21世纪高职高专数学系列教材

JINJI SHUXUE

经济数学（上）

主编：徐沈新 主审：吴金文

中南大学出版社

21 SHIJIGAOZHIGAOZHUAN
SHUXUEXILIEJIAOCAI

图书在版编目(CIP)数据

经济数学. 上/徐沈新主编. —长沙:中南大学出版社,2007.8

ISBN 978-7-81061-581-8

Ⅰ.经...　Ⅱ.徐...　Ⅲ.经济数学—高等学校:技术学校—教材　Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 123924 号

经济数学

上册

主编　徐沈新

□责任编辑　谭晓萍
□责任印制　文桂武
□出版发行　中南大学出版社
社址:长沙市麓山南路　邮编:410083
发行科电话:0731-8876770　传真:0731-8710482
□印　装　长沙市宏发印刷厂

□开　本　730×960 1/16 □印张 11.75 □字数 213 千字
□版　次　2007 年 8 月第 1 版 □2007 年 8 月第 1 次印刷
□书　号　ISBN 978-7-81105-581-8
□定　价　20.00 元

前　言

由于党中央和国务院的重视，高职教育发展异常迅猛，高职专科招生数和在校生数，几乎与本科持平。数量扩张后，如何把住质量，如何突出高职特色，如何提供提高高职学生的动手能力和综合素质的环境，根据湖南省高职数学研究会的安排，我们首先从教材入手，集全省高职院校数学教师之智慧，编写一套真正适应高职教学的《经济数学》教材。

该教材的编写遵循以下原则：一是突出高职特色。理论以够用为度，加强方法训练；二是突出应用性。每章的新概念都从实例引入，每章均有一节应用内容；三是突出针对性。根据高职学生的特点和要求，概念表述力求通俗，定理的证明只介绍思路。四是突出实践性。在教材中，专门增加了一章数学实验，供学生上机动手操作。另外，为了顾及升本问题，我们还加进了一些选修内容，以*号表示。为了方便学生学习，我们在每章编写了总结，教材最后附了习题的参考答案。

《经济数学》(上册)由保险职业学院徐沈新副教授主编，具体负责第1章的编写、编写大纲拟定以及全书整纂；湖南商贸旅游职业技术学院陈晓霞副教授与屈立新讲师负责编写第2、3章；长沙通信职业技术学院王烂曼副教授负责编写第4、5章；衡阳财经工业职业技术学院曹令秋副教授负责编写第6、7章；湖南商务职业技术学院刘沈荣副教授负责编写第8章。

全书由湖南省高职数学研究会会长、保险职业学院吴金文教授主审。

在本教材编写和出版过程中，得到了湖南省高职数学研究会的指导，得到了湖南省教育厅职成处领导、湖南省教科院唐国庆副院长，中南大学出版社的同志们的大力支持和帮助，在此一并致谢。

由于时间紧，工作忙，错误之处在所难免，恳请各位读者不吝指教。

编　者

2007年7月

目　录

第1章　函数　极限　连续

函数是微积分研究的主要对象，极限是研究函数的基本工具，连续是函数的重要性态. 本章主要介绍函数、极限与连续的基本知识，为以后的学习奠定必要的基础.

1.1　函数的概念

函数的基本知识在中学里已学过，只简略介绍如下：

1.1.1　实数、数轴、区间、邻域

1. 实数

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数(无限循环小数)}\begin{cases}\text{整数(正整数、零、负整数)}\\\text{纯分数(正分数、负分数)}\end{cases}\\\text{无理数(无限不循环小数)}\end{cases}$$

今后无特别说明，我们研究的数的范围是实数.

2. 数轴

数轴指规定了长度单位、原点、方向的直线，如图 1－1 所示.

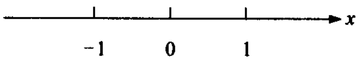


图 1－1

实数与数轴上的点成一一对应关系.

实数 a 的绝对值是实数 a 在数轴上对应的点到原点的距离.

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\-a, & a<0.\end{cases}$$

实数集合常用 $\mathbf{R}$ 表示. 设 $a\in\mathbf{R}$，则

$$a^{2n}\geqslant 0,\ (n\text{ 为自然数}),\ \sqrt{a^2}=|a|\geqslant 0.$$

3. 区间(a, $b\in R$, $a<b$)

区间		不等式表示	含义	附注
有限区间	$[a,b]$	$a\leqslant x\leqslant b$	大于或等于 a 且小于或等于 b 的全体实数	闭区间
	(a,b)	$a<x<b$	大于 a 且小于 b 的全体实数	开区间
	$[a,b)$	$a\leqslant x<b$	大于或等于 a 且小于 b 的全体实数	半开半闭区间
无穷区间	$(-\infty,+\infty)$	$-\infty<x<+\infty$	全体实数	R
	$(a,+\infty)$	$a<x<+\infty$	大于 a 的全体实数	
	$(-\infty,b]$	$-\infty<x\leqslant b$	小于或等于 b 的全体实数	

此外，区间还有$(a,b]$、$[a,+\infty)$、$(-\infty,b)$等. 上述有限区间称 a, b 分别为区间的左、右端点，$|b-a|$称为区间的长度.

4. 邻域

设 a, $\delta\in R$, 且 $\delta>0$, 区间$(a-\delta, a+\delta)$，即满足不等式$|x-a|<\delta$ 的实数 x 的全体称为点 a 的 δ 领域，点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径. 显然，满足不等式 $0<|x-a|<\delta$ 的点的集合是邻域$|x-a|<\delta$ 去掉中心 a 的其余点组成的集合，即$(a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)$. 称为 a 的去心邻域.

1.1.2 函数的概念

1. 常量与变量

在研究某问题的过程中，始终保持定值的量叫常量，可取不同数值的量叫变量.

常量与变量不是绝对的，例如销售单价，在某段时间内是常量，在较长时间中却是变量.

一般地，常量用 a, b, c, …表示，变量用 x, y, z, …表示.

2. 函数的定义

定义 1.1 在某一变化过程中，有两个变量 x, y, 如果对于 x 在某实数集 D 中的每个值，变量 y 按照一定的对应规律总有确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，x 叫自变量，y 叫因变量，f 表示 x 与 y 之间的对应规律(也可用 φ, F, f_1, f_2 等字母表示).

如果自变量 x 取某数值 $x_0\in D$, 函数有确定的值和它对应，称函数在 x_0 处有定义，其对应的函数值记为$f(x_0)$或 $y(x_0)$或$y|_{x=x_0}$. 全体函数值的集合称为

函数的值域.

表示函数关系的方法通常有：解析法(公式法)、表格法和图像法.

3. 函数的定义域

自变量 x 的取值范围称为函数的定义域.

对于反映实际问题的函数，其定义域的确定要考虑所给问题的实际意义. 对于用解析法表示的函数，确定定义域应注意以下几点：

(1) 分式中，分母的值不能为零.

(2) 偶次根式中，被开方数必须大于或等于零.

(3) 对数式中，真数必须大于零，底数大于零且不等于 1.

(4) 正切或余切函数中，正切、余切符号下的式子分别不能等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}$、$k\pi$(k 为整数).

(5) 反正弦或反余弦函数中，反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值不能大于 1.

(6) 若函数式由若干项组成，定义域是各项定义域的公共部分(交集).

确定函数关系有两个要素：定义域和对应规律. 当且仅当两个要素完全相同时，两个函数被认为是相同的函数. 例如 $y=x+1$ 和 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$，因定义域不同，故为不同的函数. 而 $y=x$ 和 $y=\sqrt{x^2}$，定义域虽然相同，但对应规律不相同，故也不是相同函数. 然而 $y=x^2$ 和 $u=v^2$ 却是两个相同的函数. 函数关系的确定与自变量和因变量采用何种字母无关.

例 1　求 $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$ 的定义域.

解　x 取值应满足 $\begin{cases}3+2x-x^2\geqslant 0,\\ x-2>0.\end{cases}$

解不等式组，得 $2<x\leqslant 3$. 定义域为 $(2,3]$.

例 2　求 $y=\frac{1}{x}+\arcsin\frac{3x-1}{5}$ 的定义域.

解　x 取值应满足 $\begin{cases}x\neq 0,\\ \left|\frac{3x-1}{5}\right|\leqslant 1.\end{cases}$

解不等式组，得定义域为 $\left[-\frac{4}{3},0\right)\cup(0,2]$.

1.1.3 函数的特性

1. 函数的奇偶性

设 $y=f(x)$，对任意的 $-x$、$x\in D$，

(1)若 $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$ 为偶函数.

(2)若 $f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$ 为奇函数.

若 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数，则称 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

2. 函数的单调性

设 $y=f(x)$，对任意的 x_1、$x_2\in$ 区间 I，且 $x_1<x_2$

(1)若有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，称 $f(x)$ 在 I 内单调增加.

(2)若有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，称 $f(x)$ 在 I 内单调减少.

区间 I 称为单调递增(或减少)区间.

单调增加(或减少)函数的图形是沿 x 轴的正向逐渐上升(或下降)的.

3. 函数的周期性

设 $y=f(x)$，常数 $T>0$. 对任意的 x、$x+T\in I$，若

$$f(x+T)=f(x),$$

称 $f(x)$ 为周期函数，称 T 为 $f(x)$ 的周期，显然 $2T$, $3T$, $\cdots$, $nT(n\in N)$ 也是 $f(x)$ 的周期，通常我们所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

一个周期函数的图形在每个周期内有相同的形状.

4. 函数的有界性

设 $y=f(x)$，对任意的 $x\in I$，若存在常数 $M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M$，称 $f(x)$ 在 I 内有界. 否则，称 $f(x)$ 在 I 内无界.

函数 $f(x)$ 在 I 内有界，则曲线 $y=f(x)$ 在 I 内被限制在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条水平直线之间.

例 3 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=|x|-e^{x^2}$，(2) $\varphi(x)=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$.

解 (1)定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

$$f(-x)=|-x|-e^{(-x)^2}=|x|-e^{x^2}=f(x),$$

所以，$f(x)$ 为偶函数.

(2)定义域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

$$\varphi(-x)=\ln\frac{-x-1}{-x+1}=\ln\frac{x+1}{x-1}=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-1}=-\ln\frac{x-1}{x+1}=-\varphi(x).$$

所以，$\varphi(x)$为奇函数.

例4　求 $y=\sin^2 x$ 的周期.

解　$y=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x.$

因为 $\cos 2x$ 的周期为 π，所以 $y=\sin^2 x$ 的周期为 π.

例5　考察函数 $y=\frac{1}{x}$在区间$(0,1)$和$(1,+\infty)$上的有界性.

解　在$(0,1)$内，若$y=\frac{1}{x}$有界，则存在$M_0>0$，使得$\left|\frac{1}{x}\right|<M_0$，$\forall x\in(0,1)$，取$x'=\frac{1}{M_0+1}$，则$0<x'<1$，即$x'\in(0,1)$，而$|f(x')|=M_0+1>M_0$，矛盾！所以$y=\frac{1}{x}$在$(0,1]$内是无界的. 而在$(1,+\infty)$内，$\left|\frac{1}{x}\right|<1$，取$M=1$，所以函数$y=\frac{1}{x}$在$(1,+\infty)$内是有界的.

1.1.4　反函数

设函数$y=f(x)$的定义域为D，值域为W. 若对于任意一个$y\in D$，x是y的函数，称此函数为$y=f(x)$的反函数，记作$x=f^{-1}(y)$. 或称它们互为反函数，习惯上自变量用x表示，因变量用y表示，$x=f^{-1}(y)$中x、y互换，得$y=f(x)$的反函数$y=f^{-1}(x)$. 显然$y=f^{-1}(x)$的定义域为W，值域为D.

例6　求$y=2x+3$的反函数，并作图.

解　由$y=2x+3$求出

$$x=\frac{y-3}{2},$$

习惯写成$y=\frac{x-3}{2}$.

$y=2x+3$的反函数为$y=\frac{x-3}{2}$，如图1-2所示.

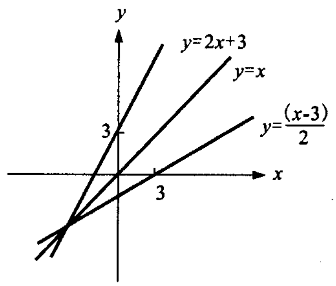


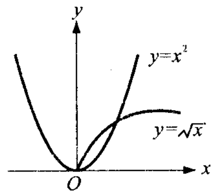
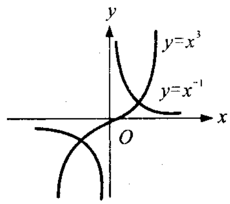
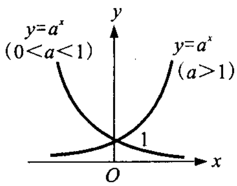
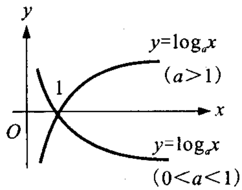
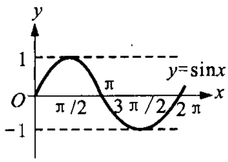
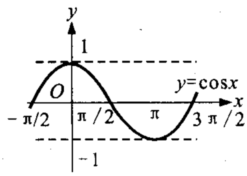
图1-2

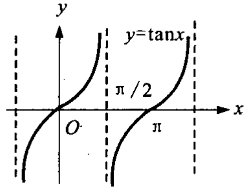
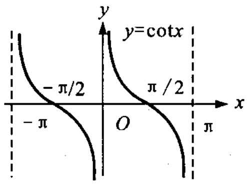
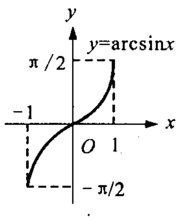
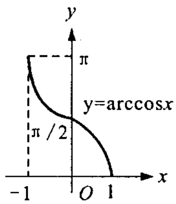
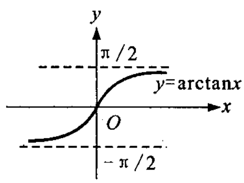
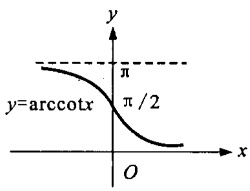
互为反函数的$y=f(x)$和$y=f^{-1}(x)$的图形关于直线$y=x$对称.

1.1.5　基本初等函数

基本初等函数包括常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数六大类. 它们的定义域、值域以及图像见下表.

基本初等函数(除 $y=c$ 外)总表

	函　数	定义域	值　域	图　像
幂函数	$y=x^2$	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	
幂函数	$y=x^3$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	
	$y=x^{-1}$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	
指数函数	$y=a^x$ $a>0,a\neq1$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	
对数函数	$y=\log_a x$ $a>0,a\neq1$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	
三角函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	
	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	

	函　数	定义域	值　域	图　像
三角函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$	$(-\infty,+\infty)$	
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$	$(-\infty,+\infty)$	
反三角函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	
反三角函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	
	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	
	$y=\text{arccot}\,x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$	

1.2 复合函数 初等函数 分段函数

1.2.1 复合函数

引例 某厂的利润 L 是总收益 R 的函数，利润 = 总收益 × 利润率. 而总收益 R 又是产量 Q 的函数，R = 单价 × 产量，通过 R 得利润 L 是 Q 的函数.

定义 1.2 设 y 是 u 的函数，$y=f(u)$，而 u 是 x 的函数，$u=\varphi(x)$，如果 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域之交非空，则称由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 构成的函数为复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为中间变量.

例如 函数 $y=\arctan(2x-1)$ 是由 $y=\arctan u$ 及 $u=2x-1$ 复合而成的；$y=\sqrt{x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2$ 复合而成的.

注意 不是任何几个函数都可以构成复合函数的. 例如，$y=\arcsin u$ 及 $u=x^2+2$ 就不能构成一个复合函数，因为 $u=x^2+2$ 的值域为 $[2, +\infty]$，而 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1, 1]$，$[2, +\infty]\cap[-1, 1]=\varnothing$，$u=x^2+2$ 的任何值均不能使 $y=\arcsin u$ 有定义.

例 1 求由函数 $y=\lg u$，$u=\sin x$ 构成的复合函数.

解 $y=\lg u$ 的定义域为 $(0, +\infty)$，$u=\sin x$ 的值域为 $[-1, 1]$. $(0, +\infty)\cap[-1, 1]=(0, 1)$ 为非空集合，这两个函数可构成复合函数 $y=\lg\sin x$.

例 2 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt[3]{1-x^2}$；(2) $y=[\lg(x^2+3)]^3$；

(3) $y=\arccos\sqrt{\ln(x^2-1)}$.

解 (1) 函数 $y=\sqrt[3]{1-x^2}$ 由 $y=\sqrt[3]{u}$，$u=1-x^2$ 复合而成.

(2) 函数 $y=[\lg(x^2+3)]^3$ 由 $y=u^3$，$u=\lg v$，$v=x^2+3$ 复合而成.

(3) 函数 $y=\arccos\sqrt{\ln(x^2-1)}$ 由 $y=\arccos u$，$u=\sqrt{v}$，$v=\ln w$，$w=x^2-1$ 复合而成.

将一个复合函数分解为几个简单函数，应从外向里逐层分解，这里的所谓简单函数是指基本初等函数及其四则运算式.

1.2.2 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次复合所构成的并可用一个解析式表示的函数，叫做初等函数. 例如

$y=\lg(1+\sqrt{1+x})$；$y=\arcsin x+e^x-9$；

$$y=\arctan\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}};\ y=(\pi-2x)^{\cos x}.$$

等都是初等函数.

1.2.3 分段函数

例3 旅客乘火车可免费携带不超过20公斤的物品. 越过20公斤而不超过50公斤的部分每公斤交费0.2元，超过50公斤的部分每公斤交费0.3元，求运费与携带物品重量的函数关系.

解 设物品重量为x公斤，应交运费为y元.

当$0\leqslant x\leqslant 20$时，$y=0$；

当$20<x\leqslant 50$时，$y=0.2(x-20)$；

当$x>50$时，$y=0.2(50-20)+0.3(x-50)=0.3x-9$.

$$\text{即}\quad y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 20,\\ 0.2(x-20), & 20<x\leqslant 50,\\ 0.3x-9, & x>50.\end{cases}$$

在定义域的不同区间内，用不同数学表达式表示的函数称为分段函数.

例4 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^2+1}, & x\geqslant 2,\\ \dfrac{2-x}{x^2+1}, & x<2,\end{cases}\qquad \text{求} f(0)、f[f(3)]、f(a).$$

解 求分段函数的函数值，应先确定自变量取值的所在范围，再按相应的式子进行计算.

$x=0<2$，故$f(0)=\dfrac{2-0}{0^2+1}=2$.

$x=3>2$，故$f(3)=\dfrac{3-2}{3^2+1}=\dfrac{1}{10}$.

$f(3)=\dfrac{1}{10}<2$，故$f[f(3)]=\dfrac{2-\dfrac{1}{10}}{\left(\dfrac{1}{10}\right)^2+1}=\dfrac{190}{101}$.

计算$f(a)$时，要分两种情况：

当$a\geqslant 2$时，$f(a)=\dfrac{a-2}{a^2+1}$.

当$a<2$时，$f(a)=\dfrac{2-a}{a^2+1}$.

分段函数一般不是初等函数，但分段函数 $y=|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是初等函数. 因为 $y=\sqrt{x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2$ 复合而成的复合函数.

1.3 常用经济函数

1.3.1 需求函数和价格函数

市场经济中，需求是指消费者在一定时期内，在各种可能的价格下，愿意而且有能力购买的商品数量. 很多因素影响消费者对商品的需求，其中商品价格 p 是影响需求量 q 的基本因素. 需求量 q 对价格 p 的函数 $q=f(p)$ 称为需求函数，它的反函数 $p=f^{-1}(q)$ 称为价格函数. 一般地，售价上涨，需求量减少，售价下降，需求量增加. 所以，$q=f(p)$ 为单调减少函数.

例 1 某种服装，当每件售价 40 元时，每天可售出 800 件；如果每件降低 2 元，则每天可多售出 30 件. 试求卖出件数与售价的需求函数关系.

解 设价格为 p 元，每天卖出 q 件，依题意，有

$$q=800+\frac{40-p}{2}\cdot 30=1400-15p.$$

1.3.2 供给函数

在市场经济中，供给是指生产者在某一时期，某一价格水平下，愿意而且能够出售的商品量. 供给量 Q 对价格 p 的函数 $Q=g(p)$ 称为供给函数. 一般地，价格越高，生产者的供给量越大，价格越低，生产者的供给量越少. 所以，$Q=g(p)$ 为单调增加函数.

需求函数的图形称为需求曲线，供给函数的图形称为供给曲线. 需求曲线与供给曲线的交点，称为供需均衡点，此时的价格称为均衡价格.

1.3.3 成本函数和平均成本函数

总成本 $C=C(q)$ 是固定成本 C_0 与变动成本 $C_1(q)$ 之和

$$C=C(q)=C_0+C_1(q)\quad (q \text{ 为产量}).$$

平均成本：$\overline{C}=\overline{C}(q)=\dfrac{C_0}{q}+\dfrac{C_1(q)}{q}$.

平均成本是生产单位产品所需的成本，又称单位产品成本.

例 2 某手表厂，日产量不超过 1000 只，每只的变动成本为 15 元，每天的

固定成本为 2000 元，求该厂每天的总成本函数及平均成本.

解　设日产量为 q，则 $C_0=2000$ 元，$C_1(q)=15q$，

所以 $C(q)=2000+15q$，$0\leqslant q\leqslant 1000$.

$$\overline{C}(q)=\frac{2000+15q}{q}=15+\frac{2000}{q}$$

1.3.4　收益函数和利润函数

收益 R 是销售量 q 和价格 p 的乘积，即 $R=pq$. 因 $p=f^{-1}(q)$，所以 $R=R(q)$ 或 $R=R(p)$.

利润函数 $L(q)=R(q)-C(q)$.

当 $L(q)=0$，即 $R(q)=C(q)$ 时，得 $q=q_0$，q_0 称为盈亏临界点. 此时收支平衡.

当 $q<q_0$ 时，$R(q)<C(q)$，则亏损.

当 $q>q_0$ 时，$R(q)>C(q)$，则盈利.

例 3　某毛巾厂，生产千条毛巾需变动成本 350 元，每天固定成本 1050 元，每千条毛巾出厂价为 700 元. 求每天的总成本函数、收益函数、利润函数及盈亏临界点.

解　设日产量为 q(千条). 依题意得：

总成本函数　$C(q)=1050+350q$.

总收益函数　$R(q)=700q$.

总利润函数　$L(q)=R(q)-C(q)=350q-1050$.

令 $L(q)=0$，得盈亏临界点 $q_0=3$(千条).

1.3.5　库存问题

库存问题是生产管理中的一个重要问题. 假定某厂在计划期间，对某种物品的总需求量为 a，如果将物品一次进货，显然，库存费用增大. 现分批进货，每批进货量相同，每批进货费用为 b，在计划期内单位物品的库存费为 c，假设该物品均匀地投入生产中使用，则平均库存量为批量的一半，我们可以建立总费用(进货费用与库存费用之和)y 与批量(每批进货量)x 之间的函数关系为：

$$y=b\cdot\frac{a}{x}+c\cdot\frac{x}{2}=\frac{ab}{x}+\frac{c}{2}x.\quad(0<x\leqslant a)$$

其定义域$(0,a]$，但有时物品的数量必须是正整数，此时，只取$(0,a]$中的正整数.

1.4 极限的概念

1.4.1 数列的极限

1. 数列变化趋势的类型

我们知道数列$\{u_n\}$是项数n(自然数)的函数，即$u_n=f(n)$，称为整标函数，u_n称为数列的第n项(通项或一般项)．例如数列：

(1) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$

(2) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$: $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots$

(3) $\{-1\}$: $-1, -1, -1, \cdots, -1, \cdots$

(4) $\{2n\}$: $2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots$

(5) $\{1-n\}$: $0, -1, -2, \cdots, 1-n, \cdots$

(6) $\{(-1)^{n-1}\}$: $1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$

(7) $\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$: $1, 0, -1, 0, \cdots, \sin\frac{n\pi}{2}, \cdots$

当n无限增大($n\to\infty$)时，分析上述数列$\{u_n\}$的变化趋势：

(1) $n\to\infty$时，$\frac{1}{2^n}\to 0$;

(2) $n\to\infty$时，$\frac{n+1}{n}\to 1$;

(3) $n\to\infty$时，$-1\to -1$;

(4) $n\to\infty$时，$2n\to+\infty$;

(5) $n\to\infty$时，$1-n\to-\infty$;

(6) $n\to\infty$时，$(-1)^{n-1}$不确定;

(7) $n\to\infty$时，$\sin\frac{n\pi}{2}$不确定．

分析以上实例可以看出，u_n的变化趋势分为以下三种类型：

第一种类型：当$n\to\infty$时，u_n无限接近某个常数A．如(1)、(2)、(3)；

第二种类型：当$n\to\infty$时，$|u_n|$无限增大．如(4)、(5)；

第三种类型：当$n\to\infty$时，u_n既不无限接近某个常数A，$|u_n|$也不无限增大．例如：(6)、(7)．