College

高等学校经典教材配套辅导丛书

概率论与数理统计

考研辅导与习题详解

姬振豫 主编

◆ 难点、考点归纳 ◆ 习题全部详解

◆ 名校期末题、考研题精选精解

陕西师范大学出版社

概率论与数理统计

考研辅导与习题详解

主　编　姬振豫

编　者　苗文利　吴　然

　　　　杨贵军　陈凤英

陕西师范大学出版社

图书代号:JF5N0703

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计考研辅导与习题详解/姬振豫编. —西安:陕西师范大学出版社,2005.9

(大学教辅)

ISBN 7-5613-3288-2

Ⅰ.概… Ⅱ.姬… Ⅲ.①概率论—高等学校—自学参考资料②数理统计—高等学校—自学参考资料 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第107617号

策　　划　雷永利　史俊孝
责任编辑　陈焕斌
封面设计　王静婧
责任校对　刘峰利
出版发行　陕西师范大学出版社
社　　址　西安市陕西师大120信箱(邮政编码:710062)
网　　址　http://www.snuph.com
经　　销　新华书店
印　　刷　陕西师范大学印刷厂
开　　本　850×1168　1/32
印　　张　10.5
字　　数　239千
版　　次　2005年9月第1版
印　　次　2005年9月第1次
印　　数　5000
定　　价　13.00元

开户行:光大银行西安电子城支行　账号:0303080—00304001602

读者购书、书店添货或发现印刷装订问题,请与本社营销中心联系、调换。

电　话:(029)85307864　85233753　85251046(传真)

E—mail:if—centre@snuph.com

前　言

《概率论与数理统计考研辅导与习题详解》是根据教育部颁布的《全国硕士研究生考试大纲》的要求编写的.目的是帮助考生系统地掌握概率论与数理统计的基本概念、基本公式和基本方法,提高其在概率论与数理统计方面的素养,了解熟悉考研题型.培养考生举一反三,融会贯通的解题能力.

考研试题往往是综合性的,与一般的教科书中的习题不同.因此,对于考研试题需要综合运用多个概念、公式和定理才能得到正确的答案.这就要求考生具有较高的概率论与数理统计知识的素养和综合运用能力.因此考生要在学过的概率论与数理统计知识的基础上进行归纳、综合、深化和提高.

本书由两部分组成.前七章为第一部分,每章概述了主要定义、定理、例题和习题,其中也包含了本书主编在教学中的一些体会.通过这一部分的复习可以系统地掌握概率论与数理统计的基本概念、基本公式和基本方法.第二部分是

第八章，这一章是例题解析，其中给出了三百余道典型例题的详细解答（其中一些是历届试题），阅读本章可以提高学生综合解题的能力. 书后附了2001年至2005年的硕士研究生入学考试题（概率论与数理统计部分）及其参考解答.

本书除了作为考研辅导资料外，还可以作为概率论与数理统计课的学习指导书.

本书在编写的过程中得到了天津工程师范学院数理系及天津墨香文化传播有限公司数学研究中心的支持和帮助，何文章教授对本书的编写提出了宝贵的意见，在此表示衷心感谢. 姬国红参与了本书第八章部分解题工作.

限于水平，再加上编写时间仓促，其中难免有不妥和疏漏之处，请读者多提宝贵意见.

编　者

2005.4

目 录

第一章　随机事件及其概率

一、随机试验和随机事件

1. 随机试验(记作 E)若试验满足条件

(1)可以在相同条件下重复进行;

(2)所有可能结果不止一个;

(3)作一次试验究竟哪一个结果出现,事先不能确定．则称此试验为随机试验．

2. 基本事件　随机试验 E 的每一个不可再分解的结果称为基本事件,也称为样本点,用记号 ω 表示．

3. 样本空间　全体基本事件的集合称为样本空间,用记号 S 表示．

4. 随机事件　随机事件定义为样本空间的某个子集．用记号 $A,B,C,\cdots$ 表示,称事件 A 发生,当且仅当 A 中某基本事件发生.

5. 必然事件　在一定条件下,每次试验一定发生的事件,用记号 S 表示．

6. 不可能事件　在一定条件下,每次试验一定不发生的事件,用记号 $\varnothing$ 表示．

例 1　将一枚均匀对称的硬币连掷两次是一个随机试验,可能结果有四个:(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)．这里括号内的第一个字和第二个字分别表示第一次和第二次掷的结果,正(反)表示正(反)面朝上．故样本空间为

$S=\{$(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)$\}$.

若设事件 $A=\{$第一次出现正面$\}$,A 发生,当且仅当基本事件(正,正),(正,反)中一个发生. 因此事件 A 是由(正,正),(正,反)组成的集合,即

$$A=\{(\text{正},\text{正}),(\text{正},\text{反})\}.$$

类似地,若设事件 $B=\{$两次出现同一面$\}$,则

$$B=\{(\text{正},\text{正}),(\text{反},\text{反})\};$$

若设事件 $C=\{$至少有一次出现正面$\}$,则

$$C=\{(\text{正},\text{正}),(\text{正},\text{反}),(\text{反},\text{正})\}.$$

例2 观察某地区一昼夜最低温度 x,最高温度 y,设该地区的温度不小于 T_0,也不会大于 T_1,则样本空间为

$$S=\{(x,y)\mid T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}.$$

若事件 $A=\{$最高温度与最低温度之差不超过 10 ℃$\}$,则

$$A=\{(x,y)\mid y-x\leqslant 10,T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}.$$

二、事件的关系及其运算

1. 事件的包含　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A. 记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

2. 事件的相等　若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A=B$.

3. 事件的积(交)　同时属于 A 和 B 的样本点组成的集合称为 A 与 B 的积(或交),记作 $A\cap B$ 或 AB,事件 AB 发生等价于 A 与 B 同时发生.

用 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示“$A_1,A_2,\cdots,A_n$”同时发生的事件,称之为“$A_1,A_2,\cdots,A_n$”的积.

用 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示“$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$”同时发生的事件,称之为“$A_1$,

$A_2,\cdots,A_n,\cdots$”的积.

4. 互不相容(互斥)事件　若 $AB=\varnothing$,即 A 与 B 不能同时发生,则称 A 与 B 为互不相容(互斥)事件.

5. 事件的和(并)　至少属于 A 和 B 二者之一的样本点组成的集合称为 A 与 B 的和(或并),记作 $A\cup B$,事件 $A\cup B$ 发生即 A 与 B 至少有一个发生.

用 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ 表示“$A_1,A_2,\cdots,A_n$”中至少有一个发生的事件,称之为“$A_1,A_2,\cdots,A_n$”的和. 当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容时它们的和可写为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 或 $\sum_{i=1}^{n}A_i$.

用 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示“$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$”中至少有一个发生的事件,称之为“$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$”的和.

6. 事件的差　包含在 A 中而不包含在 B 中的样本点的集合称为 A 与 B 的差,记作 $A-B$,事件 $A-B$ 发生表示 A 发生 B 不发生.

7. 对立事件　S 与 A 之差称为 A 的对立事件,记作 $\overline{A}$.

关于对立事件有性质:

$A\overline{A}=\varnothing,\quad A+\overline{A}=S.$

8. 事件加法与乘法的运算律

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A.$

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C).$

9. 对减法运算满足　$A-B=A\overline{B}=A-AB.$

10. 对偶原理(摩尔根定律)关于对立运算加法和乘法可以互相转化.

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

例3 设 A,B,C 是三个随机事件,试用 A,B,C 表示:

(1)恰有 A 发生;

(2)A 与 B 都发生而 C 不发生;

(3)A,B,C 都发生;

(4)A,B,C 至少有一个发生;

(5)至少有两个事件发生;

(6)恰有一个事件发生;

(7)恰有两个事件发生;

(8)不多于一个事件发生;

(9)不多于两个事件发生;

(10)三个事件都不发生.

解 (1)$A\overline{BC}$;(2)$AB\overline{C}$;(3)ABC;

(4)$A\cup B\cup C$;(5)$(AB)\cup(AC)\cup(BC)$;

(6)$(A\overline{BC})\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(\overline{AB}C)$;

(7) $(AB\overline{C})\cup(A\overline{B}C)\cup(\overline{A}BC)$;

(8) $\overline{(AB)\cup(AC)\cup(BC)}$;

(9) $\overline{ABC}$;

(10) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

三、随机事件的概率

1. 古典概率定义

设 E 是一随机试验,若它的样本空间 S 满足条件:

(1)只有有限个基本事件;

(2)每个基本事件发生的可能性相同.

则称 E 为古典概型的试验．在古典概型中设样本点总数为 n,事件 A 包含的样本点数为 m,事件 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

2. 几何概率　向一区域 S 中掷一质点 M,如果必落在 S 内,且落在 S 内任何子区域内的可能性只与 A 的度量成正比,而与 A 的位置和形状无关．则称此试验为几何概型．并定义 M 落在 A 中的概率为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}.$$

其中 $L(A)$,$L(S)$ 为区域 A 和样本空间的度量.

3. 概率的统计定义　在一组固定条件下,重复 n 次试验,如果当 n 增大时,事件 A 出现的频率 $f_n(A)$ 围绕着某一个常数 p 摆动,而且一般说来,随着 n 的增大,这种摆动的幅度愈来愈小,则称常数 p 为事件 A 的概率．即

$$P(A)=p.$$

这个定义适用于一切随机试验,由于频率 $f_n(A)$ 近似于概率 $P(A)$,因此它提供了在实际工作中确定概率的方法．而且它还体现了概率的真实含义.

4. 概率的公理化定义

设试验 E 的样本空间为 S,对于任一随机事件 A,都有确定的实数 $P(A)$ 与它对应,且满足以下三个公理:

公理 1　$P(A)\geqslant 0$.

公理 2　$P(S)=1$.

公理 3　如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是两两互不相容的事件,那么

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

5. 概率的性质

(1)设 n 个事件两两互不相容,则

$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$;

(2)对于任一事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(3)对于任一事件 A,有 $P(\overline{A})=1-P(A)$;

(4)若 $A\subset B$ 则 $P(A)\leqslant P(B)$ 且 $P(B-A)=P(B)-P(A)$;

(5)对于任意二事件 A 与 B 有 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$;

(6)对于任意二事件 A 与 B 有 $P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$ 且

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$;

(7)对于任意三事件 A,B,C 有

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$;

(8)设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

性质(6)、(7)和(8)称为概率的加法公式. 实际上以上概率的各性质除性质(2)外,均属于概率的加法公式的范围. 不过有的是其特例,有的是其变形罢了.

四、概率的计算

关于概率的计算问题一般分为两类,一类是直接应用概率的定义(古典定义与几何定义)计算;另一类是应用概率的性质从已知事件的概率计算出未知事件的概率.

对于后者,若已知事件是互不相容的,用性质(1)(即互不相容事件的加法公式)计算. 当待计算概率的事件为积的形式时,

可用对偶原理化为和的形式．

在古典概率的计算中一般要用排列组合知识．特别地，在抽样试验中一般有三种情形：即有返回地一个一个抽取的结果为可重复排列；无返回地一个一个抽取的结果为无重复排列；一次抽取的结果为组合．

例 4　设电话号码由五个数码组成，每个数码可以是 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 中的任一个．求五个数码全不同的电话号码的概率．

解　每个五位电话号码为一个基本事件且它可看作从 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 十个数码中有返回地一个一个抽取而得的结果．因此是一个从 10 个不同元素中每次取 5 个元素的可重复排列．从而基本事件总数为 $n=10^5$，记 $A=\{$五个数码全不同的电话号码$\}$，A 中每个基本事件为 10 个数码中无返回地一个一个抽取 5 个而得的结果．因此 A 中每一个基本事件是一个从 10 个不同元素中每次取 5 个元素的无重复排列．从而 A 中包含的基本事件数为 $m=\mathrm{A}_{10}^5$，故由古典概率定义可知

$$P(A)=\frac{\mathrm{A}_{10}^5}{10^5}=\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{10^5}=0.3024.$$

例 5　设一批产品共有 100 件，其中有 5 件次品，从中任取 50 件．求事件 $A=\{$取出的 50 件中恰有 2 件次品$\}$的概率．

解　从 100 件中任取 50 件为一组的每一可能组合为基本事件，总数为 C_{100}^{50}，事件 A 中包含的基本事件为从 5 件次品中取出两件，从 95 件正品中取出 48 件构成的组合有 $\mathrm{C}_5^2\times\mathrm{C}_{95}^{48}$ 个．故所求概率为

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_5^2\times\mathrm{C}_{95}^{48}}{\mathrm{C}_{100}^{50}}=0.32.$$

例 6　二人约定于 0 到 T 时内在某地会面，先到者等 $t(t\leqslant T)$ 时后离去．求二人能会面的概率．

解 以 x,y 分别表示二人到达的时刻，则 $0\leqslant x\leqslant T,0\leqslant y\leqslant T$. 满足以上二不等式的点 (x,y) 构成边长为 T 的正方形 S(图 1).二人能会面的充要条件是

$$|x-y|\leqslant t.$$

这个条件决定了 S 中的一个子集 A(图 1 中阴影部分).

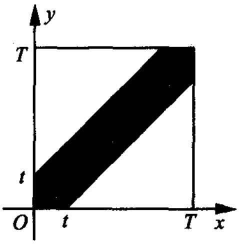

图 1

根据几何概率的定义可知，二人能会面的概率为

$$P(A)=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2.$$

例 7 从 10,11,…,99 这 90 个两位数中任取一数，求这个数能被 2 或 3 整除的概率.

解 设 $A=\{$能被 2 整除$\}$，$B=\{$能被 3 整除$\}$，则

$A\cup B=\{$能被 2 或 3 整除$\}$，

$AB=\{$同时能被 2 和 3 整除$\}$.

由于这 90 个二位数中能被 2 整除的有 45 个，能被 3 整除的有 30 个，能被 6 整除的有 15 个.

故 $P(A)=\frac{45}{90},P(B)=\frac{30}{90},P(AB)=\frac{15}{90}$

由概率的加法公式，得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{45}{90}+\frac{30}{90}-\frac{15}{90}=\frac{2}{3}.$$

例 8 事件 A,B 的概率分别为 $\frac{1}{3},\frac{1}{2}$. 试求下列三种情况下 $P(\overline{A}B)$ 的值：

(1) A 与 B 互斥；(2) $A\subset B$；(3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

解 (1) 由于 A 与 B 互斥，故 $B\subset\overline{A}$，于是 $B=\overline{A}B$，从而得

$P(\overline{A}B)=P(B)=\dfrac{1}{2}$;

(2)由于$A\subset B$且$\overline{A}B=B\overline{A}=B-A$,

故$P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(A)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$;

(3)$P(\overline{A}B)=P(B\overline{A})=P(B-A)=P(B)-P(AB)$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{8}$.

习题一*

1. 写出下列随机试验的样本空间及已给事件的样本点：

(1)掷一颗骰子,记录出现的点数. $A=\{$出现奇数点$\}$;

(2)将一颗骰子连掷两次,记录出现的点数. $A=\{$两次点数之和为10$\}$, $B=\{$第一次出现的点数比第二次出现的点数大2$\}$;

(3)一个口袋中有5个外形完全相同的球,编号分别为1,2,3,4,5,从中同时取出3个球,观察其结果. $A=\{$球的最小号为1$\}$;

(4)将a,b两个球随机地放到甲、乙、丙三个盒子中去,观察放球情况. $A=\{$甲盒中至少有一个球$\}$;

(5)记录在一段时间内通过某桥的汽车流量. $A=\{$通过的汽车不足5辆$\}$, $B=\{$通过的汽车不少于3辆$\}$.

2. 设A,B,C是随机试验E的三个事件,试用A,B,C表示下列事件：

(1)仅A发生;

(2)A,B,C中至少有两个发生;

(3)A,B,C中不多于两个发生;

(4)A,B,C中恰有两个发生;

(5)A,B,C中至多有一个发生.

3. 从电话号码簿中任意取一个电话号码,求后面4个数字全不同的概率.