检测的平均法	259
9.2.3	二阶矩过程	250	9.3.5	自适应滤波	261
9.2.4	样本函数的时间平均和遍历过程	251	习题		262
9.2.5	随机序列	252	附录 A	符号说明	264
9.2.6	高斯随机变量和高斯过程	252	附录 B	部分习题答案	267
9.3	随机信号处理	254	参考文献		278

第1章 数学基础

📖 内容提要

本章介绍了信号的正交分解,以及傅里叶级数展开、傅里叶变换、拉普拉斯变换、 Z 变换等积分变换,它们是研究整个信号处理的基础。鉴于数字信号处理的应用越来越广泛,本章还介绍了矩阵的基本概念和运算。限于篇幅,本章对所叙述的数学性质和定理一般不加以证明,对数学的严格性有兴趣的读者可以参考相关书籍。

📖 教学建议

- 本课程是一门用数学工具来分析处理一般物理系统的课程,信号的各种处理和变换通常表现为各种复杂的数学运算。所以,非常有必要把相关的数学知识复习巩固一下。这些数学知识是学好本课程的基本前提和基础。
- 本章介绍的数学知识对信号处理的工程应用非常重要。同时,通过这些数学知识可以进一步理解信号、系统和信号处理的内在本质和联系。
- 本章是以后各章内容相关数学知识的参考,亦可作为日后信号处理实际应用的参考,读者可以直接应用有关结论和公式来解释和分析问题。
- 对于不同的教学安排,1.1.7节、1.2.10节和1.2.11节可作为选修内容。

1.1 积分变换

积分变换通常是指函数(或序列)的傅里叶变换(简称傅氏变换)、拉普拉斯变换(简称拉氏变换)和 Z 变换。积分变换是完全可逆的,即时域函数和其变换域函数之间唯一对应。各种积分变换是相互关联的。其中,傅里叶变换是基础,其他积分变换可以认为是傅里叶变换的推广。引入积分变换,从根本上说有两个目的:一是为了简化信号分析和处理的复杂程度,二是为了深入研究信号与系统的本质特征。

信号(也称为过程)往往表现为时间的函数。习惯上,用 $f(t)$ 表示信号,用 $F_f(\Omega)$, $L_f(s)$, $Z_f(k)$ 分别表示该信号所对应的积分变换。当不至于引起歧义时,本书将省略上述积分变换表示的下标。

1.1.1 正交函数分解

任意函数 $f(t)$ 在 $[a, b]$ 内具有连续的一阶导数和逐段连续的二阶导数时,可以用完备正交函数系来表示,这就是函数的正交分解。正交函数分解是信号分析与处理的基本方法之一。

[定义1] 若两个非零函数 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 满足 $\int_a^b g_1^*(t)g_2(t)dt = 0$,则称 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$

为区间 $[a, b]$ 内的正交函数。

[定义 2] 若非零函数序列 $[g_1(t), g_2(t), \dots]$ 中的任意两个函数 $g_i(t)$ 和 $g_k(t)$ 均满足 $\int_a^b g_i^*(t)g_k(t)dt = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ N_k, & i = k \end{cases}$, 其中 N_k 为常数, 则称该函数序列是区间 $[a, b]$ 内的正交函数系。

[定义 3] 若任意函数 $f(t)$ 在 $[a, b]$ 内有展开式 $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k g_k(t)$, 则称正交函数系 $[g_1(t), g_2(t), \dots]$ 为完备正交函数系。其中, c_k 是展开系数, 也是 $f(t)$ 在以 $[g_1(t), g_2(t), \dots]$ 为基的函数空间中的第 k 维分量的取值。

为求 c_k , 用 $g_i^*(t)$ 乘 $f(t)$ 展开式的两端, 然后分别关于 t 从 a 到 b 积分, 可得

$$\int_a^b g_i^*(t)f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_a^b g_i^*(t)g_k(t)dt = c_i N_i$$

即

$$c_i = \frac{1}{N_i} \int_a^b g_i^*(t)f(t)dt = \frac{\int_a^b g_i^*(t)f(t)dt}{\int_a^b |g_i(t)|^2 dt}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (1-1)$$

常用的完备正交函数系有: 三角函数 $[1, \cos(n\Omega t), \sin(n\Omega t), (n=1, 2, 3, \dots)]$ 和复指数函数 $[e^{jn\Omega t}, (n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)]$ 。其他的完备正交函数系还有: 勒让德 (Legendre) 多项式、切比雪夫 (Chebysheve) 多项式、贝塞耳 (Bessel) 函数和沃尔什 (Walsh) 函数等。

1.1.2 傅里叶级数

在现实世界中存在着各种周期变化的现象。例如, 活塞的机械运动、交流电压、无线电波等。傅里叶级数正是研究这些周期性物理现象的有力工具。三角函数是最基本的周期函数, 通过把复杂的周期函数分解为简单的三角函数的线性组合, 傅里叶级数能简化问题的处理。

[定义 4] 若函数 $f(t)$ 在 $[a, b]$ 内满足如下条件: 1) 具有有限个间断点, 2) 具有有限个极值点, 3) 函数绝对可积, 即 $\int_a^b |f(t)| dt < \infty$; 则称函数 $f(t)$ 在 $[a, b]$ 内满足狄里赫利条件。

若信号 $f(t)$ 的周期为 T (角频率 $\Omega_0 = 2\pi/T$), 且 $f(t)$ 在 $[-T/2, T/2]$ 上满足狄里赫利条件, 则 $f(t)$ 可以展开为如下傅里叶级数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega_0 t + b_n \sin n\Omega_0 t) \quad (1-2)$$

式中, 展开系数分别为

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\Omega_0 t dt, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\Omega_0 t dt, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

合并式 (1-2) 中同频率的正弦项和余弦项, 可得傅里叶级数的另一种表示形式

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\Omega_0 t + \varphi_n) \quad (1-4)$$

式中

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right), \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1-5)$$

在式(1-2)和式(1-4)中, 系数 $a_0/2$ 或 $c_0/2$ 称为 $f(t)$ 的直流分量, 角频率 Ω_0 的分量称为 $f(t)$ 的基波, 角频率为 $n\Omega_0$ 的分量称为 $f(t)$ 的 n 次谐波。系数 c_n 是 $f(t)$ 的 n 次谐波分量的幅值, a_n 、 b_n 分别是 $f(t)$ 的 n 次谐波的余弦分量的幅值和正弦分量的幅值。这说明, 任何周期信号都可以分解为直流分量与各次谐波之和。

将欧拉公式

$$\begin{cases} \cos n\Omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{jn\Omega_0 t} + e^{-jn\Omega_0 t}) \\ \sin n\Omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{jn\Omega_0 t} - e^{-jn\Omega_0 t}) \end{cases}$$

代入式(1-2)可得傅里叶级数的复指数形式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega_0 t} \quad (1-6)$$

式中

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt \quad (1-7)$$

可以证明, 式(1-2)、式(1-4)和式(1-6)中的系数有如下关系

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= \frac{a_0}{2}, \quad F_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad F_{-n} = F_n^* = \frac{a_n + jb_n}{2} \\ |F_n| &= |F_{-n}| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} c_n \\ \arg(F_n) &= \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right), \quad \arg(F_{-n}) = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = -\arg(F_n) \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

F_n 一般是复数。在信号处理中, F_n 称为信号 $f(t)$ 的复频谱, $|F_n|$ 称为信号 $f(t)$ 的幅度谱, $\arg(F_n)$ 称为信号 $f(t)$ 的相位谱。显然, 周期信号的频谱是离散谱, 其幅度谱偶对称, 相位谱奇对称。

在复指数形式的傅里叶级数中出现的负频率, 没有物理意义, 它是数学运算的结果。引入傅里叶级数的复指数形式, 主要是因为复指数更适合数学处理。

若双变量函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 R 上绝对可积, 则可进一步定义二重傅里叶级数。(略)

【例 1.1】 求周期矩形脉冲信号 $p_{\tau T}(t)$ 信号(定义参见附录 A)的复频谱。

解: 由式(1-7)得

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p_{\tau T}(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-jn\Omega_0 t} dt = \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \quad (1-9)$$

1.1.3 傅里叶变换

1. 傅里叶变换的定义

设函数 $f(t)$ 在 $[-\infty, \infty]$ 上满足狄里赫利条件, 则 $f(t)$ 的傅里叶变换定义为

$$F(\Omega) = \text{FT}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (1-10)$$

$F(\Omega)$ 称为 $f(t)$ 的像函数, $f(t)$ 称为 $F(\Omega)$ 的原函数。 $f(t)$ 和 $F(\Omega)$ 构成傅里叶变换对,也简记为 $f(t) \leftrightarrow F(\Omega)$,当 $F(\Omega)$ 已知时,通过如下傅里叶反变换可求得原函数 $f(t)$ 。

$$f(t) = \text{IFT}[F(\Omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (1-11)$$

$F(\Omega)$ 是关于实变量 Ω 的复值函数,令 $F(\Omega) = R(\Omega) + jX(\Omega) = A(\Omega) e^{j\phi(\Omega)}$,则把 $F(\Omega)$ 、 $A(\Omega)$ 、 $\phi(\Omega)$ 、 $A^2(\Omega)$ 分别称为 $f(t)$ 的复频谱密度(简称频谱)、幅度谱密度(简称幅度谱)、相位谱密度(简称相位谱)、能量谱密度(简称能量谱)。

若 $f(t)$ 为实函数,则有

$$\left. \begin{aligned} R(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\Omega t dt \\ X(\Omega) &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin\Omega t dt \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

于是

$$F(-\Omega) = R(-\Omega) + jX(-\Omega) = R(\Omega) - jX(\Omega) = F^*(\Omega) \quad (1-13)$$

可以进一步证明“ $F(-\Omega) = F^*(\Omega)$ ”与“ $f(t)$ 为实函数”互为充分必要条件。

式(1-11)说明, $f(t)$ 可被视为无数个复指数函数之和,其中,每个复指数函数的振幅分别为 $\frac{1}{2\pi} F(\Omega) d\Omega$ 。可见,非周期信号也是由许多简谐分量叠加而成的。与周期信号不同的是,非周期信号包含了从零到无穷的所有频率分量,即 $F(\Omega)$ 是 Ω 的连续函数, $f(t)$ 的频谱是连续谱,因此,称 $F(\Omega)$ 是 $f(t)$ 的频谱密度。

前面定义傅里叶变换时,要求时域函数满足狄里赫利条件。这样一来,对一些常用的函数,例如单位阶跃函数,正弦函数、余弦函数等,就无法确定其傅里叶变换。傅里叶变换的这个限制可以通过引入冲激函数 $\delta(t)$ 和广义傅里叶变换来解决。

在图像信号处理或光学系统中,输入和输出通常是二维的。为此,可以把一维傅里叶变换推广到二维的情况,即可定义如下二维变量函数 $f(x, y)$ 的二重傅里叶变换对

$$\left. \begin{aligned} F(\xi, \eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j(\xi x + \eta y)} dx dy \\ f(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) e^{j(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

进一步,若 $f(x, y) = f_1(x) \times f_2(y)$,则二维傅里叶变换具有可分离性,即

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(y) e^{j(\xi x + \eta y)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{j\xi x} dx \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y) e^{j\eta y} dy = F_1(\xi) F_2(\eta) \end{aligned} \quad (1-15)$$

【例 1.2】 求单位矩形脉冲信号 $p_\tau(t)$ (该信号定义参见附录 A)的傅里叶变换 $F_p(\Omega)$ 。

解:由定义式(1-10)得

$$F_p(\Omega) = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} p_\tau(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{-j\Omega t} dt = \frac{2}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) = \tau \text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \quad (1-16)$$

2. 傅里叶变换的性质

傅里叶变换对反映了信号时域和频域之间的密切关系。表 1-1 列出了傅里叶变换的基本

性质, 这些性质均可通过定义式(1-10)和式(1-11)导出。

表 1-1 傅里叶变换的基本性质

性质名称	时域	频域
已知信号及傅里叶变换	$x(t)$	$X(\Omega)$
	$y(t)$	$Y(\Omega)$
线性	$ax(t) + by(t)$	$aX(\Omega) + bY(\Omega)$
对偶性	$X(t)$	$2\pi x(-\Omega)$
时移特性	$x(t - t_0)$	$X(\Omega) e^{-j\Omega t_0}$
频移特性	$x(t) e^{j\Omega_0 t}$	$X(\Omega - \Omega_0)$
尺度变换特性	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\Omega}{a}\right)$
时间倒置特性	$x(-t)$	$X(-\Omega)$
时域共轭特性	$x^*(t)$	$X^*(-\Omega)$
时域卷积定理	$x(t) * y(t)$	$X(\Omega) Y(\Omega)$
频域卷积定理	$x(t) \cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(\Omega) * Y(\Omega)$
时域微分特性	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j\Omega)^n X(\Omega)$
频域微分特性	$(-jt)^n x(t)$	$\frac{d^n X(\Omega)}{d\Omega^n}$
时域积分性质	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\pi X(0) \delta(\Omega) + \frac{F(\Omega)}{j\Omega}$
频域积分性质	$\pi x(0) \delta(t) - \frac{x(t)}{jt}$	$\int_{-\infty}^{\Omega} X(v) dv$
时域面积函数	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = X(0)$	
频域面积函数		$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) d\Omega = x(0)$
巴塞伐尔公式	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) Y(-\Omega) d\Omega$	
	$P = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) ^2 d\Omega$, P 表示信号能量	
周期函数的巴塞伐尔公式	$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt = c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 c_n ^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n ^2$, P 表示为信号功率	

3. 常用函数的傅里叶变换

运用傅里叶变换的定义和性质, 可计算出一些常用函数的傅里叶变换, 见表 1-2。

表 1-2 常用信号的傅里叶变换

名称	时域	频域
冲激函数	$\delta(t)$	1
	$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\Omega t_0}$
常数	1	$2\pi\delta(\Omega)$
复指数函数	$e^{j\Omega_0 t}$	$2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$
一般周期函数	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega_0 t}$	$F(\Omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\Omega - n\Omega_0)$
正弦函数	$\sin\Omega_0 t$	$j\pi[\delta(\Omega + \Omega_0) - \delta(\Omega - \Omega_0)]$
余弦函数	$\cos\Omega_0 t$	$\pi[\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)]$
单边指数函数	$e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{\alpha + j\Omega}$

(续)

名称	时域	频域
双边指数函数	$e^{-a t } \operatorname{sgn}(t)$	$-j \frac{2\Omega}{a^2 + \Omega^2}$
符号函数	$\operatorname{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\Omega}$
双曲函数	$1/t$	$-j\pi \cdot \operatorname{sgn}(\Omega)$
阶跃函数	$u(t)$	$\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega}$
斜变函数	$tu(t)$	$j\pi\delta'(\Omega) - \frac{1}{\Omega^2}$
矩形脉冲函数	$p_\tau(t)$	$\tau \operatorname{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$
Sa(t) 函数	$\frac{\Omega_c}{2\pi} \operatorname{Sa}\left(\frac{\Omega_c t}{2}\right)$	$p_{\Omega_c}(\Omega)$
余弦脉冲函数	$p_\tau(t) \cos\Omega_0 t$	$\frac{\tau}{2} \left\{ \operatorname{Sa}\left[\frac{(\Omega + \Omega_0)\tau}{2}\right] + \operatorname{Sa}\left[\frac{(\Omega - \Omega_0)\tau}{2}\right] \right\}$
高斯函数	$G_a(t) = e^{-at^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\Omega^2}{4a}}$

【例 1.3】 求升余弦脉冲函数 $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos t), & -\pi \leq t \leq \pi \\ 0, & |t| \geq \pi \end{cases}$ 的傅里叶变换。

解法 1: 直接利用傅里叶变换定义式。

$$\begin{aligned} F(\Omega) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\Omega t} dt + \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jt} e^{-j\Omega t} dt + \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jt} e^{-j\Omega t} dt \\ &= \pi \operatorname{Sa}(\Omega\pi) + \frac{\pi}{2} \operatorname{Sa}[(\Omega - 1)\pi] + \frac{\pi}{2} \operatorname{Sa}[(\Omega + 1)\pi] \\ &= -\frac{\sin(\Omega\pi)}{\Omega(\Omega^2 - 1)} \end{aligned}$$

解法 2: 利用傅里叶变换的频移性质。

把升余弦脉冲信号视为周期信号 $\frac{1 + \cos t}{2}$ 与脉冲宽度为 2π 的矩形脉冲相乘, 即

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}(1 + \cos t) \cdot p_{2\pi}(t) \\ &= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^{jt} + e^{-jt}) \right] \cdot p_{2\pi}(t) \end{aligned}$$

$p_\tau(t)$ 的傅里叶变换为 $\tau \operatorname{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$, 由频移性质可得

$$\begin{aligned} F(\Omega) &= \pi \operatorname{Sa}(\Omega\pi) + \frac{\pi}{2} \operatorname{Sa}[(\Omega - 1)\pi] + \frac{\pi}{2} \operatorname{Sa}[(\Omega + 1)\pi] \\ &= -\frac{\sin(\Omega\pi)}{\Omega(\Omega^2 - 1)} \end{aligned}$$

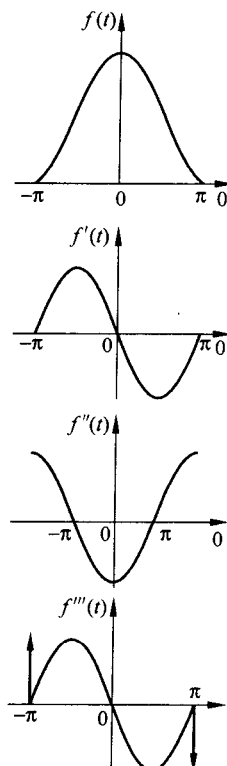


图 1-1 例 1.3 图

解法 3: 利用傅里叶变换的时域微分特性。

$$\begin{cases} f'(t) = -\frac{1}{2}\sin t & (1-17) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''(t) = -\frac{1}{2}\cos t, \quad -\pi \leq t \leq \pi & (1-18) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'''(t) = \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}[\delta(t+\pi) - \delta(t-\pi)] & (1-19) \\ \quad = -f'(t) + \frac{1}{2}[\delta(t+\pi) - \delta(t-\pi)] \end{cases}$$

考虑到 $f'''(t)$ 在 $\pm\pi$ 处存在间断点, 所以求导后 $f'''(t)$ 中包含冲激函数。对式(1-19)求傅里叶变换可得

$$(j\Omega)^3 F(\Omega) = -(j\Omega)F(\Omega) + \frac{1}{2}(e^{j\Omega\pi} - e^{-j\Omega\pi})$$

求解该方程可得

$$F(\Omega) = -\frac{\sin(\Omega\pi)}{\Omega(\Omega^2 - 1)}$$

【例 1.4】求高斯函数 $f(t) = e^{-at^2}$ 的傅里叶变换。

解法 1: 直接利用傅里叶变换定义式。

$$\begin{aligned} F(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t^2 + \frac{j\Omega t}{a})} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a[t^2 + 2\frac{j\Omega t}{2a} + (\frac{j\Omega}{2a})^2 - (\frac{j\Omega}{2a})^2]} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t + \frac{j\Omega}{2a})^2 + a(\frac{j\Omega}{2a})^2} dt = e^{-\frac{\Omega^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t + \frac{j\Omega}{2a})^2} dt \\ &\xrightarrow{\text{令 } u = t + \frac{j\Omega}{2a}} = e^{-\frac{\Omega^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2} du = 2e^{-\frac{\Omega^2}{4a}} \int_0^{\infty} e^{-au^2} du \\ &\xrightarrow{\text{查定积分表}} = 2e^{-\frac{\Omega^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{4a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\Omega^2}{4a}} \end{aligned}$$

解法 2: 利用时域微分和频域微分性质。

$$f'(t) = -2ate^{-at^2} = -2atf(t) = -j2a[(-jt)f(t)] \quad (1-20)$$

对式(1-20)两边同时进行傅里叶变换得

$$j\Omega F(\Omega) = -j2aF'(\Omega)$$

$$\frac{dF(\Omega)}{F(\Omega)} = -\frac{\Omega}{2a} d\Omega$$

对式(1-20)两边同时积分得

$$\ln F(\Omega) = -\frac{1}{4a}\Omega^2 + C$$

$$F(\Omega) = Ke^{-\frac{1}{4a}\Omega^2}$$

下面利用频域面积性质 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) d\Omega = x(0)$ 来确定常数 K

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Ke^{-\frac{1}{4a}\Omega^2} d\Omega = \frac{2\sqrt{a}K}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{\Omega}{2\sqrt{a}})^2} d\frac{\Omega}{2\sqrt{a}} = \frac{4\sqrt{a}K}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\Omega'^2} d\Omega'$$

$$\xrightarrow{\text{查定积分表}} = \frac{4\sqrt{a}K}{2\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = f(0) = 1$$

可得

$$K = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

另外,也可以利用巴塞伐尔定理 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\Omega)|^2 d\Omega$ 确定 K 。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-at^2}|^2 dt = \frac{K^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-\frac{1}{4a}\Omega^2}|^2 d\Omega \quad (1-21)$$

因为 K 是常数,不妨令式(1-21)中的 $a = \frac{1}{2}$, 则 $K = \sqrt{2\pi}$ 。把此时的 $f(t)$ 记为 $g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, 其傅里叶变换为 $\sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\Omega^2}$ 。令 $f(t) = g(\sqrt{2at})$, 根据尺度变换性质可得, $f(t)$ 的傅里叶变换为

$$\frac{1}{\sqrt{2a}} \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\Omega}{\sqrt{2a}})^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{1}{4a}\Omega^2}$$

即, 高斯函数的傅里叶变换是另一个高斯函数。

解法 3: 当 a 给定时, 例如 $a = 1$, $f(t)$ 的傅里叶变换及其逆变换可直接利用 MATLAB 函数进行计算, 如下所示。

```
syms t w;  
F = fourier( exp( -t^2), t, w),  
f = simplify( ifourier(F))
```

程序运行结果为:

```
F = pi^(1/2) * exp( -1/4 * w^2)  
f = exp( -t^2)
```

1.1.4 拉普拉斯变换

当 $f(t)$ 不满足绝对可积条件时, 其傅里叶变换就不存在。这时, 若引入一个收敛因子 $e^{-\sigma t}$, 使函数 $f(t)e^{-\sigma t}$ 收敛, 则 $f(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换就一定存在。把 $f(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换定义为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换。

与傅里叶变换相比, 拉普拉斯变换还有如下两个重要作用: 1) 可以把连续系统的数学模型——微分方程, 转换为简单的代数方程, 从而简化系统求解过程; 2) 以拉普拉斯变换为基础可以定义连续系统的传递函数。

1. 拉普拉斯变换的定义

拉普拉斯变换有单边和双边之分。若没有特别说明, 本书中的拉普拉斯变换均指单边拉普拉斯变换。

连续函数 $f(t)$, ($t \geq 0$) 的拉普拉斯变换定义为

$$L(s) = \text{LT}[f(t)] = \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (1-22)$$

式中, 积分下限取 0_- 而不是 0 或 0_+ , 这样是为了将冲激函数 $\delta(t)$ 及其导函数纳入拉普拉斯变换的范围。当不引起歧义时, 可省略积分下限下角标的“-”号。其中, $s = \sigma + j\Omega$ 为复变量。通常把拉普拉斯变换所在的复频域(即复变量 s 所定义的域)称为 s 域。 $L(s)$ 称为 $f(t)$ 的