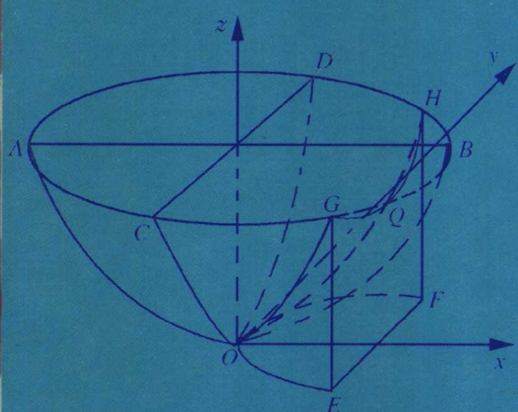
大学数学学习指导丛书

微积分

习题与考研题解析（下册）

张海洋 张学元 编



Weijifen xiti yu kaoyanti jiexi

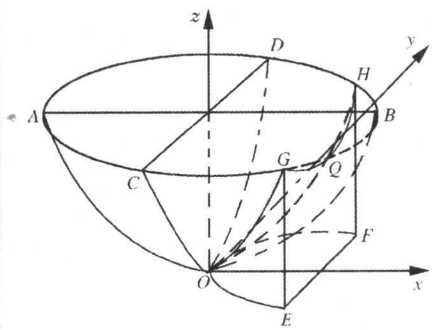
中山大学出版社

大学数学学习指导丛书

微积分

习题与考研题解析（下册）

张海洋　张学元　编



Weijifen xiti yu kaoyanti jiexi

中山大学出版社
·广　州·

图书在版编目(CIP)数据

微积分习题与考研题解析·下册/张海洋,张学元编.—广州:中山大学出版社,2004.9
(大学数学学习指导丛书)
ISBN 7-306-02359-4

Ⅰ.微…　Ⅱ.①张…　②张…　Ⅲ.微积分—研究生—入学考试—解题　Ⅳ.O172-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第089148号

责任编辑:舟　雨　李立鹏
封面设计:朱霭华
责任校对:李春梅
责任技编:黄少伟
出版发行:中山大学出版社
　　　　编辑部电话(020)84111996,84113349
　　　　发行部电话(020)84111998,84111160
地　　址:广州市新港西路135号
邮　　编:510275　　传真:(020)84036565
印 刷 者:江门市新教彩印有限公司
经 销 者:广东新华发行集团
规　　格:787mm×1092mm　1/16　15.875印张　386千字
版次印次:2004年9月第1版　2004年9月第1次印刷
定　　价:26.00元

内 容 简 介

本书是与同济大学编的面向21世纪课程教材《微积分》紧密配套的辅导教材，分上、下两册，上册内容为预备知识、函数与极限、一元函数微分学和积分学，下册内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微分学和积分学、无穷级数.

本书每章由三部分组成：主要概念、定理和公式；习题选解；考研真题选解和预测.它可作为在校本科生学习《微积分》(或《高等数学》)同步的指导书，也可作为考研志士的复习指导书.

前　言

高等教育出版社出版、同济大学编的《微积分》是教育部立项的面向21世纪课程教材，在保持传统教材(同济编《高等数学》)的优点的基础上，作了诸多方面的改革尝试，它有利于新世纪对工程技术人才的数学素质的培养要求. 为了帮助学生学好这门课程和教师教好这门课程，特编写这本与之紧密配套的辅导教材.

为便于读者同步学习，本书编排的目次与《微积分》教材一致，分上、下两册，每章由三部分组成：

第一部分是"主要概念、定理和公式". 它将每一章的内容按问题归类，提炼出该章的基本概念、定理和公式，它们是解题的基本武器，学生在学完一章后，再回来重温这一部分，定会收到纲举目张的效果.

第二部分是"习题选解". 我们对每一节的典型习题作了求解思路分析和解答，尽可能给出一题多解；由于每章的总习题难度增大，且有不少来自客观实际的应用题和一些历史上的数学问题，所以对总习题基本上作了全解.

第三部分是"考研真题选解和预测". 我们主要选择了2000—2004年考研数学(一)—(四)的真题作了求解思路分析和解答，并对未来考研进行了一些预测，目的是在学完一章后，进一步训练自己综合运用的应试能力，同时指出学生必须掌握的常考点和今后可能出现的新动向，帮助学生复习备考.

本书第一章至第三章由浙江财经学院张海洋博士编写，第四章由湖南工程学院张学元教授编写.

读者在使用第二、三部分材料时，应先独立思考，自己解答，然后与题解对照，只有这样，才能有效地提高自己的数学思维素质，如果只是抄袭而不求甚解，那就使我们大大失望了.

由于笔者水平有限，书中不妥之处敬请读者不吝赐教.

张海洋　张学元

2004年3月

目　　录

第五章　向量代数与空间解析几何

一、主要概念、定理和公式

(一)向量代数

1. 向量

既有大小，又有方向的量. 通常用黑体小写字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 或 $\overrightarrow{AB}$ 等形式表示. 其大小又称为向量的模.

2. 向量的表示法有两种：有向线段及坐标

1° 有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 代表一个向量 $\boldsymbol{a}$，则 $\overrightarrow{AB}$ 在三个坐标轴上的投影值 a_x,a_y,a_z 组成有序数组 $\{a_x,a_y,a_z\}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，即 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$.

2° 若 $\boldsymbol{a}$ 用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示，且 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\boldsymbol{a}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$$

特别地，A 为坐标原点 $(0,0,0)$，则 $\boldsymbol{a}=\{x_2,y_2,z_2\}$.

3° 向量模及方向的表示：在向量的几何表示法中，向量 $\boldsymbol{a}$ 可用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示，此时 $|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{AB}|$，$\boldsymbol{a}$ 的方向可由 $\overrightarrow{AB}$ 的方向与三个坐标轴正向的夹角（即 $\boldsymbol{a}$ 的方向角）表示.

在向量的代数表示法中，向量 $\boldsymbol{a}$ 可用坐标 $\{a_x,a_y,a_z\}$ 表示，此时

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

$\boldsymbol{a}$ 的方向可由其方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

来确定. 显然 $\cos^2x+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

3. 两种特殊的向量

零向量 $\boldsymbol{0}$：$|\boldsymbol{0}|=0$，$\boldsymbol{0}$ 的方向是任意的. 单位向量（模为 1 的向量）：$|\boldsymbol{a}^0|=1$.

与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$，其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

4. 向量的运算定义及计算公式

1° 线性运算

加法：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$（三角形法则）；$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$（折线法则）.

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}$.

数乘：$\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，其模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，其方向规定为：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向，当 λ

<0 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向．若 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$．

2° 向量的数量积（点积，内积）

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\overset{\Delta}{\Longleftrightarrow}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}).$$

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

3° 向量的向量积（叉积，外积）

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量，其模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$，其方向规定为与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直的方向，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$符合右手系．若 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

4° 混合积

三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]\overset{\Delta}{\Longleftrightarrow}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$．若

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\},\boldsymbol{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$$

则
$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$$

5. 向量的运算律

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$
$$\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a,(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$$
$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0},\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$$
$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),(\lambda a)\times b=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$
$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$$
$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$$

6. 向量的应用

1）定比分点：如$\overrightarrow{M_1M}:\overrightarrow{MM_2}=\lambda$，则$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OM_1}+\lambda\overrightarrow{OM_2})$，从而

$$M(x,y,z)=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$$

特别地，当 $\lambda=1$ 时，$M=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2},\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$为$\overrightarrow{M_1M_2}$的中点．

2）$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Longleftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Longleftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$$

$$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\arccos\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\text{或}\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

$$\mathrm{prj}_a\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\text{或}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cdot\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}$$

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面$\Longleftrightarrow[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0$ 或存在不全为零的数 λ,k,μ，使 $\lambda\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

3）$\triangle ABC$ 的面积　$S_\triangle=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\times\overrightarrow{AC}|$．$\square ABCD$ 的面积　$S_\square=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|$.

平行六面体(以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的体积:$V_{六面}=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$.

四面体(以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱)的体积:$V_{四面}=\dfrac{1}{6}|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$.

4) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$,从而 $A(x_1,y_1,z_1)$ 与 $B(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离为

$$d_{AB}=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

点 $P_0(x,y,z)$ 到直线 l 的距离为:$d=\dfrac{|\overrightarrow{P_0P_1}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$,其中 P_1 为 l 上一点,$\boldsymbol{s}$ 为直线 l 的方向向量.

两异面直线 l_1,l_2 的距离(公垂线的长)为

$$d=\left|\frac{[\overrightarrow{P_1P_2},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]}{|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}\right|$$

其中 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 分别为 $\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2$ 的方向向量,$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$ 分别为 $\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2$ 上的点.

(二)平面与直线

1. 平面各种形式的方程

1) 点法式方程:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

其中(x_0,y_0,z_0)为平面上一点,$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$为法向量.

2) 一般式方程:

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

其中 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$为平面的一个法向量.

3) 截距式方程:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

其中 a,b,c 分别为平面在三个坐标轴上的截距.

4) 三点式方程:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

其中 $M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2),M_3(x_3,y_3,z_3)$为平面上三点.

5) 平面束方程:过直线 $l\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$的平面束方程为

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

其中 λ 为任意常数(此平面束不含过 l 的平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$).

2. 直线各种形式的方程

1) 标准(对称)式方程:$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$,其中$(x_0,y_0,z_0)$为直线上一点,$\boldsymbol{v}=\{l,m,n\}$为直线的一个方向向量.

2) 一般式方程:$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$,其中 $\boldsymbol{v}=\{A_1,B_1,C_1\}\times\{A_2,B_2,C_2\}$为该直线的一个方向向量.

3）参数式方程：$\begin{cases}x=x_0+lt\\ y=y_0+mt\\ z=z_0+nt\end{cases}$，其中$(x_0,y_0,z_0)$为直线上一点，$\boldsymbol{v}=\{l,m,n\}$为直线的一个方向向量.

注 此方程经常用于直线与平面或直线与直线相交的有关问题上.

4）两点式方程：$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$，其中$(x_1,y_1,z_1)$，$(x_2,y_2,z_2)$分别为直线上的两个不同的点.

3. 直线、平面之间相互关系

1° **平面与平面的关系**

设 $\pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，$\pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则

$$\pi_1/\!/\pi_2 \Longleftrightarrow \boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

$$\pi_1\perp\pi_2 \Longleftrightarrow \boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2 \Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

$(\widehat{\pi_1,\pi_2})$是指$(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})$或$(\widehat{-\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})$中不大于 90°的那一个，即

$$\cos(\widehat{\pi_1,\pi_2})=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

其中 $\boldsymbol{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$，$\boldsymbol{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$.

2° **直线与直线的关系**

设 $L_1:\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$， $L_2:\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$，则

$$L_1/\!/L_2 \Longleftrightarrow \boldsymbol{v}_1/\!/\boldsymbol{v}_2 \Longleftrightarrow \frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$$

$$L_1\perp L_2 \Longleftrightarrow \boldsymbol{v}_1\perp\boldsymbol{v}_2 \Longleftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

$(\widehat{L_1,L_2})\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}\widehat{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2})\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$)或不大于 90°的那一个，即

$$\cos(\widehat{L_1,L_2})=\frac{|\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

L_1 与 L_2 共面$\Longleftrightarrow[\overrightarrow{P_1P_2},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]=0$

$$\Longleftrightarrow\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}=0$$

其中 $\boldsymbol{v}_1=\{l_1,m_1,n_1\}$，$\boldsymbol{v}_2=\{l_2,m_2,n_2\}$，$\overrightarrow{P_1P_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$.

3° **直线与平面的关系**

设直线 $L:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$，平面 $\pi:Ax+By+Cz+D=0$，则

$$L/\!/\pi \Longleftrightarrow \boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{n} \Longleftrightarrow lA+mB+nC=0;\quad L\perp\pi \Longleftrightarrow \boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{n} \Longleftrightarrow \frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}$$

L 与 π 的夹角$(\widehat{L,\pi})$由下式确定

$$\sin(\widehat{L,\pi})=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

平面外一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 π 的距离为 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

（三）曲面与曲线

1. 曲面与曲线的方程

曲面的一般式方程：$F(x,y,z)=0$.

曲面的参数式方程：$\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v),(u,v)\in D.\\z=z(u,v)\end{cases}$

曲线的一般式方程：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$.

曲线的参数式方程：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t).\\z=z(t)\end{cases}$

2. 旋转曲面与柱面

1° 旋转曲面

平面曲线 $\begin{cases}f(x,z)=0\\y=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而得旋转曲面的方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

记忆口诀："绕 z，z 不变，根号里面没有 z".

2° 柱面

Γ 是一条空间曲线，直线 L 沿 Γ 平行移动所产生的曲面叫柱面，Γ 称该柱面的准线，L 及其平移的每一位置叫做该柱面的母线.

若准线方程为 Γ：$\begin{cases}f(x,y)=0\\z=0\end{cases}$，当母线平行于 z 轴时，柱面方程为 $f(x,y)=0$.

当母线的方向向量是 $\boldsymbol{v}=\{l,m,n\}$ 时，柱面方程为 $f\left(x-\dfrac{l}{n}z,y-\dfrac{m}{n}z\right)=0$.

若准线方程为 Γ：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$ $(\alpha<t<\beta)$，母线的方向向量为 $\{l,m,n\}$，则此柱面方程是

$$\begin{cases}x=x(t)+lu\\y=y(t)+mu\\z=z(t)+nu\end{cases}\quad(-\infty<u<+\infty,\alpha<t<\beta)$$

3. 二次曲面

球面　$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$；

椭球面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$；　单叶双曲面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

双叶双曲面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$；　椭圆抛物面　$\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=z$　（p,q 同号）；

双曲抛物面　$\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=z$　（p,q 同号）；　二次锥面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$.

4. 空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 Γ 为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，以 Γ 为准线，母线平行于 z 轴的柱面叫做 Γ 在 xOy 面上的投影柱面，投影柱面与 xOy 面的交线 L 叫做 Γ 在 xOy 面上的投影曲线.

从 Γ 的方程中消去 z，得 $\varphi(x,y)=0$ 为母线平行于 z 轴的柱面必包含 Γ. 从而

$\begin{cases}\varphi(x,y)=0 \\ z=0\end{cases}$为 Γ 在 xOy 面上的投影曲线.

二、习题选解

习题 5-1 向量及其线性运算

2. 设长方体的各棱与坐标轴平行,已知长方体的两个顶点的坐标,试写出余下六个顶点的坐标:

(1)(1,1,2), (3,4,5); (2)(4,3,0), (1,6,−4).

解 (1)因为长方体的各棱与坐标轴平行,故其各面与坐标面平行,从而同名坐标相同的顶点各有 4 个,所以长方体的八个顶点的坐标中,已知顶点(1,1,2)位于下底面 $z=2$,下底面的 4 个顶点的 z 坐标均为 2,横坐标 x 只能从 1,3 两个数字中选取,纵坐标 y 只能从 1,4 两个数字中选取,于是,此长方体下底面的四个顶点的坐标依次为

$$(1,1,2),\quad (3,1,2),\quad (1,4,2),\quad (3,4,2)$$

同样,此长方体上底面的 4 个顶点的坐标为

$$(3,4,5),\quad (3,1,5),\quad (1,4,5),\quad (1,1,5)$$

(2)仿(1)知长方体的八个顶点坐标为

$$(3,4,0),\quad (4,6,0),\quad (1,3,0),\quad (1,6,0)$$

$$(3,6,-4),\quad (1,3,-4),\quad (4,6,-4),\quad (4,3,-4)$$

4. 证明:以点 $A(4,1,9)$,$B(10,-1,6)$,$C(2,4,3)$为顶点的三角形为等腰直角三角形.

分析 只需证两边相等且三边的长满足勾股定理.

证 因为 $$|AB|=\sqrt{(4-10)^2+(-1-1)^2+(9-6)^2}=\sqrt{49}=7$$

$$|BC|=\sqrt{(2-10)^2+(4-1)^2+(3-6)^2}=\sqrt{98}$$

$$|AC|=\sqrt{(4-2)^2+(4-1)^2+(9-8)^2}=\sqrt{49}=7$$

所以$|AB|=|AC|$且$|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$,即$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

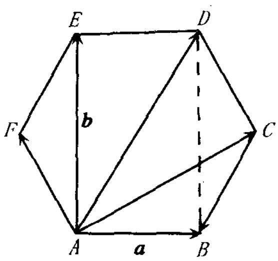


图 5-1

6. 已给正六边形 $ABCDEF$(字母顺序按逆时针方向),记$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{b}$,试用向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AF}$和$\overrightarrow{CB}$.

解 如图 5-1 所示,由向量加法的三角形法则,有

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

因为$\overrightarrow{BC}\ \underline{\underline{/\!/}}\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,所以$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,即

$$\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\frac{3}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE})=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$$

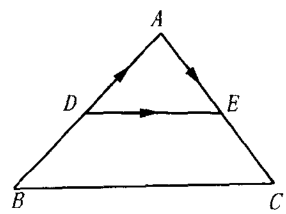


图 5-2

7. 用向量法证明:三角形两边中点的连线平行于第三边,且长度等于第三边的长度的一半.

证 如图 5-2 所示，设 DE 为$\triangle ABC$ 的中位线，只需证明：$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. 事实上，由向量加法的三角形法则，有

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

于是

$$DE \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} \frac{1}{2}BC$$

9. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{l}=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 在 x 轴上的投影以及在 y 轴上的分向量.

解 因为

$$\boldsymbol{l}=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-15\boldsymbol{k}=(15,7,-15)$$

所以 l 在 x 轴上的投影为 15，在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

10. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，试用单位向量 $\boldsymbol{e}_a,\boldsymbol{e}_b,\boldsymbol{e}_c$ 表示向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$.

解 由方程组$\begin{cases}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=\boldsymbol{b}\\ -2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=\boldsymbol{c}\end{cases}$ 解出 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，得

$$\boldsymbol{i}=\frac{5}{12}\boldsymbol{a}+\frac{1}{12}\boldsymbol{b}-\frac{1}{4}\boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{j}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),\boldsymbol{k}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

而 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a=\sqrt{3}\,\boldsymbol{e}_a$，$\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_b=\sqrt{6}\,\boldsymbol{e}_b$，$\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{e}_c=3\boldsymbol{e}_c$. 于是，有

$$\boldsymbol{i}=\frac{5\sqrt{3}}{12}\boldsymbol{e}_a+\frac{\sqrt{6}}{12}\boldsymbol{e}_b-\frac{3}{4}\boldsymbol{e}_c,\quad \boldsymbol{j}=\frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{e}_a-\frac{\sqrt{6}}{3}\boldsymbol{e}_b,\quad \boldsymbol{k}=\frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{e}_a+\frac{\sqrt{6}}{3}\boldsymbol{e}_b+\frac{3}{4}\boldsymbol{e}_c$$

习题 5-2 向量的乘法运算

1. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求：

(2)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$； (4)$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$； (5)$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

解 (2)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-2\\2&-1\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}3&-2\\1&-1\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}3&-1\\1&2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$.

(4)$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{3\cdot1+(-1)\cdot2+(-2)\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{6}}$.

(5)$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{3\cdot1+(-1)\cdot2+(-2)\cdot(-1)}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}$

$$=\frac{3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

2. 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，求：

(2)$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$； (4)$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$.

解 (2)$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-3&1\\1&-1&3\end{vmatrix}\times(1,-2,0)=(-8,-5,1)\times(1,-2,0)$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-8&-5&1\\1&-2&0\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+21\boldsymbol{k}=(2,1,21).$$

$$(4)(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}=[(2\times1+(-3)\times(-1)+1\times3)]\boldsymbol{c}-[(2\times1+(-3)\times(-2)+1\times0]\boldsymbol{b}=8\boldsymbol{c}-8\boldsymbol{b}=8(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$$
$$=8\{1,-1,-1-(-1),0-3\}$$
$$=8\{0,-1,-3\}=\{0,-8,-24\}=-8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}.$$

3. 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,证明:

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)$; (2)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

证 (1)由 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=0$,即 $|\boldsymbol{a}|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$,故

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-|\boldsymbol{a}|^2$$

同理有
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-|\boldsymbol{b}|^2$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-|\boldsymbol{c}|^2$$

将以上三式相加,得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)$$

(2)因为 $\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$,故

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$$

因为
$$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$$

故
$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

综合得
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$$

4. 已知 $A(1,-1.\ 2),B(5,-6,2),C(1,3,-1)$,求:

(1)同时与$\overrightarrow{AB}$及$\overrightarrow{AC}$垂直的单位矢量.

解 (1)利用叉积求之.

因为$\overrightarrow{AB}=\{4,-5,0\},\overrightarrow{AC}=\{0,4,-3\}$,故

$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\4&-5&0\\0&4&-3\end{vmatrix}=\{15,12,16\}$$

$$|\boldsymbol{c}|=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{15^2+12^2+16^2}=25$$

于是与$\overrightarrow{AB}$及$\overrightarrow{AC}$同时垂直的单位矢量为

$$\pm\boldsymbol{e}_c=\pm\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\pm\frac{1}{25}\{15,12,16\}$$

5. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-2i\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=2i+\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$,试求 λ 的值,使得:

(1)$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直;

(2)$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直,并证明此时$|\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$取最小值.

解 (1) $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{3\lambda,5\lambda,-2\lambda\}+\{2,1,4\}=\{3\lambda+2,5\lambda+1,-2\lambda+4\}$

取基本向量 $\boldsymbol{e}_z=\{0,0,1\}$,因为$(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{e}_z\Longleftrightarrow(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{0}$,即

$$\boldsymbol{0}\cdot(3\lambda+2)+\boldsymbol{0}\cdot(5\lambda+1)+1\cdot(-2\lambda+4)=0$$

故 $\lambda=2$.

(2))因为$(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}\Longleftrightarrow(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$,即

$$(3\lambda+2)\cdot3+(5\lambda+1)\cdot5+(-2\lambda+4)\cdot(-2)=0$$

故 $\lambda=-\frac{3}{38}$. 而

$$|\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(3\lambda+2)^2+(5\lambda+1)^2+(-2\lambda+4)^2}=\sqrt{38\lambda^2+6\lambda+21}$$

因为 $38\lambda^2+6\lambda+21$，当 $\lambda=-\dfrac{6}{2\cdot 38}=-\dfrac{3}{38}$时，取得最小值，故$|\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$也在 $\lambda=-\dfrac{3}{38}$处取得最小值.

6. 证明如下的平行四边形法则

$$2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$$

说明这一法则的几何意义.

证 右$=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

$$=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)=\text{左}$$

此等式的几何意义是：平行四边形两邻边平方和的两倍等于两对角线的平方和.

7. 用向量法证明：

(1)直径所对的圆周角是直角；　(2)三角形的三条高交于一点.

证 (1)如图 5-3 所示，AB 是圆 O 的直径，C 是圆周上的任一点，只需证明$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=0$.

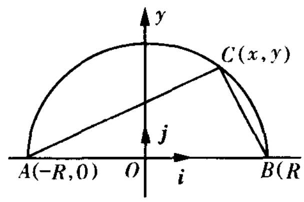


图 5-3

事实上，建立坐标系如图，则圆的方程为

$$x^2+y^2=R^2,\overrightarrow{AC}=(x+R)\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},\overrightarrow{CB}=(R-x)\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}$$

于是

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=(x+R,y)\cdot(R-x,-y)=R^2-x^2-y^2=R^2-R^2=0$$

故$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CB}$，即直径所对的圆周角为直角.

(2)如图 5-4 所示，$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BE}\perp\overrightarrow{AC}$. 设 AD 与 BE 相交于 F，要证三条高交于一点，只需证$\overrightarrow{FC}\perp\overrightarrow{AB}$. 事实上，建立坐标系如图，则有

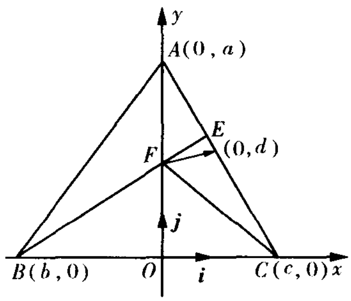


图 5-4

$$\overrightarrow{FC}=c\boldsymbol{i}-d\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{AB}=b\boldsymbol{i}-a\boldsymbol{j}$$

因为$\overrightarrow{BF}\perp\overrightarrow{AC}$，故$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AC}=(-b,d)\cdot(c,-a)=-bc-ad=0$，从而

$$\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{AB}=(c,-d)\cdot(b,-a)=bc+ad=0.$$

故$\overrightarrow{FC}\perp\overrightarrow{AB}$. 这就证明了三角形三条高交于一点.

9. 证明三个向量共面的充要条件是其中一个向量可表示为另两个向量的线性组合.

证 (1)充分性.

设向量 $\boldsymbol{c}$ 是向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的线性组合：$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{c}$ 是 $\lambda\boldsymbol{a},\mu\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线，此三线共面，从而 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

(2)必要性.

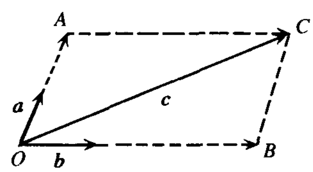


图 5-5

设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，如图 5-5(这不失一般性)，过 $\boldsymbol{c}$ 的终点 C 分别作与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的平行线交 $\boldsymbol{b}$ 于 B，交 $\boldsymbol{a}$ 于 A，因为$\overrightarrow{OA}$与 $\boldsymbol{a}$ 共线，$\overrightarrow{OB}$与 $\boldsymbol{b}$ 共线，故存在实数 λ,μ，使得

$$\overrightarrow{OA}=\lambda\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{OB}=\mu\boldsymbol{b}$$

而 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$. 即 $\boldsymbol{c}$ 是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的线性组合.

注 本题也可用三向量共面的充要条件是它们的混合积为零来证.

习题 5-3　平面与直线

2. 求满足下列条件的平面方程：

(2)过点$(3,0,-1)$且与平面$3x-7y+5z-12=0$平行.

(4)过点$(1,1,1)$和点$(0,1,-1)$且与平面$x+y+z=0$相垂直.

(5)过点$(1,1,1)$，$(-2,-2,2)$和$(1,-1,2)$.

(8)平面$x-2y+2z+21=0$与平面$7x+24z-5=0$之间的二面角的平分面.

分析　求平面方程的关键是求平面的法向量，利用点法式求之.

解　(2)因为两平行平面的法向量相同，所以所求平面的法向量可取为$\boldsymbol{n}=\{3,-7,5\}$. 由点法式得所求平面方程为

$$3(x-3)-7(y-0)+5(z+1)=0$$

$$3x-7y+5z-4=0$$

(4)已知平面的法向量$\boldsymbol{n}_1=(1,1,1)$，过两已知点的向量为

$$\boldsymbol{s}=(1-0,1-1,1+1)=(1,0,2)$$

由题设知，所求平面的法向量$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1$且$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}$，所以可取

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&1\\1&0&2\end{vmatrix}=\{2,-1,-1\}$$

由点法式得所求平面的方程为

$$2(x-0)-(y-1)-(x+1)=0$$

$$2x-y-z=0$$

(5)记已知三点依次为A、B、C，则

$$\overrightarrow{AB}=\{-3,-3,3\},\overrightarrow{AC}=\{0,-2,3\}$$

因为所求平面方程的法向量$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AC}$，故可取

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-3&-3&3\\0&-2&3\end{vmatrix}=\{-3,9,6\}$$

于是所求平面的方程为

$$-3(x-1)+9(y-1)+6(z+1)=0$$

即

$$x-3y-2z=0$$

(8)设二面角的平分面上任意一点为(x,y,z)，它到二面角的两个半平面的距离相等，于是，由点到平面的距离公式，得

$$\frac{|x-2y+2z+21|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{|7x+24z-5|}{\sqrt{7^2+0^2+24^2}}$$

即

$$\frac{1}{3}(x-2y+2z+21)=\pm\frac{1}{25}(7x+24z-5)$$

所求平分面为$2x-25y-11z+270=0$或$46x-50y+122z+510=0$.

4. 求两平行平面$Ax+By+Cz+D_1=0$与$Ax+By+Cz+D_2=0$之间的距离.

解　记$\pi_i:Ax+By+Cz+D_1=0(i=1,2)$，即

$$\pi_1:Ax+By+Cz=-D_1;\quad \pi_2:Ax+By+Cz+D_2=0$$