新世纪课程教材

Textbook Series of New Century

全国高等医药院校教材 • 供基础、预防、临床、口腔医学类专业用

医用高等数学

第三版 主编 张选群

人民卫生出版社

新 世 纪 课 程 教 材

全 国 高 等 医 药 院 校 教 材

供基础、预防、临床、口腔医学类专业用

医用高等数学

第三版

主编　张选群

编者（以姓氏笔画为序）

马建忠（中国医科大学）

马学敏（武汉大学医学院）

王　颖（吉林大学白求恩医学部）

何穗智（中山医科大学）

李　海（四川大学华西医学中心）

张选群（武汉大学医学院）

赵耐青（复旦大学医学院）

人 民 卫 生 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

医用高等数学/张选群主编. -3版. -北京：
人民卫生出版社，2001
ISBN 7-117-04244-3

Ⅰ.医… Ⅱ.张… Ⅲ.医用数学：高等数学-医学
院校-教材 Ⅳ.R311

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第043109号

医 用 高 等 数 学

第 三 版

主　　编：张 选 群
出版发行：人民卫生出版社(中继线 67616688)
地　　址：(100078)北京市丰台区方庄芳群园3区3号楼
网　　址：http：//www. pmph. com
E - mail：pmph @ pmph. com
印　　刷：北京人卫印刷厂
经　　销：新华书店
开　　本：787×1092　1/16　　印张：13.75
字　　数：299千字
版　　次：1987年6月第1版　2001年9月第3版第19次印刷
印　　数：185 371—255 370
标准书号：ISBN 7-117-04244-3/R·4245
定　　价：17.00元

全国高等医药院校五年制临床医学专业

第五轮教材修订说明

为适应我国高等医学教育改革和发展的需要，经卫生部临床医学专业教材评审委员会审议，卫生部教材办公室决定从1998年开始进行临床医学专业教材第五轮修订。在总结第四轮教材编写质量、使用情况的基础上，提出第五轮修订要面向21世纪，遵循培养目标，适用于本科五年制教学需要；突出教材三基（基础理论、基本知识和基本技能）、五性（思想性、科学性、先进性、启发性和适用性）的特点，注重教材的整体优化及编写的标准化、规范化。同时决定第五轮教材的修订分两批进行，第二批修订是由全国高等医药教材建设研究会和卫生部教材办公室共同组织的。全套教材共50种，第五轮修订40种，新增10种，并有26种是五、七年制共用教材。随着学科发展的需要，教材名称以及必修课与选修课的科目也有所调整。

五年制五轮教材目录

必 修 课 教 材

△1.	《医用高等数学》第三版	主编 张选群
△2.	《医学物理学》第五版	主编 胡新珉
△3.	《基础化学》第五版	主编 魏祖期 副主编 祁嘉义
△4.	《有机化学》第五版	主编 吕以仙 副主编 陆　阳
△5.	《医学生物学》第五版	主编 左　伋
△6.	《系统解剖学》第五版	主编 柏树令
7.	《局部解剖学》第五版	主编 彭裕文
8.	《组织学与胚胎学》第五版	主编 邹仲之
△9.	《生物化学》第五版	主编 周爱儒 副主编 查锡良
10.	《生理学》第五版	主编 姚　泰 副主编 乔健天
11.	《医学微生物学》第五版	主编 陆德源
△12.	《人体寄生虫学》第五版	主编 詹希美
△13.	《医学免疫学》第三版	主编 陈慰峰
14.	《病理学》第五版	主编 杨光华
15.	《病理生理学》第五版	主编 金惠铭
16.	《药理学》第五版	主编 金有豫
△17.	《医学心理学》第三版	主编 姜乾金
△18.	《法医学》第三版	主编 王保捷
19.	《诊断学》第五版	主编 陈文彬 副主编 王友赤
20.	《医学影像学》第四版	主编 吴恩惠
21.	《内科学》第五版	主编 叶任高 副主编 陆再英
22.	《外科学》第五版	主编 吴在德 副主编 郑　树
23.	《妇产科学》第五版	主编 乐　杰
24.	《儿科学》第五版	主编 王慕逖
25.	《神经病学》第四版	主编 王维治 副主编 罗祖明
26.	《精神病学》第四版	主编 郝　伟
27.	《传染病学》第五版	主编 彭文伟
28.	《眼科学》第五版	主编 惠延年

29.《耳鼻咽喉科学》第五版 主编 田勇泉
副主编 孙爱华
△30.《口腔科学》第五版 主编 张志愿
△31.《皮肤性病学》第五版 主编 张学军
△32.《核医学》第五版 主编 李少林
副主编 张永学
33.《流行病学》第五版 主编 王建华
34.《卫生学》第五版 主编 仲来福
副主编 刘移民
35.《预防医学》第三版 主编 叶葶葶
△36.《中医学》第五版 主编 郑守曾
△37.《计算机应用基础》第二版 主编 邹赛德
副主编 杨长兴
△38.《体育》第二版 主编 裴海泓

选修课教材

△39.《细胞生物学》 主编 凌诒萍
△40.《医学分子生物学》 主编 冯作化
△41.《医学遗传学》 主编 陈竺
42.《临床药理学》第二版 主编 徐叔云
43.《医学统计学》第三版 主编 马斌荣
△44.《医学伦理学》 主编 丘祥兴
45.《临床流行病学》 主编 王家良
△46.《康复医学》第二版 主编 南登崑
△47.《医学文献检索》 主编 方平
△48.《卫生法》 主编 赵同刚
△49.《医学导论》 主编 文历阳
△50.《全科医学概论》 主编 杨秉辉

注：画△者为五、七年制共用教材

第三版前言

数学是一门语言，它是表达量变和质变最完美的工具；数学又是一种感官，它是科学探索超越时空的触角。数学的思维方法、计量分析技术有力地推动了现代医学的迅速发展。强调用数学、统计学研究并解决医学问题的思路和方法，增强对医学问题进行定量分析与处理的能力，提高医学科研水平，促进临床工作进一步精确化、科学化早已成为各国高等医学教育所关注的重要内容。

由于教学体制的不同，我国自 1983 年才开始将高等数学列为医学院校的必修课程。此后，各种不同版本的《医用高等数学》教材相继面世，体现了国内同行都在努力摸索对这一门课程的教学。胡纪湘、罗洋祥为《医用高等数学》规划教材作出了开拓性的贡献。

本版规划教材在内容与描述方式上有较大的变动，如第一章省去了“生命科学中几个函数曲线”、“曲线直线化”等内容；第五章省去了“拉氏变换”与“付氏变换”，增加了“可降阶的二阶微分方程”等内容。在满足国内学时数的条件下，尽量与国际教学内容接轨。医学举例全部采用新生容易理解的直观例题。从教学目的上讲，医学举例主要是为“高等数学”教学服务，这是“高等数学”的系统性所决定的。本版教材重在培养学生的数学思维能力，这是现代医学生必备的专业素质和发展动力。

本教材是为五年制和七年制临床医学专业的高等数学课程而编排的，全书授课总时数为 72 学时。对于教学计划为 54 学时的院校可略去重积分与线性代数等内容。作为 21 世纪规划教材，应该将成熟的教学经验与新世纪医学计量分析相结合，应该适应现代医学教育发展的需要，能否达到这一期盼的效果还望使用本书的师生和读者多多提出宝贵的意见，以利于规划教材的改进与完善！

张选群

2001 年 5 月

目　　录

第一章　函数和极限

函数刻画了变量之间的相互制约关系，是客观物质世界运动、变化及相互影响的复杂关系在数量方面的反映；极限刻画了变量的变化趋势，是研究函数的重要方法.本章内容主要包括函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的主要性质.

第一节　函　　数

一、函数的概念

1．常量与变量

我们在研究实际问题时，经常会遇到各种不同的量，如长度、重量、面积、温度、时间、距离等.其中有的量在过程中始终保持同一数值，称为**常量**（**constant**）；有的量在过程中可取不同的数值，称为**变量**（**variable**）.

一个量究竟是常量还是变量，不是绝对的，要根据具体过程和具体条件来确定.即使同一个量，在某一过程或条件下可以认为是常量；而在另一过程或条件下就可能是变量.例如人的身高，在研究少儿发育成长的过程中是变量，而在研究成人的健康状况时通常是常量.

常量也可看作是一种特殊的变量，即在某一过程中，该变量都取相同的数值.

2．函数的概念

定义 1-1　设 x、y 是同一变化过程中的两个变量，如果对于变量 x 的每一个允许的取值，变量 y 按照一定的规律总有一个确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**（**function**）.此时，变量 x 称为**自变量**（**independent variable**），y 又称为**因变量**（**dependent variable**），记为

$$y = f(x)$$

自变量的所有允许值的集合称为函数的**定义域**（**domain of definition**）.函数的定义域通常用区间来表示.如果 x_0 是函数 $f(x)$ 定义域中的一点，我们也说函数 $f(x)$ 在 x_0 点有定义，与 x_0 对应的因变量的值称为**函数值**，记为 $f(x_0)$，有时也记为"$y\mid_{x=x_0}$"，即 $y\mid_{x=0} = f(x_0)$.所有函数值的集合称为函数 $f(x)$ 的**值域**（**domain of functional value**）.

对应规律和定义域是函数概念中的两大要素，两个函数只有当它们的对应规律和定义域都完全相同时，才认为是两个相同的函数.函数的定义中，对应规律是用记号 $f(\quad)$ 表示的，它具有广泛的涵义，其表达方式通常有公式法、图像法和表格法；函

数的定义域在实际中是由问题的实际意义确定的，在不考虑函数的实际意义时，是使函数的解析表达式有意义的一切实数所构成的数集.

例 1-1 在出生后 1～6 个月期间内，正常婴儿的体重近似满足以下关系式：

$$y = 3 + 0.6x$$

式中，x 表示婴儿的年龄（月），是自变量，y 表示其体重（千克），是 x 的函数. 函数的定义域为 $[1, 6]$. 这是公式法表达的函数关系. 若不考虑该问题的实际意义，函数 $f(x) = 3 + 0.6x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

例 1-2 监护仪自动记录了某患者一段时间内体温 T 的变化曲线，如图 1-1 所示. 对于这段时间内的任意时刻 t 的值都能读出患者体温 T 的值，即患者体温 T 是时间 t 的一个函数 $T = T(t)$. 这是用图像法表达的函数关系. 如果记录的是静卧在床上健康人的体温 $T = 37°$，它仍然是 t 的函数，此时无论 t 取何值，T 的取值总是 37°，反映在图像上则是平行于 t 轴的直线.

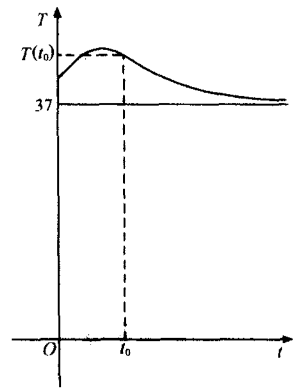

图 1-1

例 1-3 某地区统计了某年 1～12 月中当地流行性出血热的发病率，见表 1-1. 可以看出，对每一个月份 t，都有一个发病率 y 与之对应. y 是 t 的函数，其定义域为 1～12 月，对应规律则由表 1-1 所示，这是用表格法表达的函数关系.

表 1-1

t（月份）	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y（‰）	16.6	8.3	7.1	6.5	7.0	10.0	2.5	3.5	5.7	10.0	17.1	7.0

二、初 等 函 数

1. 基本初等函数

中学里所学过的五类函数：

幂函数 $y = x^a$ （a 为任意实数）

指数函数 $y = a^x$ （$a > 0$，$a \neq 1$）

对数函数 $y = \log_a x$ （$a > 0$，$a \neq 1$）

三角函数 $y = \sin x$，$y = \cos x$，$y = \tan x$，$y = \cot x$

反三角函数 $y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，$y = \arctan x$，$y = \mathrm{arccot}\, x$

再加上常数函数 $y = C$（C 为常数），统称为**基本初等函数（basic elementary function）**.

2. 复合函数

定义 1-2 设变量 y 是变量 u 的函数，变量 u 又是变量 x 的函数，即

$$y = f(u), u = \varphi(x)$$

如果变量 x 的某些值通过变量 u 可以确定变量 y 的值，则称 y 是 x 的**复合函数（compound function）**，记为

$$y = f[\varphi(x)]$$

变量 u 称为中间变量．复合函数概念可以推广到多个函数构成情况，此时函数是通过多个中间变量的传递而形成的．

例 1-4 试通过 $y=\lg u$，$u=\arctan v$，$v=x+1$，求出 y 关于 x 的复合函数．

解 $y=\lg u$，$u=\arctan v$，$v=x+1$ 的复合函数是 $y=\lg\arctan(x+1)$，其定义域为 $(-1, +\infty)$．

例 1-5 设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$，$g(x)=1-x$，试求：$f[g(x)]$，$f[f(x)]$，$g[f(x)]$，$g[g(x)]$．

解 $f[g(x)]=\dfrac{1-x}{1-(1-x)}=\dfrac{1-x}{x}$，　　$f[f(x)]=\dfrac{\dfrac{x}{1-x}}{1-\dfrac{x}{1-x}}=\dfrac{x}{1-2x}$，

$g[f(x)]=1-\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1-2x}{1-x}$，　　$g[g(x)]=1-(1-x)=x$．

如果由两个函数复合而成的函数的定义域为空集，则此复合函数无意义（或称它们不能复合）．例如，由 $y=\arcsin u$，$u=2+x^2$ 复合而成的函数 $y=\arcsin(2+x^2)$ 因 $2+x^2>1$，其定义域为空集，即函数 $\arcsin(2+x^2)$ 无意义．

以上是将多个函数“合成”为一个表达式．而在后面的很多计算问题中，往往需要把复合函数的中间变量找出来，把它“分解”为若干个基本初等函数或由它们通过四则运算而得到的简单函数形式，以便于利用公式进行计算．

例 1-6 将下列复合函数“分解”为简单函数：

(1) $y=a\sin(bx+c)$

(2) $y=\dfrac{a}{1+2^{kx}}$

(3) $y=\lg(1+\sqrt{1+\cos^2 x})$

解 (1) $y=a\sin(bx+c)$ 可以看成是由 $y=a\sin u$ 和 $u=bx+c$ 复合而成的．

(2) $y=\dfrac{a}{1+2^{kx}}$ 可以看成是由 $y=\dfrac{a}{u}$，$u=1+2^v$，$v=kx$ 复合而成的．

(3) $y=\lg(1+\sqrt{1+\cos^2 x})$ 可以看成是由 $y=\lg u$，$u=1+\sqrt{v}$，$v=1+\omega^2$ 和 $\omega=\cos x$ 复合而成的．

3．初等函数

定义 1-3 由基本初等函数经过有限次四则运算以及函数复合所得到的仅用一个解析式表达的函数，称为**初等函数**（**elementary function**）．

例如，$y=\dfrac{\lg x}{\sqrt{1-x^2}}$，$y=x\tan x+\sin e^x$ 等都是初等函数．

三、分段函数

有些函数，对于其定义域内自变量 x 不同的值，不能用一个统一的解析表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为**分段函数**（**piecewise func-**

tion)．分段函数在实际医学问题中也是常见的．

例 1-7 设某药物的每天剂量为 y（mg 为单位），对于 16 岁以上的成年人用药剂量是一常量（mg 为单位），设为 $2mg$．而对于 16 岁以下的未成年人，则每天的用药剂量 y 正比于年龄 x，比例常数为 $0.125mg/$岁，其函数关系（图 1-2）为

$$y=\begin{cases}0.125x, & 0<x<16\\ 2, & x\geqslant 16\end{cases}$$

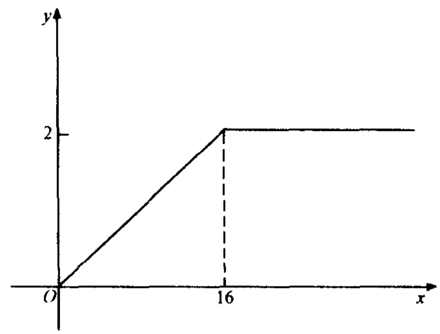

图 1-2

这里，用药剂量 y 是年龄 x 的函数，但其函数关系是用两个解析式表示的．

应该注意的是，分段函数是一个函数，而不是两个或几个函数．求分段函数的函数值时，不同范围内的自变量的值要代入相应范围内的函数表达式进行运算．分段函数一般不属于初等函数．不过，在不同段内的表达式，通常由初等函数表示．

例 1-8 设 $f(x)=\begin{cases}-(x+2), & x\leqslant -2\\ \sqrt{1-x^2}, & -2<x\leqslant 1\\ 0, & x>1\end{cases}$

求 $f(-3)$、$f(0)$、$f(2)$．

解 $f(-3)=-(x+2)\,|_{x=-3}=1$

$f(0)=\sqrt{1-x^2}\,|_{x=0}=1$

$f(2)=0.$

四、函数的几种简单特性

1．有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使对所有的 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的．如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的．

例如：$\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的；$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内是有界的，但在 $(0,1)$ 内是无界的．

2．单调性

设 x_1、x_2 是函数 $f(x)$ 的定义区间 (a,b) 内的任意两点，且 $x_1<x_2$．若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调递增的；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调递减的．

例如：2^x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调递增的；x^2 在 $(-\infty,0)$ 内是单调递减的，而在 $(0,+\infty)$ 内是单调递增的．

3．奇偶性

如果对于函数 $f(x)$ 定义域内的任意点 x，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是

偶函数；如果对于函数 $f(x)$ 定义域内的任意点，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数. 偶函数的图象是关于 y 轴对称的，而奇函数的图象是关于坐标原点对称的.

例如：x^2-2x^4、$\cos x$ 都是偶函数；$\sin x$、$x+x^3$ 都是奇函数.

4. 周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在正的常数 T，使得 $f(x)=f(x+T)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，满足这个等式的最小正数 T，称为函数的周期.

例如：$\sin x$、$\cos x$ 都是周期函数，周期为 2π.

思考与练习

1. 下列各题中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否为相同的函数：

(1) $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=x$；

(2) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$；

(3) $f(x)=\cos^2x+\sin^2x$ 与 $g(x)=1$；

(4) $f(x)=\arcsin x$ 与 $g(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arccos x$

2. 设 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，考察下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)g(x)$　　(2) $f[g(x)]$　　(3) $f[f(x)]$

3. 下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇非偶函数？

(1) $f(x)=x^3+|\sin x|$；　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{2}(2^x+2^{-x})\cos x$；　　(3) $f(x)=\arctan(\sin x)$

4. 指出下列各函数中哪些是周期函数，并指出其周期.

(1) $y=\arctan(\tan x)$；　　(2) $y=\sin\pi x+\cos\pi x$；

(3) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$；　　(4) $y=1+\cos 2x$.

第二节　极　限

一、极限的概念

在研究实际问题时，仅仅知道有关的函数在变化过程中单个的取值如何，往往是不够的，我们还需要弄清楚，当自变量按一定的趋势变化时，函数的变化趋势如何. 这就是极限（limit）概念所要描述和解答的问题.

对于函数 $y=f(x)$，自变量 x 的变化趋势有两种情形：一种是自变量 x 的绝对值无限增大（记为 $x\to\infty$）；另一种是自变量 x 的值无限趋近于某一定值 x_0（记为 $x\to x_0$）. 下面我们分别考察这两种情况下，函数 $y=f(x)$ 的变化趋势.

1. $x\to\infty$ 时函数的极限

考察函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to\infty$ 时的变化趋势. 由表 1-2 可看出，无论 x 是取正值并无限增大（记作 $x\to+\infty$），还是取负值且其绝对值无限增大（记作 $x\to-\infty$），

函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的变化趋势都是无限趋近于 0.

表 1-2

x	±1	±10	±100	±1000	±10000	±100000	…	$\to\infty$
$f(x)$	±1	±0.1	±0.01	±0.001	±0.0001	±0.00001	…	$\to0$

从图 1-3 也可看出，当$|x|$无限增大时，函数 $y=\frac{1}{x}$的图象无限地接近于x 轴，即以直线 $y=0$ 为渐近线. 由此可见 0 是函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$时无限接近的一个常数.

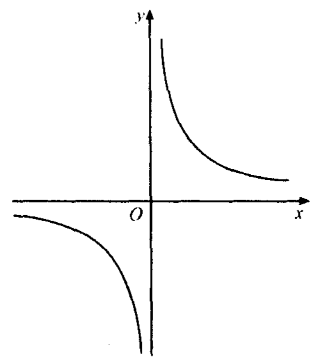

图 1-3

定义 1-4 当自变量 x 的绝对值无限增大时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，就说当 x 趋于无穷大时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$ （$x\to\infty$） 于是，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，当 $x\to\infty$时，$f(x)\to0$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. 如果当$|x|$无限增大时，函数 $f(x)$ 不趋于某一个常数，此时，我们就称 $x\to\infty$时，$f(x)$ 的极限不存在. 例如函数 $y=\sin x$ 和 $y=x^2$，当 $x\to\infty$时极限都不存在，前者在 $x\to\infty$时函数值始终在 -1 与 1 之间振动，后者当 $x\to\infty$时，函数值是无限增大的. 对于后一种情形，我们也常记为

$$\lim_{x\to\infty}x^2=\infty\text{或 } x^2\to\infty \ (x\to\infty)$$

若仅当自变量 x 的变化沿 x 轴正方向无限增大或沿 x 轴负方向绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 的单侧极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$$

或

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A$$

例如，对于函数 $f(x)=\arctan x$，当 $x\to+\infty$时，$f(x)\to\frac{\pi}{2}$；当 $x\to-\infty$时，$f(x)\to-\frac{\pi}{2}$，即

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}，\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

2. $x\to x_0$ 时函数的极限

我们还是考察函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，当自变量从 x 轴上$x=1$ 的左右趋近于 1（记为 $x\to1$）时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$的变化趋势见表 1-3.

表 1-3

x	0.5	0.7	0.9	0.99	0.999	…	$\to 1$
$f(x)$	2	1.429	1.11	1.010	1.001	…	$\to 1$
x	1.5	1.2	1.1	1.01	1.001	…	$\to 1$
$f(x)$	0.667	0.833	0.909	0.990	0.999	…	$\to 1$

由表 1-3 可见，当 $x\to 1$，不论是从右边还是从左边趋近于 1，函数 $f(x)$ 都趋近于 1，可见 1 是当自变量 $x\to 1$ 时函数 $f(x)$ 无限接近的常数.

定义 1-5 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义（但在 x_0 处可以没有定义），当自变量 x 以任意方式无限趋近于定值 x_0 时，若函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，就说当 x 趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$

由此，当 $x\to 1$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}\to 1$，即 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=1$. 如果当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 不趋近一个常数，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在. 例如当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x}$、$\sin\dfrac{1}{x}$ 的极限都不存在. 显然，前者趋于无穷大，而后者在 -1 与 1 之间振动. 对于前者，我们也常记为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty \text{ 或 } \frac{1}{x}\to\infty\ (x\to 0).$$

在上述定义中，若自变量 x 趋近于定值 x_0，仅限于 $x<x_0$（或 $x>x_0$），即从 x_0 的左侧（或从 x_0 的右侧）趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋近于一个常数 A，则 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限（或右极限），记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^-)=A$$

$$\left(\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^+)=A\right)$$

显然，当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限存在的必要充分条件是左、右极限都存在并且相等.

例 1-9 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x-1 & x>0 \end{cases}$ 当 $x\to 0$ 时的极限.

解 这是分段函数，$f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限分别为：

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-1)=-1$$

由于左极限不等于右极限，所以当 $x=0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限不存在（见图 1-4）.

若考察函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ 1-x, & x>0 \end{cases}$ 当 $x=0$ 时的极限（图 1-5），由于