

王后雄学案

教材完全解读

总策划：熊 辉



修订版

高二数学(上)

丛书主编：王后雄

本册主编：马春华



中国书年出版社

高中数学

教材完全解读

必修3 必修4



必修3

第三版(上)

主编：王长华
副主编：王长华

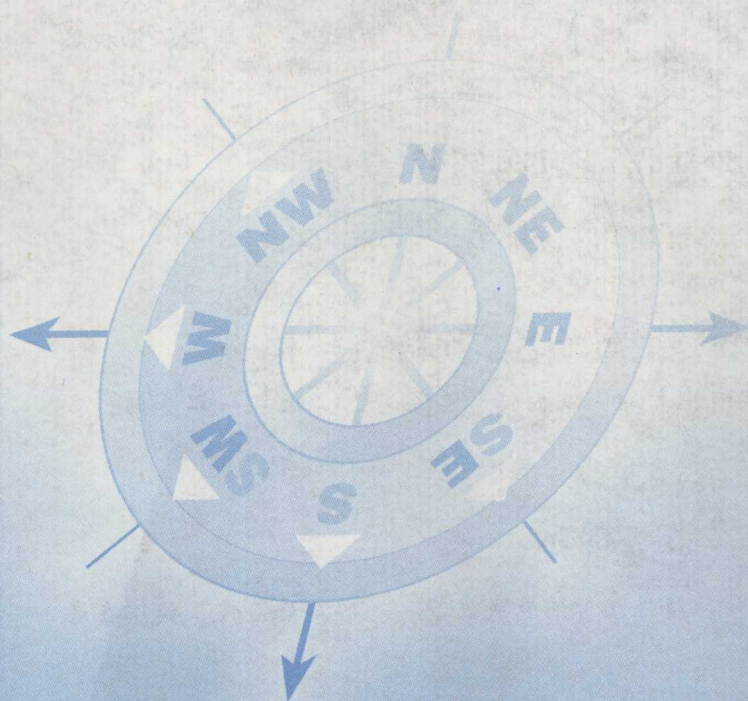


人民教育出版社

王后雄学案

教材完全解读

高二数学（上）



主编：马春华

编委：郑晓玲 章雄钢

周建国 左建华

吴海林 胡福民

秦 俭 程 林

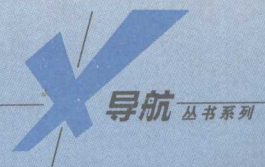
马建华 丁仁贵

姚火生 郑祥贵

刘小燕 黄光文

张 莹 张新平

肖建章 王新佑



中国青年出版社

(京)新登字 083 号

图书在版编目(CIP)数据

教材完全解读: 2008 年修订版. 高二数学. 上/马春华主编. —5 版. —北京:
中国青年出版社, 2007
ISBN 978-7-5006-5312-7

I. 教... II. 马... III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 030153 号

策 划: 熊 辉
责任编辑: 李 杨
封面设计: 小 河

教材完全解读
高二数学

中国青年出版社出版 发行

社址: 北京东四 12 条 21 号 邮政编码: 100708

网址: www.cyp.com.cn

编辑部电话: (010)64034328

北京中青人出版物发行有限公司电话: (010)64017809

聚鑫印刷有限责任公司印刷 新华书店经销

889×1194 1/16 13.5 印张 365 千字

2003 年 7 月北京第 1 版 2007 年 4 月北京第 5 版 2007 年 4 月第 15 次印刷

印数: 205001—230000 册

定价: 19.70 元

本书如有任何印装质量问题, 请与出版处联系调换

联系电话: (010)84035821

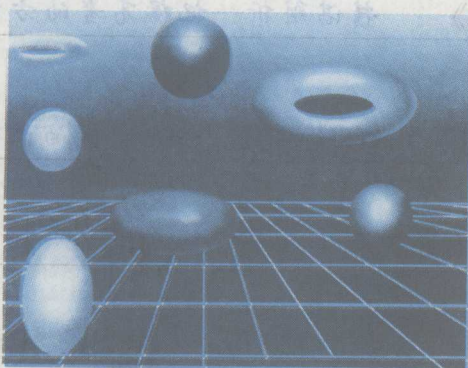
知识结构图解·名师学法指津	1
---------------	---

第六章 不等式

6.1 不等式的性质	4
6.2 算术平均数与几何平均数	11
6.3 不等式的证明	19
6.4 不等式的解法举例	28
6.5 含有绝对值的不等式	36
单元知识梳理与能力整合	44
知识与能力同步测控题	52



第七章 直线和圆的方程



7.1 直线的倾斜角和斜率	54
7.2 直线的方程	60
7.3 两条直线的位置关系	67
7.4 简单的线性规划	76
7.5 曲线和方程	85
7.6 圆的方程	92
单元知识梳理与能力整合	104
知识与能力同步测控题	109

第八章 圆锥曲线方程

8.1 椭圆及其标准方程	111
8.2 椭圆的简单几何性质	119
8.3 双曲线及其标准方程	130
8.4 双曲线的简单几何性质	137
8.5 抛物线及其标准方程	147
8.6 抛物线的简单几何性质	156
单元知识梳理与能力整合	164
知识与能力同步测控题	178



期末测试卷	180
-------	-----

答案与提示	181
-------	-----

知识与方法

阅读索引

第六章 不等式

- 6.1 不等式的性质
 - 1. 不等式的有关概念 4
 - 2. 实数的运算性质与大小顺序间的关系 4
 - 3. 不等式的性质 5
 - 4. 比较两数(式)大小的方法 6
 - 5. 利用不等式的性质,探求不等式成立的条件或判断命题的真假 6
 - 6. 利用不等式的性质证明不等式 6
 - 7. 利用不等式的性质,求取值范围等问题 7
 - 8. 反证法证明不等式 7
 - 9. 不等式的性质与函数的联系 7
 - 10. 不等式性质的应用 8
- 6.2 算术平均数与几何平均数
 - 1. 一个重要的不等式 11
 - 2. 算术平均数与几何平均数定理 11
 - 3. 定理 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (a, b 为正数)的推广 12
 - 4. 最值定理 12
 - 5. 利用均值不等式比较实数大小或证明不等式 12
 - 6. 利用定理求最值 13
 - 7. 谨防利用均值不等式的误区 13
 - 8. 运用重要不等式解决实际问题 14
 - 9. 重要不等式与函数的综合问题 14
 - 10. 运用不等式解决问题时的变形配凑技巧 14
- 6.3 不等式的证明
 - 1. 比较法证明不等式 19
 - 2. 综合法证明不等式 19
 - 3. 分析法证明不等式 20
 - 4. 三种证明不等式的基本方法的横向联系 20
 - 5. 不等式证明的其他方法 21
 - 6. 不等式的证明与数学学科其他知识板块的交汇 22
 - 7. 利用不等式的证明处理实际应用问题 23
 - 6.4 不等式的解法举例
 - 1. 一元一次、一元二次不等式(组)的解法 28
 - 2. 含绝对值的不等式的解法 28
 - 3. 分式不等式的解法 29
 - 4. 高次不等式 29
 - 5. 把握三个“一元二次”的联系及其综合运用 29
 - 6. 利用转化思想将无理不等式化为一元一次、一元二次、分式、高次不等式的方法 30
 - 7. 解指数不等式、对数不等式的技巧 30
 - 8. 较复杂含绝对值不等式的解法探讨 30
 - 9. 利用分类思想解含参数的不等式 31
 - 10. 不等式的解法在函数中的应用 31
 - 11. 利用数形结合的思想解不等式 31
 - 6.5 含有绝对值的不等式
 - 1. 绝对值的基本概念和基础知识 36
 - 2. 关于绝对值不等式的两个定理及推论 36
 - 3. 定理中等号成立的条件 36
 - 4. 含绝对值不等式的几何意义 37
 - 5. 含绝对值不等式的证法和技巧 37
 - 6. 含绝对值不等式的解法 38
 - 7. 较复杂的含绝对值不等式的解法 38
 - 8. 方程和函数与含绝对值不等式的综合问题 39

第七章 直线和圆的方程

7.1 直线的倾斜角和斜率

- 1. 直线方程的概念 54
- 2. 直线的倾斜角与斜率 54
- 3. 直线的方向向量 55
- 4. 求直线斜率的方法 55
- 5. 求直线倾斜角的方法 56
- 6. 直线的倾斜角与斜率之间的转化方法 56
- 7. 利用斜率观点处理三点共线问题 56
- 8. 倾斜角与三角函数的综合交汇问题 57
- 9. 斜率公式的几何特征探究 57
- 7.2 直线的方程
 - 1. 直线方程的几种形式 60
 - 2. 直线方程几种形式的再认识和理解 60
 - 3. 直线方程的参数形式及其理解 61
 - 4. 直线方程形式之间的转换方法 61
 - 5. 直线方程形式的灵活选择技巧 62
 - 6. 直线截距式方程的应用 62
 - 7. 直线的参数方程的简单应用 62
 - 8. 由直线方程的形式拓展迁移的创新变化说明 63
 - 9. 利用设而不求的方法求直线方程 63
 - 10. 利用直线方程的知识解决实际应用问题 63
- 7.3 两条直线的位置关系
 - 1. 本节重点是两条直线平行和垂直的充要条件,直线 l_1 和 l_2 的夹角,直线 l_1 到 l_2 的角以及点到直线的距离 67
 - 2. 两条直线位置关系的判定方法 68
 - 3. 到角公式和夹角公式的应用方法技巧 68
 - 4. 直线系方程及其应用 69
 - 5. 点到直线的距离公式的应用 70
 - 6. 由平面上两直线的位置关系拓展为对称性问题 70

7. 光线的入射、反射问题的数学处理的创新能力	71
8. 三角形中角平分线问题的处理技巧	72
9. 平面上的点与直线上的点有关距离的最值问题的处理方法研究	72
7.4 简单的线性规划	
1. 二元一次不等式表示平面区域	76
2. 线性规划的有关概念	76
3. 二元一次不等式表示平面区域的再认识	77
4. 二元一次不等式组表示平面区域的方法	77
5. 求线性目标函数在约束条件下的最值	77
6. 简单的线性规划的实际应用问题的求解方法	78
7. 含绝对值不等式表示的平面区域的作法	79
8. 利用二元一次不等式表示的平面区域的相关知识解决方程或解析几何问题	79
9. 寻找整点最优解的方法	80
7.5 曲线和方程	
1. 已知方程求曲线	86
2. 已知曲线求方程	86
3. 曲线的交点	86
4. 交点问题与一元二次方程根的分布的综合运用	87
5. 曲线方程与其他数学知识的交汇问题	88
7.6 圆的方程	
1. 确定圆的方程的方法	93
2. 直线与圆的位置关系相关问题的处理方法	94
3. 两圆位置关系的判定方法	95
4. 利用“数形结合”的方法将代数问题转化为几何问题的能力	96

5. 圆系方程的应用能力	96
6. 利用圆的参数方程解决某些问题的方法	97
7. 利用圆的方程, 解决实际问题的能力	97

第八章 圆锥曲线方程

8.1 椭圆及其标准方程

1. 椭圆的定义	111
2. 椭圆的标准方程	111
3. 椭圆的定义的应用	111
4. 利用待定系数法确定椭圆的标准方程	113
5. 直线与椭圆的位置关系问题	113
6. 直线和椭圆相交弦有关的综合问题	114
7. 椭圆定义的创新应用	115
8.2 椭圆的简单几何性质	
1. 椭圆的几何性质	119
2. 椭圆第二定义	120
3. 椭圆的参数方程	120
4. 利用待定系数法, 求椭圆的标准方程	120
5. 椭圆的两种定义的理解和运用	121
6. 椭圆的焦半径及其应用	121
7. 椭圆离心率的理解和灵活运用	122
8. 椭圆参数方程的应用	122
9. 与椭圆相关的应用问题的数学处理能力	123
10. 椭圆中的最值问题	123
11. 椭圆与代数知识的综合问题	124

8.3 双曲线及其标准方程

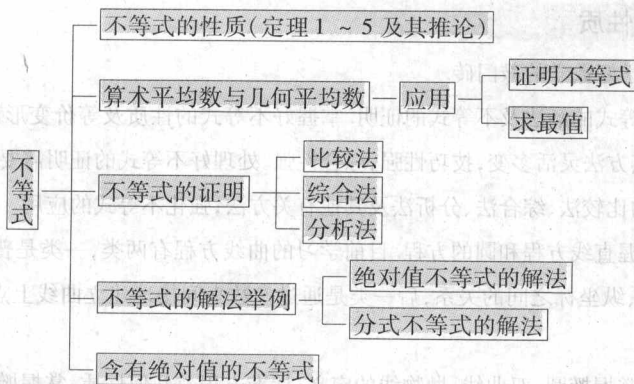
1. 双曲线的定义	130
2. 双曲线的标准方程	130
3. 双曲线定义的运用	130
4. 利用待定系数法求双曲线的	

标准方程	131
5. 直线与双曲线的位置关系问题	132
6. 直线与双曲线位置关系的综合问题	132
7. 与双曲线相关的应用性问题	133
8.4 双曲线的简单几何性质	
1. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的简单几何性质	137
2. 双曲线的第二定义	138
3. 两种特殊双曲线	138
4. 与渐近线有关的问题的处理方法	139
5. 双曲线第二定义的应用	139
6. 双曲线弦中点问题的处理方法	141
7. 直线与双曲线的交点问题	141
8. 与双曲线有关的综合问题	142
8.5 抛物线及其标准方程	
1. 抛物线的定义	147
2. 抛物线的标准方程	147
3. 定义的应用	148
4. 焦半径公式及焦点弦问题	148
5. 直线和抛物线的位置关系问题	149
6. 抛物线上存在两点关于直线对称的问题	150
7. 与抛物线相关的最值问题的处理方法	150
8.6 抛物线的简单几何性质	
1. 椭圆、双曲线、抛物线的统一定义	156
2. 注意三个结论	156
3. 抛物线标准方程的探求	156
4. 弦中点轨迹问题	157
5. 与抛物线有关的最值问题的再研究	157
6. 与抛物线有关的应用问题的处理方法	158
7. 与抛物线有关的综合问题的处理方法	158

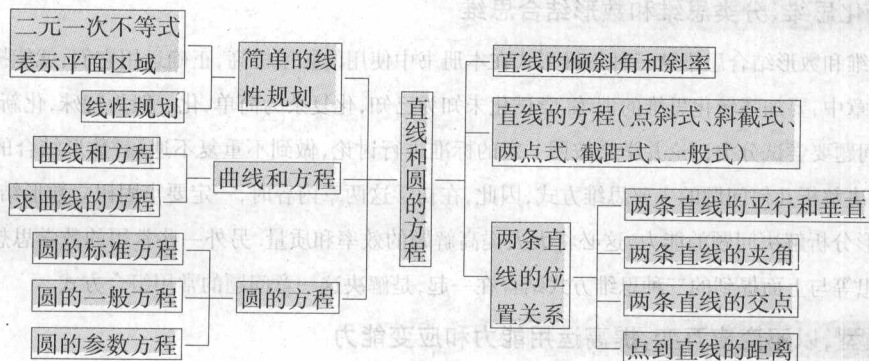
知识结构图解 · 名师学法指津

一、知识结构图解

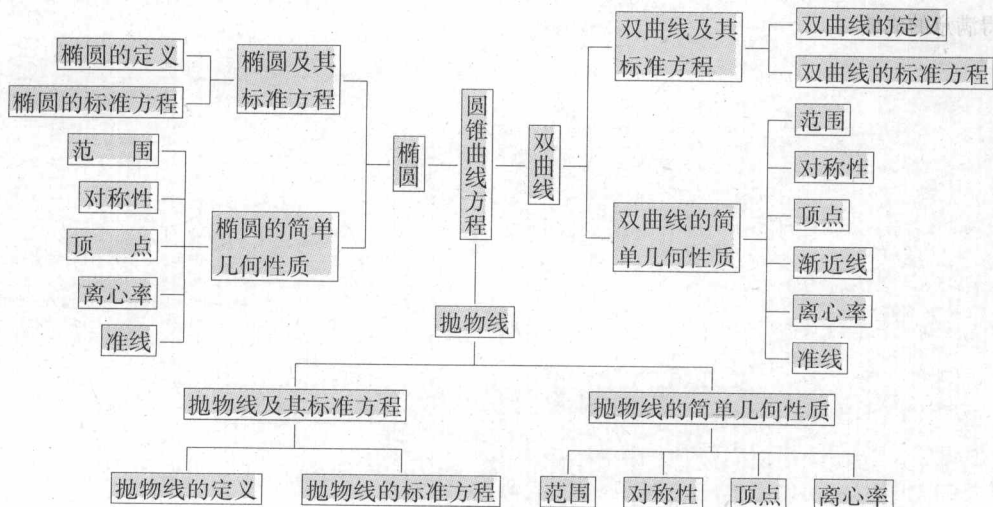
1. 不等式单元知识结构



2. 直线与圆单元知识结构



3. 圆锥曲线单元知识结构



二、名师学法指津

本书包括不等式、直线和圆的方程、圆锥曲线方程三章.这三章内容在整个高中数学中占有重要地位,在历年数学高考试题中占有相当高的比例.要学好本册内容,必须从以下几个方面入手:

1. 熟练掌握基本概念及性质

掌握数学基本概念及性质是学好数学的敲门砖.

不等式这一章重点内容是不等式的解法及不等式的证明.掌握好不等式的性质及等价变形原则是学好本章的关键.不等式的证明没有固定的模式可以套用,其方法灵活多变,技巧性强,综合性强.处理好不等式的证明需要熟练掌握不等式的基本性质、重要不等式及定理;掌握不等式证明的比较法、综合法、分析法及其他有关方法;强化不等式的应用.

直线和圆的方程这一章要掌握直线方程和圆的方程.目前学习的曲线方程有两类,一类是普通方程,另一类是参数方程.前一类是直接给出了曲线上的点的横、纵坐标之间的关系,后一类是通过参数来间接地建立曲线上点的横、纵坐标之间的关系.两类方程在处理具体问题时各有其特点.

圆锥曲线方程这一章要熟练掌握椭圆、双曲线、抛物线的定义、标准方程及几何性质.掌握椭圆的参数方程.掌握这些最基本的东西,犹如拿着打开本幢数学宝库大门的钥匙,就能够从容应对各种变化形式,熟练掌握其在各种情况下的运用.

2. 重点培养转化思维、分类思维和数形结合思维

转化思维、分类思维和数形结合思维这三种思维形式在本册书中使用的频率极高,正确运用它们,就能提高解题的速度与正确率.在本书的不等式一章中,要加强转化思维的训练,尝试化未知为已知,化复杂为简单,化一般为特殊,化新问题为已解决的问题;遇到能够分类讨论的问题要尝试分类讨论并学会按照一定的标准进行讨论,做到不重复不遗漏;数形结合的思维在后两章内容中运用得非常普遍,是解决解析几何问题的主要思维方式,因此,在初学这两章内容时,一定要牢固树立数形结合思想,养成将问题转移到图形中并利用图形分析解决问题的能力,这必将大大提高解题的效率和质量.另外一些常用的数学思想,如方程思想、函数思想、对称思想、参数思想等与上面提到的三种思维方式结合在一起,是解决这一章问题的常用组合方式.

3. 掌握基本题型,以不变应万变,提高运用能力和应变能力

在每章数学知识中都包含了若干典型问题,解决了这些典型问题,就能应变千变万化的题目.本书精选了大量典型题例,经过精心编排形成一个科学的体系.按照这个体系进行合理的训练,就能掌握典型题型,从而举一反三,提高自己的运用能力和应变能力,最终能够取得满意的成绩.

第六章

不等式

大纲单元知识

1. 单元知识阐述

(1) 本章主要内容包括不等式的性质、不等式的证明以及不等式的解法.

(2) 要注意与一元一次不等式、一元二次不等式、整式方程、函数、三角等知识的联系,以便对不等式知识有一个全面、完整的了解与认识.

(3) 注意对不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 和 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a>0, b>0)$ 的理解、记忆,正确、灵活地应用其解决问题,尤其是在正确的使用上下功夫.

(4) 本章的重点内容是不等式的解法及不等式的证明.掌握好不等式的性质及等价变形原则是学好本章的关键.证明不等式没有固定的模式可以套用,它的方法灵活多变,技巧性强,综合性强.要处理好不等式的证明必须注意:

① 熟练掌握不等式的基本性质,重要不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 及定理 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a>0, b>0)$.

② 认真体会并掌握不等式证明的基本方法:比较法、综合法、分析法.

③ 不断地总结证明不等式的规律和技巧,不断地从正反两个方面汲取解题的经验和教训.

2. 考纲与大纲要求

(1) 掌握不等式的性质及证明,性质要记准、记熟,能灵活应用.

(2) 掌握两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数定理,并能准确、灵活地应用其解题.

(3) 掌握不等式的证明方法,会用分析法、综合法、比较法证明简单的不等式.

(4) 掌握有关不等式的解法,做到熟、准、快.

(5) 理解绝对值不等式 $|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$,掌握简单的绝对值不等式的解法.

3. 学习建议

在学习不等式时,应以“基本性质”(不等式的基本性质)为载体;以“基本方法”(解不等式及不等式证明的基本方法)为主线;以“灵活运用”为目标,纵横联系,融会贯通.

在解不等式时,要熟练掌握解不等式的基本思想——化归与转化,即将不熟悉的不等式化归为熟悉的不等式,而转化的依据是不等式的性质.在解含有参数的不等式时,并非一见到含有参数就马上讨论,而是在需要讨论时才讨论.

在证明不等式时,要掌握证明不等式的基本方法(比较法、分析法、综合法、换元法、放缩法、判别式法、反证法等),注意总结归纳各种方法的特点,熟练地掌握其方法,并灵活地运用这些方法来证明不等式.

要强化不等式的应用意识.要注意建立不等式模型来求参数的取值范围或解决一些实际应用题,而建立不等式的常用途径有:(1)利用几何意义;(2)利用判别式;(3)应用变量的有界性;(4)应用函数的单调性;(5)应用均值不等式.

高考命题趋向

不等式是中学数学的基础和重要部分,是高等数学的重要工具,它可以渗透到中学数学的很多章节中去,又加上它在实际生活中的广泛应用,决定了它将是永不衰退的高考热点.近几年的高考试题中,从题型上看,在客观题中,主要考查不等式性质、比较大小、解简单的不等式;在解答题中,主要考查解不等式(往往需要对所含参数进行分类讨论),不等式在实际生活中的应用,用不等式研究函数性质,方程解的讨论,两线位置关系的讨论;从难度上看,不等式部分在高考题中常以基础题、中档题、高档题的形式出现.

1. 关于不等式性质的考查,主要有:(1)根据给定的条件利用不等式的性质,判断能否成立的不等式问题,侧重讨论不等式关系;(2)利用不等式的性质、实数性质及函数性质进行数值大小的比较;(3)判断不等式中条件与结论的关系,是充分条件或者必要条件还是充要条件.

2. 关于不等式的证明方法主要有:比较法、综合法、分析法.题型多以选择题、证明题和解答题出现.不等式证明及利用函数的单调性是命题热点.选择题、填空题为容易题,解答题为中等题和稍难题,解不等式试题大多含有参数,考查分类讨论的思想.

3. 不等式是研究方程和函数的重要工具,在历届高考试题中,多次用不等式解决函数的定义域、值域、最值问题、函数的单调性以及用不等式来讨论方程的根与系数的关系和解决实际问题等.

4. 根据高考在知识的交汇点命题这一特点,不等式又能与所有数学知识构成广泛的联系,仍需注意与函数、数列、解析几何、三角的综合问题,还应注意以下几方面:

(1)以导数为载体的导数、不等式、函数的综合题.

(2)与几何问题比,代数不等式证明更抽象,对学生直觉思维能力、逻辑推理能力的要求更高,一般说来具有较好的区分度,它仍将出现在高考压轴题位置上.

(3)还要注意不等式与立体几何以及平面向量知识的综合问题.

5. 高考热点

证明不等式(理科)、解不等式、求参数取值范围、不等式的应用一直是高考命题的热点.其中证明不等式主要是与函数、数列、导数、解析几何综合在一起来命题,而不等式应用既有与学科内其他知识的综合问题,又有不等式的实际应用问题.

6.1 不等式的性质

重难点聚焦

1. 不等式的有关概念

(1)不等式的定义

用不等号($<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\neq$)表示不等关系的式子叫不等式.如: $f(x) > g(x)$, $f(x) \leq g(x)$ 等等,用“ $<$ ”或“ $>$ ”号连结的不等式叫做严格不等式;用“ $\leq$ ”或“ $\geq$ ”号连结的不等式,叫做非严格不等式.

(2)不等式的分类

①按成立的条件分:如果不论用什么实数代替不等式中的字母,它都能够成立,这样的不等式叫绝对不等式.

例如: $a^2 + 1 > a$, $x + 5 > x + 4$, $(a + 1)^2 > -1$ 等均为绝对不等式.

如果只有用某些范围内的实数代替不等式中的字母,它才能够成立,这样的不等式叫条件不等式.

例如: $2x - 1 > 1 - x$, $x^2 < x + 1$ 等均为条件不等式.

如果无论用什么样的实数值代替不等式中的字母,不等式都不能成立,这样的不等式叫矛盾不等式.

例如: $|x - 1| + |x + 1| < 1$, $a^2 < -2$ 均为矛盾不等式.

绝对不等式、条件不等式与矛盾不等式相互之间没有包容性,即三者中任意二个都是互斥的.

②按不等号开口方向分:在两个不等式中,如果每一个的左边都大于右边,或每一个的左边都小于右边,这样的两个不等式叫同向不等式.

如果一个不等式的左边大于右边,而另一个不等式的左边小于右边,那么这两个不等式叫异向不等式.

例如: $2a + 3 > a + 1$ 与 $a^2 - 3 > 3a + 1$ 是同向不等式.

$3a + 2 > a + 4$ 与 $3a^2 - 5 < 2a^2 + 4$ 是异向不等式.

2. 实数的运算性质与大小顺序间的关系

对于任意两个实数 a, b , 如果 $a > b$, 那么 $a - b$ 是正数; 如果 $a < b$, 那么 $a - b$ 是负数; 如果 $a = b$, 那么 $a - b$ 等于 0. 它们的逆命题也正确, 这就是说:

名师诠释

◆ [考题 1] 给出以下判断:

①不等式 $x^2 + 1 > 1 - x^2$ 是绝对不等式;

②不等式 $x^2 - 2x + 1 > 0$ 是条件不等式;

③不等式 $|x| + 1 < \frac{1}{2}|x|$ 是矛盾不等式;

④不等式 $\frac{1}{3}x - \frac{1}{x} > 1$ 与 $\frac{2}{x} - x < 2$ 是同向不等式.

其中正确的为().

A. ①②

B. ②③

C. ③④

D. ①④

(北大附中测试题)

[解析] 对照绝对不等式、条件不等式、矛盾不等式及同向(异向)不等式的概念作出判定.

于是:(1)由于当 $x = 0$ 时, 不等式 $x^2 + 1 > 1 - x^2$ 不成立, 故判断①不正确.

(2)由于当 $x = 1$ 时, 不等式 $x^2 - 2x + 1 > 0$ 不成立, 而当 $x \neq 1$ 时, 它却成立, 故判断②正确.

(3)由于 $|x| + 1 < \frac{1}{2}|x|$ 恒不成立, 故它是矛盾不等式, 即判断③正确.

(4)④中所说的两个不等式不是同向不等式, 故判断④不正确.

综上所述, 应选择 B.

[点评] 在判断①与②时, 如果不严格对照绝对不等式与条件不等式的定义, 就会误认为①正确, 而②不正确, 避免误判的方法可参照下述评注.

①一个不等式为绝对不等式 $\Leftrightarrow$ 它们的解集为 $\mathbf{R}$;

②一个不等式为条件不等式 $\Leftrightarrow$ 它们的解集为 A 满足 $\emptyset \subsetneq A \subsetneq \mathbf{R}$;

③一个不等式为矛盾不等式 $\Leftrightarrow$ 它们的解集为 $\emptyset$.

以上三点可以作为判断一个不等式为何种不等式的依据和方法.

◆ [考题 2] 设实数 x, y, z 满足 $y + z = 6 - 4x + 3x^2$, $z - y = 4 - 4x + x^2$, 试确定 x, y, z 间的大小关系.

(2006 · 黄冈)

[解析] $\because z - y = 4 - 4x + x^2 = (x - 2)^2 \geq 0, \therefore z \geq y$.

又 $\because y - x = \frac{1}{2}[y + z] - (z - y) - x$

$= \frac{1}{2}[(6 - 4x + 3x^2) - (4 - 4x + x^2)] - x$

$= 1 + x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \therefore y > x$.

综上所述可知 $z \geq y > x$.

[点评] 比较两个代数式的大小, 作差后在变形的过程中有分解因式, 有时写成几个非负数或非正数的和的形式(如本例), 有时将这两者结合起来.

$$\begin{aligned} a > b &\Leftrightarrow a - b > 0; \\ a = b &\Leftrightarrow a - b = 0; \\ a < b &\Leftrightarrow a - b < 0. \end{aligned}$$

上面等价符号的左式反映的是实数的大小顺序,右式反映的则是实数的运算性质,合起来就成为实数的运算性质与大小顺序之间的关系.它是不等式这一章的理论基础,是不等式性质的证明、证明不等式和解不等式的主要依据.

利用实数的运算性质与大小顺序间的关系,可以比较两个实数 a 与 b 的大小.事实上,只需判断它们的差 $a - b$ 的符号.

3. 不等式的性质

(1) 不等式的性质

定理1 对称性: $a > b \Leftrightarrow b < a$.

定理2 传递性: $\left. \begin{matrix} a > b \\ b > c \end{matrix} \right\} \Rightarrow a > c$.

定理3 加法性质: $\left. \begin{matrix} a > b \\ c \in \mathbf{R} \end{matrix} \right\} \Rightarrow a + c > b + c$.

推论 $\left. \begin{matrix} a > b \\ c > d \end{matrix} \right\} \Rightarrow a + c > b + d$.

说明:①定理3是不等式移项法则的基础.

②定理3的推论是同向不等式相加法则的依据.它还可以推广到任意有限个同向不等式的两边分别相加,所得不等式与原不等式同向.

定理4 乘法性质: $\left. \begin{matrix} a > b \\ c > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow ac > bc$.

推论1 $\left. \begin{matrix} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow ac > bd$.

推论2 $\left. \begin{matrix} a > b > 0 \\ n \in \mathbf{N}^* \end{matrix} \right\} \Rightarrow a^n > b^n$.

定理5 开方性质: $\left. \begin{matrix} a > b > 0 \\ n \in \mathbf{N}^* \end{matrix} \right\} \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

(2) 不等式的性质共有五个,其中性质3、4、5要注意符号,另外还有一些常用的结论,同学们也要掌握:“ $a > b$ 且 $ab > 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”,即“同号求倒,方向改变;异号求倒,方向不变”,“ $a > b$, $c < d$, 则 $a - c > b - d$ ”,“ $a > b > 0$, $c > d > 0$, 则 $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ ”;在使用这些性质时,如果不满足条件,要注意符号的变换.因此,性质的灵活应用构成本节的难点.

(3) 不等式的基本性质中,对表达不等式性质的各不等式,要注意“箭头”是单向的还是双向的,也就是说每条性质是否具有可逆性.运用不等式的基本性质解答不等式问题,要注意不等式成立的条件,否则将会出现一些错误.

如,性质“ $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n > 0 (n \in \mathbf{Z}, n > 1)$ ”成立的条件是“ n 是大于1的整数, $a > b > 0$ ”,假如

◆ [考题3] 分别判断下列各命题是否成立,并简述理由.

$$(1) a > b \Rightarrow 2^{-x} \cdot a > 2^{-x} \cdot b;$$

$$(2) a > b, c > d \Rightarrow a - c > b - d;$$

$$(3) a > b, c < d, cd \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d};$$

$$(4) |a| > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n (n \in \mathbf{N}, n \geq 1).$$

(华师一附中训练题)

[解析] 以不等式的性质为起点,逐一验证每一个命题的真伪.

(1) 成立. 因为 $2^{-x} > 0$, 由性质知 $2^{-x} \cdot a > 2^{-x} \cdot b$;

(2) 不成立. 令 $a = 5, b = 4, c = 3, d = 1$, 有 $a - c < b - d$;

(3) 不成立. $a > b > 0, c < 0, d > 0$ 时显然有 $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$;

(4) 不成立. $|a| > b > 0 \Rightarrow |a|^n > b^n$, 但 $|a|^n$ 与 a^n 可能相等,也可能互为相反数.

◆ [考题4] 若 $a > b > 0$, 则下列不等式中总成立的是().

$$A. \frac{b}{a} > \frac{b+1}{a+1}$$

$$B. a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$$

$$C. a + \frac{1}{b} > b + \frac{1}{a}$$

$$D. \frac{2a+b}{a+2b} > \frac{a}{b}$$

(2007·成都模拟)

[解析] $\because a > b > 0, \frac{1}{a} < \frac{1}{b}, \therefore a + \frac{1}{b} > b + \frac{1}{a}$, 故 C 成立.

[答案] C

◆ [考题5] 已知三个不等式:① $ab > 0$, ② $\frac{c}{a} > \frac{d}{b}$, ③ $bc > ad$. 以其中两个作条件, 余下一个作结论, 则可组成_____个正确命题.

(全国高考题)

[解析] 将命题②作等价变形: $\frac{c}{a} > \frac{d}{b} \Leftrightarrow \frac{bc - ad}{ab} > 0$.

由 $ab > 0, bc > ad$ 可得②成立, 即①③ $\Rightarrow$ ②;

若 $ab > 0, \frac{bc - ad}{ab} > 0$,

则 $bc > ad$, 故①② $\Rightarrow$ ③;

若 $bc > ad, \frac{bc - ad}{ab} > 0$,

则 $ab > 0$, 故②③ $\Rightarrow$ ①.

$\therefore$ 可组成3个正确命题.

◆ [考题6] 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 求证: $a^2 + b^2 + ab + 1 > a + b$.

[解析] 从最高次数为二次考虑, 可比较两边差的正负, 故可考虑二次三项式的配方.

$$\text{证法一: } \because a^2 + b^2 + ab + 1 - a - b$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(b - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} > 0,$$

$$\therefore a^2 + b^2 + ab + 1 > a + b.$$

$$\text{证法二: } a^2 + b^2 + ab + 1 - a - b$$

$$= a^2 + (b-1)a + b^2 - b + 1.$$

$$\text{令 } f(a) = a^2 + (b-1)a + b^2 - b + 1,$$

$$\Delta = (b-1)^2 - 4(b^2 - b + 1) = -3\left(b - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{8}{3} < 0.$$

$$\therefore f(a) > 0 \text{ 恒成立, 即 } a^2 + b^2 + ab + 1 > a + b.$$

[点评] 证法一是常规的比较法, 而证法二则是从二次三项式的符号与二次函数关系出发, 用函数的思想处理不等式问题.

去掉“ $b > 0$ ”这个条件,取 $a = 3, b = -4, n = 2$, 那么就会出现“ $3^2 > (-4)^2$ ”即“ $9 > 16$ ”的错误结论,类似的反例不胜枚举.

2 方法·技巧平台

4. 比较两数(式)大小的方法

(1)要比较两个实数的大小,只要将两个数进行作差,作差后应变形为:①常数;②常数与几个平方和的形式,常用配方法或实数特征 $a^2 \geq 0$ 判断差的符号;③几个因式积的形式,常用因式分解法.

(2)实数比较大小的依据是:

$$① a - b > 0 \Leftrightarrow a > b;$$

$$② a - b = 0 \Leftrightarrow a = b;$$

$$③ a - b < 0 \Leftrightarrow a < b.$$

(3)两个实数比较大小,通常用作差法来进行,其一般步骤是:

第一步:作差;

第二步:变形,常采用配方、因式分解等恒等变形手段,将“差”化成“积”;

第三步:定号,就是确定是大于0,还是等于0,还是小于0.

最后得出结论.

概括为“三步,一结论”,这里的“定号”是目的,“变形”是关键.

(4)如果两实数同号亦可采用作商法来比较大小,即作商后看是大于1,等于1,还是小于1.

(5)如果直接比较两个代数式或数(均大于零)的大小,不如比较这两个数或式的平方容易,可变通改为比较两个平方的大小,平方的大小比较出来了,原来两个数或式的大小也就确定了.

5. 利用不等式的性质,探求不等式成立的条件或判断命题的真假

(1)不等式的性质是不等式的基础,包括五个性质定理及三个推论.不等式的性质是解不等式和证明不等式的主要依据,只有正确地理解每条性质的条件和结论,注意条件的变化才能正确地加以运用.利用不等式的性质,寻求命题成立的条件是不等式性质的灵活运用.

(2)对于假命题只需举一反例即可,当然亦可从条件入手推出与结论相反的判断.

(3)解决此类问题一定要在理解的基础上记准、记熟不等式的八条性质(五个定理三个推论).

6. 利用不等式的性质证明不等式

利用不等式的性质及其推论可以证明一些不等式.解决此类问题一定要在理解的基础上记准、记熟不等式的八条性质并注意在解题中灵

◆ [考题7] 设 $a > 0, b > 0$, 且 $a \neq b$, 试比较 $a^a b^b$ 与 $a^b b^a$ 的大小.

$$[\text{解析}] \quad \frac{a^a b^b}{a^b b^a} = a^{a-b} \cdot b^{b-a} = \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}.$$

当 $a > b > 0$ 时, $\frac{a}{b} > 1, a - b > 0$, 则 $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} > 1$, 于是 $a^a b^b > a^b b^a$.

当 $b > a > 0$ 时, $0 < \frac{a}{b} < 1, a - b < 0$, 则 $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} > 1$,

于是 $a^a b^b > a^b b^a$,

综上所述,对于不相等的正数 a, b , 都有 $a^a b^b > a^b b^a$.

[点评] 实数大小的比较问题常常利用不等式的基本性质或“ $\frac{a}{b} > 1$, 且 $b > 0 \Rightarrow a > b$ ”来解决,这是作商法,必须知道分母的符号.此题能否用作差法比较大小?

◆ [考题8] 已知 $a > 0$, 比较 $\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} - \sqrt{2}$ 与 $a + \frac{1}{a} - 2$ 的大小.

$$[\text{解析}] \quad \text{设 } A = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} - \sqrt{2}, B = a + \frac{1}{a} - 2.$$

$$\text{令 } t = a + \frac{1}{a}, \text{ 则 } t \geq 2,$$

$$\therefore A = \sqrt{t^2 - 2} - \sqrt{2} \geq 0, B = t - 2 \geq 0,$$

$$\therefore A^2 - B^2 = -2\sqrt{2} \cdot \sqrt{t^2 - 2} + 4t - 4$$

$$= 2\sqrt{2}[\sqrt{2}(t-1) - \sqrt{t^2 - 2}]$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \frac{(t-2)^2}{\sqrt{2}(t-1) + \sqrt{t^2 - 2}}.$$

$\therefore$ 分母大于零,分子大于等于零,

$\therefore A^2 \geq B^2$, 即 $A \geq B, a = 1$ 时等号成立.

$$\therefore \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} - \sqrt{2} \geq a + \frac{1}{a} - 2.$$

[点评] (1)恰当换元,可使过程简化,因此,可培养学生简化意识.
(2)变形作差也是大小比较中常见的思考方法.

◆ [考题9] 判断下列各命题的真伪,并说明理由.

(1)若 $a < b, c < 0$, 则 $\frac{c}{a} < \frac{c}{b}$;

(2)若 $ac^{-3} > bc^{-3}$, 则 $a > b$;

(3)若 $a > b$, 且 $k \in \mathbb{N}^*$, 则 $a^k > b^k$;

(4)若 $a > b, b > c$, 则 $a - b > b - c$.

[解析] (1) $\because a < b$, 没有指出 $ab > 0$, 故 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 不成立,

因此推不出 $\frac{c}{a} < \frac{c}{b}$, $\therefore$ 是假命题.

(2)当 $c < 0$ 时, $c^{-3} < 0$, 有 $a < b$, $\therefore$ 是假命题.

(3)当 $a = 1, b = -2, k = 2$ 时, 显然命题不成立, $\therefore$ 是假命题.

(4)取 $a = 2, b = 0, c = -3$ 满足 $a > b, b > c$ 条件, 但是 $a - b = 2 < b - c = 3$, $\therefore$ 是假命题.

◆ [考题10] 求证: $\frac{1}{2} \leq \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \leq \frac{3}{2}$.

$$[\text{解析}] \quad \text{设 } y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}, \text{ 则 } (1-y)x^2 + x + 1 - y = 0.$$

(1)当 $y \neq 1$ 时, 由 $x \in \mathbb{R}, \Delta = 1 - 4(1-y)^2 \geq 0$, 解得 $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2} (y \neq 1)$;

(2)当 $y = 1$ 时, 有解 $x = 0$.

综上得 $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$, 原不等式得证.

活准确地加以应用.

7. 利用不等式的性质,求取值范围等问题

利用几个不等式的范围来确定某个不等式的范围是一类常见的综合问题,对于这类问题要注意:“同向(异向)不等式的两边可以相加(相减)”,这种转化不是等价变形,在一个解题过程中多次使用这种转化时,就有可能扩大真实的取值范围.解题时务必小心谨慎,先建立待求范围的整体与已知范围的整体等量关系,最后通过“一次性不等关系的运算,求得待求的范围”,是避免犯错误的一条途径,如[考题11]易错解为:

$\because y=f(x)$ 过原点, $\therefore$ 可设 $f(x)=ax^2+bx$.

$\therefore f(-1)=a-b, f(1)=a+b$.

$$\therefore \begin{cases} 1 \leq a-b \leq 2, \\ 3 \leq a+b \leq 4. \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

$$\text{由 } \textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ 知, } 2 \leq a \leq 3, \quad \textcircled{3}$$

$$\text{由 } \textcircled{2} + \textcircled{1} \times (-1) \text{ 知 } \frac{1}{2} \leq b \leq \frac{3}{2}, \quad \textcircled{4}$$

又 $f(-2)=4a-2b$,

$$\therefore 4 \times 2 - 2 \times \frac{3}{2} \leq f(-2) \leq 4 \times 3 - 2 \times \frac{1}{2},$$

$$\therefore 5 \leq f(-2) \leq 11. \text{ 范围过大.}$$

8. 反证法证明不等式

(1) 反证法证明不等式的步骤:

反设——归谬——判断.

(2) 反证法证题的核心是导出矛盾,而矛盾出现的情况是:①与已知条件矛盾,②与客观事实矛盾,③与定理、法则相矛盾,④前后相互矛盾等,另外要注意语言叙述的严谨性.

[点评] 此题可去分母转化为证两个二次不等式恒成立,而这里用判别式法证明也很简捷.

◆ [考题11] 若已知二次函数 $y=f(x)$ 的图象过原点,且 $1 \leq f(-1) \leq 2, 3 \leq f(1) \leq 4$. 求 $f(-2)$ 的范围.

(上海调考题)

[解析] 解法一:利用解方程的思想.

设 $f(x)=ax^2+bx$,

$$\therefore \begin{cases} f(1)=a+b, \\ f(-1)=a-b, \end{cases} \therefore \begin{cases} a=\frac{1}{2}[f(1)+f(-1)], \\ b=\frac{1}{2}[f(1)-f(-1)]. \end{cases}$$

$$\therefore f(-2)=4a-2b=3f(-1)+f(1),$$

$$\text{且 } 1 \leq f(-1) \leq 2, 3 \leq f(1) \leq 4, \therefore 6 \leq f(-2) \leq 10.$$

解法二:待定系数法.

$$\text{设 } m(a+b)+n(a-b)=f(-2)=4a-2b,$$

$$\therefore \begin{cases} m+n=4, \\ m-n=-2, \end{cases} \therefore \begin{cases} m=1, \\ n=3. \end{cases}$$

$$\therefore f(-2)=(a+b)+3(a-b)=f(1)+3f(-1).$$

$$\therefore 1 \leq f(-1) \leq 2, 3 \leq f(1) \leq 4, \therefore 6 \leq f(-2) \leq 10.$$

◆ [考题12] 求证:如果 $a>b>0$, 那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ ($n \in \mathbf{N}$, 且 $n>1$).

[解析] 假设 $\sqrt[n]{a}$ 不大于 $\sqrt[n]{b}$, 则有两种情况: $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$ 或者 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$, 由推论2和定理1知, 当 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$ 时, 有 $a<b$; 当 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$ 时, 有 $a=b$. 这些都与已知 $a>b>0$ 矛盾, 所以 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

◆ [考题13] 若 a, b 是任意实数, 且 $a>b$, 则().

$$\text{A. } a^2>b^2 \quad \text{B. } \frac{b}{a}<1 \quad \text{C. } \lg(a-b)>0 \quad \text{D. } \left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$$

(全国高考试题)

[解析] $a>b$ 并不能保证 a, b 均为正数, 从而不能保证 A、B 成立. 又 $a>b \Rightarrow a-b>0$, 但不能保证 $a-b>1$, 从而不能保证 C 成立, 显然只有 D 成立. 事实上, 指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上是减函数, 所以 $a>b \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$ 成立. 故选 D.

◆ [考题14] 证明: $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ 在定义域内是减函数.

(北京高考试题)

[解析] 首先确定 $f(x)$ 的定义域, 其次在证明过程中对 $f(x_2)-f(x_1)$ 的正负难以判断时, 必须把定义域分成若干区间进行讨论.

$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$. 任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1<x_2$,

$$\therefore f(x_2)-f(x_1)=(\sqrt{x_2^2+1}-x_2)-(\sqrt{x_1^2+1}-x_1) \\ =(\sqrt{x_2^2+1}-\sqrt{x_1^2+1})+(x_1-x_2).$$

(1) 当 $x_1<x_2 \leq 0$ 时, $\therefore x_1-x_2<0$, 且 $x_1^2>x_2^2$,

$$\therefore \sqrt{x_2^2+1}<\sqrt{x_1^2+1},$$

即

$$\sqrt{x_2^2+1}-\sqrt{x_1^2+1}<0.$$

因此

$$f(x_2)-f(x_1)<0, f(x_2)<f(x_1).$$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 内是减函数.

(2) 当 $0<x_1<x_2$ 时, $\therefore x_1-x_2<0$, 且 $x_1^2<x_2^2$,

$$\therefore \sqrt{x_2^2+1}>\sqrt{x_1^2+1},$$

即

$$\sqrt{x_2^2+1}-\sqrt{x_1^2+1}>0.$$

$$\text{又 } f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{\sqrt{x_2^2+1}+x_2}-\frac{1}{\sqrt{x_1^2+1}+x_1}<0,$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内是减函数.

由(1)、(2)知, $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ 在定义域内是减函数.

3 综合·创新拓展

9. 不等式的性质与函数的联系

(1) 不等式的许多性质具有“函数”背景, 如“ $a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$)”, 其实就是函数 $y=x^n$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上的单调性, 反之, 不等式也是研究函数性质的有力工具, 比如函数单调性的定义就是通过不等式描述的. 因此, 高考中考查不等式的基本性质常与函数结合在一起进行.

如: 若 $x>y>1, 0<a<1$, 下列各式中正确的一项是().

$$\text{A. } a^{-x}<a^{-y} \quad \text{B. } (\sin a)^x>(\sin a)^y$$

$$\text{C. } \log_{\frac{1}{a}}x<\log_{\frac{1}{a}}y \quad \text{D. } 1+a^{x+y}>a^x+a^y$$

解析: 这里需要考查指数函数 $y=a^x$ 在 $x>0$ 时的单调性, 据此判断 A 不正确; 据指数函数 $y=(\sin a)^x$ 在 $0<\sin a<1$ 的单调性判断 B 不正确; 据对数函数 $y=\log_a x$ 在 $a>1$ 的单调性判断 C 不正确, 从而选 D. 由此可见将不等式的性质与

函数的单调性结合起来使用,可以提高分析问题和解决问题的能力.

(2) 利用作差法、作商法比较多项式的大小就常转化为利用指数函数的单调性. 如 $y = a^x$, 当 $a > 1, x > 0, y = a^x > 1$; 当 $0 < a < 1$ 时, $x < 0$, 则 $y = a^x > 1$.

如: 已知 $a > 0$, 且 $a \neq 1, 0 < x < 1$, 试比较, $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

解: 若 $a > 1$, 则 $A = |\log_a(1-x)| = -\log_a(1-x) = \log_a \frac{1}{1-x}, B = \log_a(1+x)$.

$$\therefore \frac{1}{1-x} - (1+x) = \frac{x^2}{1-x} > 0,$$

$$\therefore \frac{1}{1-x} > 1+x, \therefore A > B.$$

若 $0 < a < 1$, 则 $A = \log_a(1-x), B = \log_a \frac{1}{1+x}$.

$$\therefore A > B.$$

综上得: 当 $a > 0$ 且 $a \neq 1, 0 < x < 1$ 时,

$$|\log_a(1-x)| > |\log_a(1+x)|.$$

又如 P_5 [考题 7].

10. 不等式性质的应用

不等式性质的应用非常广泛, 它可以与其他章节知识综合命题, 即在所谓知识交汇点处命题, 这是现在高考命题的趋势. 解决此类问题, 除要综合运用不等式性质外, 还要注意其他相关章节知识的运用.

能力·题型设计

1A 不等式① $a^2 + 2 > 2a$, ② $a^2 + b^2 \geq 2(a-b-1)$,

③ $a^2 + b^2 > ab$ 中恒成立的个数是().

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2A 若 $x \neq 2$ 或 $y \neq -1, M = x^2 + y^2 - 4x + 2y, N = -5$, 则 M 与 N 的大小关系是().

- A. $M > N$ B. $M < N$
C. $M = N$ D. 不能确定

3A 若 a, b 为实数, 则 $a > b > 0$ 是 $a^2 > b^2$ 的().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4B 给定命题:

$$① a > b \text{ 且 } ab < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b};$$

$$② \sqrt{a} > \sqrt{b} \Leftrightarrow a > b;$$

$$③ |a| < b \Leftrightarrow -b < a < b;$$

$$④ ac^2 > bc^2 \Leftrightarrow a > b.$$

其中真命题的个数是().

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

5B 已知 $-1 < a+b < 3$, 且 $2 < a-b < 4$, 则 $2a+3b$ 的范围是().

$$A. \left(-\frac{13}{2}, \frac{17}{2}\right) \quad B. \left(-\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$$

$$C. \left(-\frac{7}{2}, \frac{13}{2}\right) \quad D. \left(-\frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$$

◆ [考题 15] 已知不等式 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} [\log_2 n]$,

其中 n 为大于 2 的整数, $[\log_2 n]$ 表示不超过 $\log_2 n$ 的最大整数, 设数列 $\{a_n\}$ 的各项为正, 且满足 $a_1 = b (b > 0), a_n \leq$

$$\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}, n=2, 3, 4, \cdots \text{求证: } a_n < \frac{2b}{2+b[\log_2 n]}, n=3, 4, 5, \cdots$$

(2005 · 湖北卷)

[解析] 证明: $\because$ 当 $n \geq 2$ 时, $0 < a_n \leq \frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}$,

$$\therefore \frac{1}{a_n} \geq \frac{n+a_{n-1}}{na_{n-1}} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{n}, \text{ 即 } \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} \geq \frac{1}{n},$$

$$\text{于是有 } \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \geq \frac{1}{2}, \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} \geq \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} \geq \frac{1}{n},$$

$$\text{所有不等式两边相加得: } \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

$$\text{由已知不等式知, 当 } n \geq 3 \text{ 时有: } \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} > \frac{1}{2} [\log_2 n],$$

$$\therefore a_1 = b, \therefore \frac{1}{a_n} > \frac{1}{b} + \frac{1}{2} [\log_2 n] = \frac{2+b[\log_2 n]}{2b},$$

$$\therefore a_n < \frac{2b}{2+b[\log_2 n]}.$$

点击考点

测试要点

2, 4

测试要点 4

测试要点

2, 4

测试要点 9

测试要点

3, 5

上海春招

测试要点 8

测试要点

3, 6

测试要点 4, 9

6A 若 $d > 0, d \neq 1, m, n \in \mathbb{N}^*$, 则 $1+d^{m+n}$ 与 $d^m + d^n$ 的大小关系是().

- A. $1+d^{m+n} > d^m + d^n$ B. $1+d^{m+n} < d^m + d^n$
C. $1+d^{m+n} \geq d^m + d^n$ D. 不能确定

7B 设 $0 < b < a < 1$, 则下列不等式成立的是().

- A. $ab < b^2 < 1$ B. $\log_{\frac{1}{2}} b \log_{\frac{1}{2}} a < 0$
C. $2^b < 2^a < 2$ D. $a^2 < ab < 1$

8B 正数 a, b, c, d 满足 $a+d = b+c, |a-d| < |b-c|$, 则().

- A. $ad = bc$ B. $ad < bc$
C. $ad > bc$ D. ad 与 bc 的大小不定

9C $a > 0$ 且 $a \neq 1, 0 < x < 1$, 下列正确的是().

- A. $|\log_a(1-x)| > |\log_a(1+x)|$
B. $|\log_a(1-x)| < |\log_a(1+x)|$
C. $|\log_a(1-x)| = |\log_a(1+x)|$
D. 当 $0 < a < 1$ 时, 选项 A 中前者较大; $a > 1$ 时, 后者较大

10B 当 $0 < a < b < 1$ 时, 下列不等式中正确的是().

- A. $(1-a)^{\frac{1}{b}} > (1-a)^b$ B. $(1+a)^a > (1+b)^b$
C. $(1-a)^b > (1-a)^{\frac{b}{2}}$ D. $(1-a)^a > (1-b)^b$

11B 设 $a < 0, -1 < b < 0$, 则 a, ab, ab^2 三者的大小关系为_____.

12B 已知函数 $f(x) = \log_a x$, 且 $x \in [a^2, a]$, 则 $f(x^2), f(\log_a x), [f(x)]^2$ 的大小顺序是_____.

13A 若 $m < n, p < q$, 且 $(p-m)(p-n) < 0, (q-m) \cdot (q-n) < 0$, 则 m, n, p, q 从小到大的顺序是_____.

14B 给出以下四个命题:

① $a > b \Rightarrow a^n > b^n (n \in \mathbf{N}^*)$; ② $a > |b| \Rightarrow a^n > b^n (n \in \mathbf{N}^*)$;

③ $a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; ④ $a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$.

点击考点

测试要点2

测试要点9

测试要点3,6

测试要点7

测试要点5,6

测试要点7

测试要点

2,6,9

测试要点10

其中真命题的序号是_____ (请把你认为是真命题的序号都填上).

15A 若 $c > a > b > 0$, 求证: $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$.

16C 已知 $f(x) = x^2 + ax + b$, 且 $p + q = 1$, 求证: $pf(x) + qf(y) \geq f(px + qy)$ 对任意实数 x, y 都成立的充要条件是 $0 \leq p \leq 1$.

17B 设 $f(x) = ax^2 + bx$, 且 $1 \leq f(-1) \leq 2, 2 \leq f(1) \leq 4$, 求 $f(-2)$ 的最大值和最小值.

18B 设 $f(x) = \log_3 3x + 1, g(x) = 2\log_3 2 + 1$, 其中 $x > 0$ 且 $x \neq 1$, 试比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小.

教材课后习题解答

练习(第5页)

1. $\because (x+5)(x+7) - (x+6)^2 = (x^2 + 12x + 35) - (x^2 + 12x + 36) = -1 < 0$,

$\therefore (x+5)(x+7) < (x+6)^2$.

2. $\because (\sqrt{x}-1)^2 - (\sqrt{x}+1)^2 = x - 2\sqrt{x} + 1 - x - 2\sqrt{x} - 1 = -4\sqrt{x}$, 由 $x > 0$, 知 $\sqrt{x} > 0$, $\therefore -4\sqrt{x} < 0$.

$\therefore (\sqrt{x}-1)^2 < (\sqrt{x}+1)^2$.

3. $\because (a^2 + \sqrt{2}a + 1)(a^2 - \sqrt{2}a + 1) - (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$
 $= [(a^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}a)^2] - [(a^2 + 1)^2 - a^2] = -a^2$,
 由 $a \neq 0$, 知 $-a^2$ 是一个负数,

$\therefore (a^2 + \sqrt{2}a + 1)(a^2 - \sqrt{2}a + 1) < (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$.

练习(第7页)

1. (1) 真命题.

(2) 假命题. 因为如果 $c < 0$, 那么 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

(3) 假命题. 因为如果 $c < 0$, 那么 $a > b$.

(4) 真命题.

2. (1) 不能断定. 例如 $\begin{cases} a=2, \\ b=1, \\ c=1, \\ d=2, \end{cases}$ $a+c=3, b+d=3$, 此时 $a+c = b+d$.

又如 $\begin{cases} a=3, \\ b=1, \\ c=1, \\ d=2, \end{cases}$ 则 $a+c=4 > b+d=3$. 又如 $\begin{cases} a=2, \\ b=1, \\ c=0, \\ d=2, \end{cases}$ 则 $a+c=2 < b+d=3$.

(2) 不能断定. 例如 $\begin{cases} a=6, \\ b=0, \\ c=2, \\ d=0, \end{cases}$ 则 $a-2c=2 > b-2d=0$.

又如 $\begin{cases} a=2, \\ b=0, \\ c=2, \\ d=0, \end{cases}$ 则 $a-2c=-2 < b-2d=0$. 又如 $\begin{cases} a=4, \\ b=0, \\ c=2, \\ d=0, \end{cases}$

则 $a-2c=0=b-2d=0$.

(3) 不能推出. 例如 $\begin{cases} a=1, \\ b=-3, \\ c=1, \\ d=-3, \end{cases}$ 则 $ac=1 < bd=9$.

(4) 不能推出. 例如 $\begin{cases} a=2, \\ b=0, \\ c=-3, \\ d=-2, \end{cases}$ 则 $\frac{a}{c} = -\frac{2}{3} < \frac{b}{d} = 0$.

3. (1) $\because a > b, \therefore a-d > b-d$; 又 $c > d, \therefore -d > -c, b-d > b-c$.
 $\therefore a-d > b-c$.

(2) $\because a > b, ab > 0$, 两边同乘以正数 $\frac{1}{ab}$, 得 $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$,

$\therefore \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

(3) $\because a > b > 0, c < d < 0, \therefore ac < bc, bc < bd, \therefore ac < bd$.

(4) $\because a > b, \therefore -2a < -2b, \therefore c-2a < c-2b$.

习题 6.1

1. $\because (2a+1)(a-3) - [(a-6)(2a+7) + 45] = 2a^2 - 5a - 3 - (2a^2 - 5a + 3) = -6 < 0$,
 $\therefore (2a+1)(a-3) < (a-6)(2a+7) + 45$.

2. $\because (x+1)\left(x^2 + \frac{x}{2} + 1\right) - \left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2 + x + 1)$
 $= x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1 - \left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right)$
 $= \frac{1}{2} > 0$,

$\therefore (x+1)\left(x^2 + \frac{x}{2} + 1\right) > \left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2 + x + 1)$.

3. $\because x^3 - (x^2 - x + 1) = x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1)$
 $= (x^2+1)(x-1)$,

且由 $x \geq 1$ 知, $(x^2+1)(x-1) \geq 0$,

$\therefore x^3 \geq x^2 - x + 1$.

4. (1) $\because a > b$, 两边同乘 -1 得 $-a < -b$, 故填“ $<$ ”.

(2) $\because a < b < 0, \therefore -a > -b > 0, \therefore -\frac{1}{a} < -\frac{1}{b}$, 两边同乘

以 -1 得 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 故填“ $>$ ”.

(3) $\because a > b > 0, \therefore \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. 又 $c > 0$, 两边同乘 $c, \therefore \frac{c}{a} < \frac{c}{b}$, 故填“ $<$ ”.

(4) $\because b > a > 0, \therefore 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}, \therefore \frac{1}{b^n} < \frac{1}{a^n}$. 又 $0 < b < 1$,

$\therefore \frac{1}{b} > 1, \therefore \frac{1}{b^n} > 1, \therefore 1 < \frac{1}{b^n} < \frac{1}{a^n}$, 故填“ $>$ ”, “ $>$ ”.

5. (1) $\left. \begin{array}{l} a > b \\ c > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} ac > bc \\ e > f \end{array} \right\} \Rightarrow f - ac < e - bc$;

(2) $\because a > b > 0$, 两边同乘以 $\frac{1}{ab} > 0$, 得 $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

$\therefore \frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$;

$$(3) \left. \begin{array}{l} c > d > 0 \\ \frac{1}{cd} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{1}{d} > \frac{1}{c} > 0 \\ a > b > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{d} > \frac{b}{c} > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{d}} > \sqrt{\frac{b}{c}}.$$

* 6. (1) $46 < x + y < 66$;

(2) $\because 16 < y < 24, \therefore -48 < -2y < -32$.

又 $\because 30 < x < 42, \therefore -18 < x - 2y < 10$.

提示: 此题应注意如何用同向不等式可以相加的法则, 解决 $x - 2y$ 的范围 (用异向不等式相减亦可解).

(3) $\because 16 < y < 24, \therefore \frac{1}{24} < \frac{1}{y} < \frac{1}{16}$.

又 $30 < x < 42, \therefore \frac{30}{24} < \frac{x}{y} < \frac{42}{16}$, 即 $\frac{5}{4} < \frac{x}{y} < \frac{21}{8}$.

最新5年高考名题论解

1. (2006 · 浙江卷) “ $a > 0, b > 0$ ”是“ $ab > 0$ ”的().

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

[解析] 由“ $a > 0, b > 0$ ”可推出“ $ab > 0$ ”, 反之不一定成立, 故选 A.

[答案] A

2. (2006 · 上海卷) 如果 $a < 0, b > 0$, 那么, 下列不等式中正确的是().

- A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $\sqrt{-a} < \sqrt{b}$
C. $a^2 < b^2$ D. $|a| > |b|$

[解析] 如果 $a < 0, b > 0$, 那么 $\frac{1}{a} < 0, \frac{1}{b} > 0, \therefore \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 选 A.

[答案] A

3. (2006 · 上海春) 若 $a, b, c \in \mathbf{R}, a > b$, 则下列不等式成立的是().

- A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $a^2 > b^2$
C. $\frac{a}{c^2+1} > \frac{b}{c^2+1}$ D. $a|c| > b|c|$

[解析] 应用间接排除法. 取 $a=1, b=0$, 排除 A. 取 $a=0, b=-1$, 排除 B; 取 $c=0$, 排除 D. 故应该选 C. 显然 $\frac{1}{c^2+1} > 0$, 对不等式 $a > b$ 的两边同时乘以 $\frac{1}{c^2+1}$, 可得 $\frac{a}{c^2+1} > \frac{b}{c^2+1}$ 成立.

[答案] C

4. (2004 · 北京 · 理) 如果 a, b, c 满足 $c < b < a$, 且 $ac < 0$, 那么下列选项中不一定成立的是().

- A. $ab > ac$ B. $c(b-a) > 0$
C. $cb^2 < ab^2$ D. $ac(a-c) < 0$

[解析] $\because b^2 \geq 0, \therefore$ 当 $b=0$ 时, $cb^2 = ab^2$, 故 C 不一定成立.

[答案] C

5. (2004 · 湖北 · 文) 若 $1 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 则下列结论中不正确的是().

- A. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$
B. $|\log_a b + \log_b a| > 2$
C. $(\log_b a)^2 < 1$
D. $|\log_a b| + |\log_b a| > |\log_a b + \log_b a|$

[解析] 若 $1 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 则 $1 > a > b > 0, 0 < \log_a b, \log_b a > 0, |\log_a b| + |\log_b a| = |\log_a b + \log_b a|$, 故 D 不正确.

[答案] D

6. (2004 · 湖北 · 理) 若 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$, 则下列不等式① $a+b < ab$; ② $|a| > |b|$; ③ $a < b$; ④ $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$ 中, 正确的不等式有().

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

[解析] 若 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$, 则 $0 > a > b$, 故 $ab > 0$, ① 正确. $|a| < |b|$, ② 不正确, ③ 不正确, ④ 正确, 故选 B.

[答案] B

7. (2004 · 辽宁) 对于 $0 < a < 1$, 给出下列四个不等式:

- ① $\log_a(1+a) < \log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$; ② $\log_a(1+a) > \log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$; ③ $a^{1+a} < a^{1+\frac{1}{a}}$; ④ $a^{1+a} > a^{1+\frac{1}{a}}$.

其中成立的是().

- A. ①与③ B. ①与④ C. ②与③ D. ②与④

[解析] $0 < a < 1, 1+a < 1+\frac{1}{a}, \log_a(1+a) > \log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$, ① 不正确, ② 正确. $a^{1+a} > a^{1+\frac{1}{a}}$, 故 ③ 不正确, 而 ④ 正确.

[答案] D