

方延明 编著

数字文化

清华大学出版社

方延明
编著

数学文化

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是一本高等学校素质教育的新型教材,其特点是把数学作为文化来研究。通过对数学文化的学习,培养大学生的抽象思维、形象思维和逻辑思维等方面的能力,特别是大学生的创新能力,提高文化素质,以适应社会需要。不管是学过数学,还是没学过数学的人,只要具备一定数学基础,都可阅读该书,并获得帮助。

本书共分八章,简要阐述了数学文化的学科体系,以及数学文化的哲学观、社会观、美学观、创新观、方法论等方面的主要内容,并附有专章介绍几千年来数学思想发展史,给读者一个整体的数学科学发展的系统体系。

本书在写作上坚持理论联系实际,注重介绍思想,介绍方法,重在开拓人们思考问题的思路,诱导激发人们的创新意识。

本书可作为高等学校文、理、工各类大学生素质教育的专门教材,也可作为一般人文科学工作者、社会科学工作者、大学教师、研究生,包括国家公务员在内的文化参考用书和课外读物。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

数学文化/方延明编著. —北京:清华大学出版社,2007.9

ISBN 978-7-302-15187-6

I. 数… II. 方… III. 数学—文化 IV. O1-05

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第069526号

责任编辑:梁恩忠 王海燕

封面设计:付瑞学

责任校对:焦丽丽

责任印制:孟凡玉

出版发行:清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

c-service@tup.tsinghua.edu.cn

社总机:010-62770175

投稿咨询:010-62772015

地 址:北京清华大学学研大厦A座

邮 编:100084

邮购热线:010-62786544

客户服务:010-62776969

印 刷 者:清华大学印刷厂

装 订 者:北京国马印刷厂

经 销:全国新华书店

开 本:175×245 印 张:19.5

字 数:380千字

版 次:2007年9月第1版

印 次:2007年9月第1次印刷

印 数:1~3000

定 价:29.80元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:010-62770177 转 3103 产品编号:024649-01

数学就是这样一种东西：她提醒你有无形的灵魂，她赋予她所发现的真理以生命；她唤起心神，澄清智慧；她给我们的内心思想增添光辉；她涤尽我们有生以来的蒙昧与无知。

——Proclus

序 言

我为什么要写这本书

如何评价摆在读者面前的《数学文化》，这是读者的事。但是我自己应该有一个起码的认识。我想，就这本书而言，我希望她能基本上是一个健康的足月儿。不过，这确实是有了一点奢望了。既然已经生出来了，世人评说就由不得自己了。到目前为止，我还没有看到过一本专门的关于数学文化方面的专著。虽然此前国内外出版了一些类似的书籍，但大都是从某一方面论述或研究数学与文化、哲学、社会等方面的内容，他们并没有把数学单独作为一门文化来研究，且给出它严格的学科定义与框架结构。因此，在客观上就增加了本书写作过程的难度。其中，主要表现在参考书少，也缺乏参照系。但从另一角度看，也有令人高兴的地方，那就是使得我们面前这块不太成样的东西，有机会成为数学文化学科里的第一块引玉之砖，这是令人欣慰的。它使我想起了一位比牛顿晚生了大约整整一个世纪的著名数学家拉格朗日，他在评价牛顿时，不无溢美又有一点讽刺味道地说：“牛顿，无疑是特别有天才的人，但是我们也必须承认，他也是最幸福的人，一个人建立世界体系的机会只有一次。”他又说：“牛顿是多么幸运啊，在他那个时候，世界的体系仍然有待开发呢！”^①当然，我这里绝无类比的意思，而只是说，能有机会写这样一本书或者说踏进这块处女地是幸运的。

我为什么要写这本书呢？

首先，最直接的原因是我认为数学文化在提高人的素质、推动社会进步方面扮演的角色太重要了。诚如一位大数学家讲的，一个时代的总的特征在很大程度上与这个时代的数学活动密切相关。著名科学家、X射线的发现者伦琴在被问到科学工作者必须具备什么素养时，他回答说：“第一是数学，第二是数学，第三还是数

^① [美]贝尔 E. T. 数学精英. 徐源译. 宋蜀碧校. 北京：商务印书馆，1994，197。

学。”《数学家言行录》一书中有一部分是专门记录对数学的评价的,其中许多深刻论述了数学教育与人的素质之间的关系,比如:

(1)……数学能够集中、加速和强化人们的注意力,能够给人发明创造的精细与谨慎的谦虚精神,能够激发人们追求真理的勇气和自信心……数学比起任何其他学科来,更能使学生得到充实和增添知识的光辉,更能锻炼和发挥学生们探索事理的独立工作能力。

——狄尔曼(E. Dillmann)

(2) 教育孩子的目标应该是逐步地组合他们的知和行。在各种学科中,数学是最能实现这一目标的学科。

——康德·依曼努尔(Kant Immanuel)

(3) 每一门科学都有制怒和消除易怒情绪的功效,其中尤以数学的制怒功效最为显著。

——鲁什(Rush)

(4)……数学能唤起热情而抑制急躁,净化灵魂而使之杜绝偏见与错误。恶习乃是错误、混乱和虚伪的根源,所有的真理都与此抗衡。而数学真理更有益于青年人摒弃恶习。

——阿尔布斯纳特·约翰(Arbuthnot John)

再比如,数学家 B. Demollins 说:

没有数学,我们无法看透哲学的深度;没有哲学,人们也无法看透数学的深度;而若没有两者,人们就什么也看不透。

C. B. Allendoerfer 说:

当前最令人兴奋的发展是在社会科学和生物科学中数学模型的构造。

A. Kaplan 指出:

由于最近 20 年的进步,社会科学的许多重要领域已经发展到不懂数学的人望尘莫及的阶段……我们向读者提出,在社会科学中不断扩大的数学语言的应用是具有重要意义的。

A. N. Rao 指出:

一个国家的科学的进步可以用它消耗的数学来度量。^①

M. 克莱因说:

数学不仅是一种方法,一门艺术或一种语言。数学更主要的是一门有着丰富内容的知识体系,其内容对自然科学家、社会科学家、哲学家、逻辑学家和艺术家十分有用,同时影响着政治家和神学家的学说;满足了人类探索宇宙的好奇心和对美妙音乐的冥想;甚至可能有时以难以察觉到的方式但无可置疑

^① 张顺燕. 数学的思想、方法和应用. 北京: 北京大学出版社, 1997. 7~8.

地影响着现代历史的进程。

实际上,在现代经验科学中,能否接受数学方法已越来越成为学科成功与否的主要判别标准。

应该指出的是,近代科学的发展,使得数学成为表现科学的理想形态的最好方式,数学化已经进一步成为科学所追求的目标。胡塞尔已指出了这一点:“通过伽利略对自然的数学化,自然本身在新的数学的指导下被理念化了;自然本身成为用现代的方式来表达——一种数学的集。”^①诚然,自然的数学化往往意味着将自然还原为数量关系及形式的结构,其逻辑的结果则是远离日常的、具体的世界。在数学的模型与符号的结构中,世界常常失去了感性的光辉。对此马利坦做了如下评价:“科学(在同哲学相区别的意义上)越来越倾向于自身的纯粹形式,这实际上表明了它不是智慧的一种形式。它在科学中构成的一个自主解释的世界,以及成为一个去除了可感现象的概念的符号系统,就揭示了这一点。”^②但是,不管怎么说,对超越混沌的直观,达到认识的严密性,无疑具有不可忽视的意义。

.....

或许正是由于人类进步,才把数学推到这样重要的位置,所以 1992 年联合国教科文组织在里约热内卢宣布:“2000 年是世界数学年”,其目的在于加强数学与社会的联系。里约热内卢宣言明确指出:“纯粹数学与应用数学是理解世界及其发展的一把主要钥匙。”

人类文明的进步需要这把钥匙,中国的现代化需要这把钥匙。

早在 1959 年 5 月,著名数学家华罗庚就在《人民日报》上发表了《大哉数学之为用》,精彩地论述“宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁”等方面,无处不有数学的重要贡献。中国科学院数学物理学部王梓坤先生起草的《今日数学及其应用》课题中,特别强调了数学的贡献,他说:“数学的贡献在于对整个科学技术(尤其是高新技术)水平的推进与提高,对科技人才的培养和滋润,对经济建设的繁荣,对全体人民的科学思维与文化素质的哺育,这四方面的作用是极为巨大的,也是其他学科所不能全面比拟的。”^③

前任武汉大学校长齐民友教授甚至说:

没有现代的数学就不会有现代的文化,没有现代数学的文化是注定要衰落的。

美国科学院院士 J. G. Glimm 曾幽默地说过一句话:

40 年前中国有句话说“枪杆子里面出政权”,而从 90 年代起,在全球应是

① 胡塞尔. 欧洲科学危机与超验现象学. 上海: 上海译文出版社, 1988, 27.

② 马利坦. 科学与智慧. 上海: 上海社会科学出版社, 1992, 32.

③ 严士健. 面向 21 世纪的中国数学教育. 南京: 江苏教育出版社, 1994, 34.

“科学技术里面出政权”。

高新技术是保持国家科技竞争力的关键因素,而高新技术的基础是基础研究,基础研究的基础是数学。

近年来,数学教学作为培养高层次人才的重要内容之一,已越来越受到全社会特别是高等学校的重视。南京大学在全校学生中(包括全部人文、社会科学)开设高等数学课,学生必须参加全校数学统考且过关,否则不授予学位。北京大学从1994年起,也第一次为文科实验班,文、史、国际政治以及外语等专业开设了高等数学。但是,对更多的学校来说,普及高等数学的任务还相当艰巨。目前,美国大学招生的SAT(能力测验)只考数学和英语两个科目,各科满分是800分。1997年,数学平均分515分,英语平均分506分。

二是我个人的体会。近年来,我接触了一些文化研究者,主要是年轻人,包括我自己指导的研究生。在与他们的交往以及指导研究生论文的过程中,我发现,有些人尽管说话条理是道,或者说已经占有了大量资料和素材,甚至有的资料可以倒背如流,但是做起文章来,往往不着要领,思路不清楚,立意不新颖,缺少思想火花。之所以如此,我以为一个重要的原因就是缺少方法论方面的基本素养。而方法论方面的基本知识,除了从哲学中获取,还应从数学那里获取。历史地看方法论,我以为是数、哲同源。我后来就经常介绍他们看一些数学、哲学方面的书,特别是数学方面的书。大多数人反映啃起来很痛苦,但有少数硬着头皮坚持下来的,说读了数学之后,简直是顿开茅塞,获益匪浅,真有点开窍了的感觉。所以,我也就产生了要写一本数学方面的书的想法。因为哲学方面的书是太多了,可以说汗牛充栋,无须我再赘言。

三是自己具备一些基本条件。这些年来,我主要从事文化方面的研究,包括中西文化比较,中国传统文化,以及结合我从事的工作而进行的新闻文化方面的研究,应当说对文化问题有一些自己的想法。再者从所学专业来讲,我本来是南京大学数学系毕业的。虽说读书时在文革中受“左”的思潮影响,一些课程没有学好,又加上20多年不搞数学,以致大部分东西都已还给老师了,不过有时心血来潮,再翻翻一些数学专业方面的书,基本的东西还是可以温习掌握的。我想,可能从这个意义上来说,由我来搞数学文化,兼跨两个行当,有一定优势:既不像一些纯搞文的人来搞数学,那可以说如读天书;而对大多数一直就是搞数学的人来讲,同时具有较好的文化研究方面素养的也是不多的。

四是数学文化方面取得的研究成果。国内学术界这些年来出版或者翻译了一些数学与文化方面的著作,取得了一些重要成果。应当承认,由于多方面的原因,有些很不错的书未在社会上产生大的反响。比如湖南教育出版社翻译出版了一批国外的数学思想史、方法论方面的书。所有这些,尽管不是从一个完整的体系上研究数学文化,但也从多方面提供了可资借鉴的东西,拓宽了我的视野,增强了我的

信心。还有,我在新闻文化及新闻研究方面也出版了五本书,从写作的体例上,也为我要撰写的《数学文化》提供了经验。

采用什么样的体例,或者说怎样写,如何定位,这是写这本书碰到的第一个问题。我想,首先这不是一本数学专著,写数学专著是数学家的事,再说我也不胜其力。当然,这也不是一本科普读物,它既不同于 M. 克莱因的《古今数学思想》,也不同于 R. 柯朗、H. 罗宾的《数学是什么》。《古今数学思想》原著洋洋洒洒 51 章共 1230 页;翻译本有 1435 页。我写这本《数学文化》,是把数学当作一种文化去研究,当作一种文化现象、思想方法、艺术追求。早在明末清初,我国就有一批志士先贤以包容的心态接受了西方传进的数学思想,把数学看成一种崭新的文化,是人类如何对待世界的一种新的态度,新的思维方法。最典型的要数徐光启翻译了欧几里得的《几何原本》。他在一篇《几何原本杂议》中说:“此书有四不必:不必疑,不必揣,不必试,不必改。有四不可得:欲脱之而不可得,欲驳之而不可得,欲减之而不可得,欲前后更置之而不可得。有三至三能:似至晦,实至明,故能以其明明他物之至晦;似至繁,实至简,故能以其简简他物之至繁;似至难,实至易,故能以其易易他物之至难。易生于简,简生于明,综其妙简明而已。”当时徐光启已充分认识到这种新数学的特点在于它追求完全确定的知识,并以此驾驭人类的一切知识。特别是在提高人的认识能力的作用上。他说:“此书为益,能令学者祛其浮气,练其精心,学事者资其定法,发其巧思。故举世无一人不当学。”在与当时(17 世纪初)中国固有的数学文化比较时,徐光启尖锐地批评了封建社会末期中国文化中的落后成分,这就是“其一为名理之儒,土苴天下之实事;其一为妖妄之术,谬言数有神理。”三百多年前的徐光启正是按这个意义来理解现代数学作为一种新的文化的。

可以这样说,没有任何一种科学能像数学这样泽被后人。数学是一种完全的可靠的知识,是一种科学,它给人以理性。

爱因斯坦在谈到数学时说:

为什么数学比其他一切科学受到特殊的尊重,一个理由是它的命题是绝对可靠的和无可争辩的,而其他一切科学的命题在某种程度上都是可争辩的,并且经常处于会被新发现的事实推翻的危险之中。

数学之所以有高声誉,还有另一个理由,那就是数学给予精密自然科学之某种程度的可靠性,没有数学,这些科学是达不到这种可靠性的。^①

把数学作为一种文化研究,还在于它表现了一种前所未有的探索精神,创新精神,它的理性思维的功能发挥得淋漓尽致,它给人提供的不仅仅只是思维模式,同时又是一种有力的解决问题的工具和武器,既反映了思维上的合理性和价值趋向,又拓展了人们的思想解放之路,因为数学常常是自己否定自己的。

^① 爱因斯坦文集. 北京:商务印书馆,1976,136。

正是基于上面的这些原因和想法,我在本书中提出了数学文化的学科观、社会观、哲学观、美学观、创新观、方法论等,试图从数学文化的内涵和外延方面,尽量给人一个清晰的轮廓,最终使数学和非数学专业的人都能从中获得一种知识思维的力量,推动人们的素质的提高。

一般讲,每个人都有或几个美好的愿望。美好的愿望能给人以力量。但是,美好愿望的实现往往与付出的劳动成正比,愿望越美妙,付出的劳动就越大。产生写《数学文化》的想法最早始于1991年,记得1997年看到一本《数学精英》^①,其中有一节是这样写的:

当我们开始从数学史中理出一条特殊的线索时,我们很快就会产生一种沮丧的感觉:数学本身就像一个巨大的墓地,不断添进需要永久纪念的新死者。对这些新死者,如同对5000年前为永久纪念而安葬在里面的那少数死者一样,必须这样展示,以使它们似乎仍保持着生前充沛的活力;事实上,必须造成这样的幻觉:他们的生命从来也没有终止。这种假象必须十分自然,甚至挖掘这一陵墓的最多疑的考古学家也会为之感动,而与活着的数学家们一起宣称:数学真理是不朽的、不可磨灭的。昨天如此,今天如此,永远如此;它们是形成永恒真理的真正材料,是人类在生、死和衰退的循环往复背后瞥见的永恒。

对于任何科学的进步,发明者和完善者都是必要的。每一个探索者,除了他的“侦察兵”以外,还必须有追随者,由他们去告知世界他发现了些什么。但是对人类的大多数来说,公正与否无关紧要。首先指出新途径的探索者更引人注目,即便他本人只向前蹒跚地跨出了半步。因而我们将追随开创者而非发展者。幸而历史是公正的,数学上大多数开创者也是无可匹敌的发展者。

为发明那些现在视为常识般简单的东西——例如,我们写数字的方式,它的值的“定位系统”,以及符号零的引进,后者最终完善了定位系统——人们花费了难以置信的劳动。甚至更简单的东西,包括最基本的数学思想——**抽象和概括**,人们一定也经过了多少个世纪的斗争才设想出来。然而,它们的创始人已经湮没无闻,他们的生活和特点没有留下任何痕迹。比如,伯特兰·罗素曾说过:“一定经过了许多年代,人们才发现了一对野鸡和两天都是数字2的例子。”罗素自己的“2”或任何其他正整数的逻辑定义的形成,大约经过了25个世纪的文明。

还有,我们在开始学习几何时就(错误地)认为我们完全了解了点的概念,它在人类作为一个艺术的、洞穴绘图动物的生涯中,一定出现得很晚。英国的数学物理学家拉姆·霍勒斯就曾想要“为那些把数学点做了最高类型的

^① [美]贝尔 E.T. 数学精英. 徐源译. 宋蜀碧校. 北京:商务印书馆,1994。

抽象的无名数学发明者竖一座纪念碑,因为这种抽象从一开始就是科学工作的必要条件”。

那么,究竟是谁发明了数学点呢?在某种意义上是兰姆的被忘却了的人;在另一种意义上,是欧几里得及他的定义:“一个点就是既无大小也无长度”;而在第三种意义上是笛卡儿及他的“点的坐标”的发明;直至最后,正如一些专家今天在几何学中所做的,神秘的“点”被一些更为有用的东西——以**确定次序写成的一系列数**——所代替。它们把被忘却了的人和他全部永久湮没了的神联系在一起。^①

抄录完上面这一大段话后,我掩卷沉思,思绪万千。

我想,人类文明的生生不息,总是薪尽火传的。无数的人都在如数学的“点”那样去做出自己的工作,但是真正像“点”一样刻写在那块发明者的纪念碑上的人毕竟是少数,但人们并没有因此而失去追求。

因此,那次阅读之后,我完成了一本《数学文化导论》,并于1999年由南京大学出版社出版。《数学文化导论》出版7年来,一直受到学界的关心。随着时间的推移,我对那本书越来越不满意,且有了一些新资料和新想法。2006年秋天,我到北京遇着老朋友,清华大学出版社梁恩忠先生,对他谈了想出一本新的数学文化的想法,他很支持。2006年11月下旬,我接到恩忠的信及合同书,知道选题已获批准,便立即投入写作工作,期望能早日交稿。

从体系到内容《数学文化》对《数学文化导论》都是一个超越。首先是调整了体系结构,增加了“数学文化的学科体系”的内容,提出数学文化体系的“元”概念,特别是关于数学文化体系的“三元结构”。应当说,这个思想还是有创意的。用自在价值、应用价值、工具价值构建数学文化的学科体系,具备了较高的理论思维和开阔的学术视野。

其次是增加了一些较直观的图例,比如在讲到逻辑思维时,增加了一部分关于“错觉”的内容,让人在欣赏中不自觉地就获得了知识。包括对弱抽象与强抽象的理解,也和《数学文化导论》有明显不同。

再者就是提出了数学文化是先进生产力的概念,同时还增加了数学与信息传播的内容,这在许多著作中是没有的。数字化时代,数学文化的作用更大。

另外,还增加了数学文化与构建和谐社会的內容,这部分内容主要还是从法律模型切入。

写一本数学文化方面的书是我多年来的一个愿望。但是,作为博大精深的数学学科,对它在文化上的理解,对人类启蒙作用的诠释,无论怎样去评价它的重要性,我想都不会过分。或许正是由于这一点,越是深入进去,越觉着此事之艰难。

^① [美]贝尔 E.T. 数学精英. 徐源译. 宋蜀碧校. 北京:商务印书馆,1994,9~13.

序言

这种艰难更多的体现在对数学学科缺乏了解、缺乏研究。因此,从这个意义上讲,我是知其不可而为之。

因此,我的做法是:首先,建一个框架体系,然后再去理解数学文化,更多的是从文化的层面理解数学思想。其次,遇到一些比较专业的数学内容,直接引用或借鉴名家名作,但决不掠人之美,均注明出处。但是有一些转引且又很难查到原著的,没有作注,亦请原著者谅解。基于这方面的考虑,因此本书的署名用编著,特此说明,并向所有被本书引用的著作者表示最诚挚的谢意,因为我们都是为了普及数学文化。

数学作为一门学科,已经是枝繁叶茂。研究数学与文化的文章和书籍已出版不少,但是明确提出“数学文化”的书和文章却很少。所以,本书的出版只能说是对自己过去研究的一种补充或者说是一种执著吧。因此,恳请读者批评指正,同时也希望有更好的数学文化方面的著作出版。

当我从1991年就执意要闯进这个未开垦的处女地始,一直到今天提笔写这篇序言,其间甘苦自不必多言。确实,我真的并不在乎是不是像著名数学家贝尔说的那样,是不是往那纪念碑上刻写了“点”的纪录,我只在乎自己是否努力了,只要真心努力了,哪怕是跋涉了一小步,我也就觉得不愧对自己了。

方延明
2007年4月

目 录

序言 我为什么要写这本书	I
第 1 章 引论：数学是什么	1
1.1 万物皆数说	3
1.2 符号说	5
1.3 哲学说	6
1.4 科学说	7
1.5 逻辑说	8
1.6 集合说	8
1.7 结构说	8
1.8 模型说	11
1.9 工具说	12
1.10 直觉说	13
1.11 精神说	14
1.12 审美说	14
1.13 活动说	15
1.14 艺术说	16
第 2 章 数学文化的学科体系	18
2.1 数学文化体系的“元”概念	18
2.2 关于“三元结构”	22
2.2.1 自在价值(概念)	22
2.2.2 工具价值(方法)	24
2.2.3 应用价值(模型)	25
2.3 关于数学文化的外延性	27

2.3.1	数学与文学	27
2.3.2	数学与史学	30
2.3.3	数学与哲学	30
2.3.4	数学与经济	30
2.3.5	数学与语言	32
2.3.6	数学与高科技	34
第 3 章	数学文化的哲学观	36
3.1	数学文化的哲学思维	37
3.1.1	抽象思维	37
3.1.2	逻辑思维	42
3.1.3	形象思维	46
3.1.4	直觉思维	49
3.2	数学文化的对思维	52
3.2.1	宏观与微观	52
3.2.2	抽象与具体	53
3.2.3	证明与非证明	54
3.2.4	有限与无限	58
3.2.5	先天知识与后天经验	62
3.2.6	必然性和偶然性	63
3.2.7	量变与质变	66
第 4 章	数学文化的社会观	70
4.1	数学文化的社会化功能	70
4.1.1	作为社会资源的功能	70
4.1.2	作为符号的功能(语言)	71
4.1.3	作为模型的功能(结构)	79
4.2	数学文化是先进生产力	90
4.2.1	数学文化与信息传播	90
4.2.2	数学文化与和谐社会	97
4.2.3	数学文化与效益最大化	101
4.2.4	数学文化与科技转化	106
4.2.5	数学文化与可持续发展	109



第 5 章 数学文化的方法论	113
5.1 数学文化的辩证法	113
5.1.1 具体与抽象	113
5.1.2 演绎与归纳	118
5.1.3 发现与证明	123
5.1.4 分析与综合	128
5.2 数学文化的一般方法	130
5.2.1 类比法	130
5.2.2 归纳法	133
5.2.3 化归法	135
5.2.4 约定法	138
5.2.5 迭代法	140
5.2.6 论证法	142
5.2.7 逐步逼近法	146
第 6 章 数学文化的美学观	148
6.1 审美与数学文化	148
6.1.1 数学美的评价尺度	148
6.1.2 美是数学家的重要素质	150
6.2 数学美的实质	151
6.3 数学中的和谐美	152
6.3.1 统一美	152
6.3.2 协调美	159
6.3.3 对称美	167
6.4 数学中的符号美	172
6.5 数学中的奇异美	179
6.5.1 关于形“奇”	180
6.5.2 关于意义“奇”	186
6.5.3 关于数字“奇”	190
第 7 章 数学文化的创新观	196
7.1 数学文化的原创性特点	196
7.2 数学对其他新兴学科的支撑作用	205
7.2.1 数学与爱因斯坦的相对论	205
7.2.2 数学与麦克斯韦方程组	206

7.2.3	数学与量子力学	207
7.2.4	数学成就了牛顿	209
7.3	数学创新的基本方法	212
7.3.1	关于扩张法	212
7.3.2	关于发现法	217
7.3.3	科学发现的精神状态	223
7.4	怎样实现数学的创新	225
7.4.1	善于观察	225
7.4.2	勤于思考	228
7.4.3	大胆想象	228
7.4.4	持之以恒	229
7.4.5	保持良好的创造欲望	230
第8章	简明数学思想史	234
8.1	5000年数学走过四段路	234
8.1.1	第一阶段(公元前30世纪—公元前6世纪)	234
8.1.2	第二阶段(公元前5世纪—公元16世纪)	238
8.1.3	第三阶段(17—19世纪)	251
8.1.4	第四阶段(19世纪下半叶至今)	260
8.2	数学史上的四次思想解放	275
8.2.1	承认“无理数”是第一次思想解放	275
8.2.2	微积分的产生是第二次思想解放	276
8.2.3	非欧几何的诞生是第三次思想解放	278
8.2.4	罗素悖论引出的数学基础研究是第四次思想解放	281
附录	数学猜想一览表	283
	主要参考文献	295
	后记	296

数学是科学的大门和钥匙。

——Rogen Bacon

数学是我们时代有势力的科学，它不声不响地扩大它所征服的领域；那种不用数学为自己服务的人将会发现数学被别人用来反对自己。

——J. F. Herbart

第1章 引论：数学是什么^①

1999年，当我出版《数学文化导论》时，我在绪论中写道：“我被日本著名数学家米山国藏的数学精神所深深感染。”他在《数学的精神、思想和方法》^②中说：“数学的精神、思想、方法是创造数学基础、发现新的东西，使数学得以不断向前发展的根源。”作为一个教育学家，他深深体会到，许多在校学习的数学知识，若毕业后进入社会没有机会去用，不到一两年，就忘掉了。“然而，不管他们从事什么业务工作，唯有深深铭刻在头脑中的数学的精神，数学的思维方法、研究方法、推理方法和着眼点等（若培养了这方面的素质的话），却随时随地发生作用，使他们受益终生。”

写这本书的初衷，我已在序言中说了。我总觉得，数学对一个时代的影响，对于一个人的素质太重要了。M. 克莱因甚至讲过“一个时代的总的特征在很大程度上与这个时代的数学活动密切相关”。伟大的物理学家、天文学家、X射线的发现者伦琴，在回答人们问他“作为一个科技工作者的必修学科”时答道，“第一是数学，第二是数学，第三还是数学。”我以为这里的数学不是指一般的数学知识，是指有关数学的精神、思想和方法，我写这本书的目的就在于此。我想用较多一点的篇幅，在这篇引论中详细介绍一下什么是数学，以及数学学科的特点和学习数学的时代意义。

数学是什么？古往今来，许多数学家、哲学家对此留下很多深刻的见解，给后人以启迪。

数学是什么？随着人类社会的进步和科学发展，以及人们对数学文化的不断研究，认识也逐渐深入。数学最引人注目的特点是它的确定性、抽象性、精确性、应用性、广泛性和它的纯净美。不过，要给它一个科学的、大家公认的定义绝非一件易事。

数学是什么？英国的罗素说：“数学是我们永远不知道我们在说什么，也不知

① 本节有许多引文，且大多数是转引的，考虑到篇幅，不一一列出。

② [日]米山国藏. 数学的精神、思想和方法. 毛正中，吴素华译. 成都：四川教育出版社，1986。

道我们说的是否对的一门学科。”而法国的 E. 布莱尔则提出另一个与其针锋相对的说法：“数学是我们确切知道我们在说什么，并肯定我们说的是否对的唯一的一门科学。”两者各执一词，可以说各有各的道理，但罗素的定义似乎陷入虚无主义的态度。布莱克似乎也有类似之说，“据其自撰奇想之论推讲，难知何是似是而非之说。”M. 克莱因曾这样评价数学与社会的关系：“数学决定了大部分哲学思想的内容和研究方法，摧毁和构造了诸多宗教教义，为政治学说和经济理论提供了依据，塑造了众多流派的绘画、音乐、建筑和文学风格，创立了逻辑学，而且为我们必须回答的人和宇宙的基本问题提供了最好的答案。……作为理性精神的化身，数学已经渗透到以前由权威、习惯、风俗所统治的领域，而且取代它们成为思想和行动的指南。最重要的是，作为一种宝贵的、无可比拟的人类成就，数学在使人赏心悦目和提供审美价值方面，至少可与其他任何一种文化门类媲美。”

美国著名数学家 R. 柯朗与 H. 罗宾为此专门写了一本《数学是什么》，在世界各国出版了多种译本，是一本对数学的实质、数学的历史、数学的哲学思想、数学的思维方法，以及数学各个主要分支和主要内容都做了深入研究的重要的学术著作。应当说，这本书更多的是侧重于数学本身。R. 柯朗在这本书中写道：“数学，作为人类智慧的一种表达形式，反映生动活泼的意念，深入细致的思考，以及完美和谐的愿望，它的基础是逻辑和直觉，分析和推进，共性和个性。”

著名美籍华裔科学家王浩在论及数学是什么时说：“我希望检查少数片面的数学观点来澄清模糊思想”，他所检查的“少数片面的数学观点”，即：(1) 数学是(逻辑上)有效的或必然的命题“ p 蕴涵 q ”的类；(2) 数学是公理集合论；(3) 数学是研究抽象结构的；(4) 数学是加快计算速度的。到底什么是数学？王浩没有直接回答。他最后讲：“最基本的问题之一是，我们还没有关于什么是实数或者整数集合是什么的权威性理论。也许我们决不会有一种权威的理论。”这种说法遭到了 S. 麦克莱恩的激烈批评。

米山国藏总结了三种意义上的数学定义。其一，从研究方法的特征上去定义，像罗素和皮尔斯就属于这一类。罗素讲：“数学是所有形如‘ p 蕴含 q ’的命题的类。”皮尔斯讲：“数学是得出必要结论的科学。”其二，从数学的各种研究对象之间的某些相似之处或共同特征去定义。其三，从研究方法及研究对象的特征去定义，比如凯塞的“数学是使思维经济有用的学问”，庞加莱的“数学是给予不同东西以相同名称的技术”等。米山国藏讲，与其定义不好，还不如暂不定义。他主张可以分类定义，比如先定义出数学研究方法的特征，数学对象的特征，数学本质的特征，应用方面的数学特征，把它们集合起来，一个完全的数学定义就有了。

胡作玄是这样理解数学的，他认为，从数学所属的工作领域看，数学是技术、是逻辑、是自然科学、是科学、是艺术、是文化……从数学的对象来看，数学研究计算、研究数与量、研究现实世界的数量关系与空间形式、研究数学模型、研究结构、研究