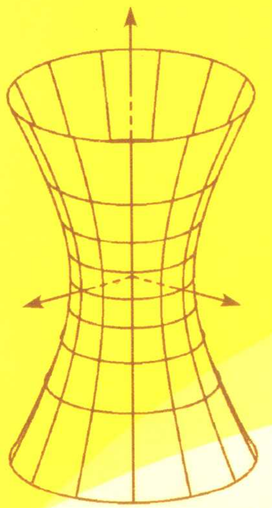
普通高等教育"十一五"国家级规划教材

高等数学

（上册）

柴 俊 丁大公 陈咸平 等 编



科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高 等 数 学

(上 册)

柴 俊 丁大公 陈咸平 等 编

华东师范大学教材建设基金资助

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书分上、下两册，上册内容包括极限，一元微积分学，空间解析几何；下册包括多元微分，重积分，线、面积分，微分方程及差分方程初步. 内容安排由浅入深，既有基本理论和方法的论述，又有应用背影的介绍；对难度较大的内容做了分阶段逐步深入的处理. 习题配备难度适中，按基本题、较难题、总练习题三种层次安排. 为便于教学，随书还配有一个基于 Maple 软件的数学实验例子和基于 Flash 软件的动态演示课件光盘.

本书适合师范院校和一般综合性大学对数学要求比较高的非数学理科专业本科生使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/柴俊等编. 一北京：科学出版社，2007
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
ISBN 978-7-03-018900-4
Ⅰ.高… Ⅱ.柴… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007) 第 060797 号

责任编辑：姚莉丽／责任校对：刘亚琦
责任印制：张克忠／封面设计：王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007 年 6 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007 年 6 月第一次印刷 印张：16 1/2
印数：1—5 000 字数：309 000

定价：22.00 元

《高等数学》参编人员

主　编　柴　俊

编　委　（以姓氏笔画为序）

丁大公　汪元培　陈咸平

赵书钦　闻人凯　夏小张

柴　俊

前 言

高等数学是非数学理工科各专业重要的数学基础课程, 对培养学生的思维能力、数学应用能力和分析判断能力有着非常重要的作用. 随着数学在各个学科专业中的应用越来越多, 高等数学教学受到的重视也在日益增加.

华东师范大学数学系在 20 世纪 80 年代编写出版过一系列的《高等数学》教材. 为了适应高等教育的迅速发展, 从 2001 年开始, 我们开始着手编写这本教材, 除了保持华东师范大学数学系在教材编写上 "体系严密、有利教学" 的优良传统外, 还积极吸取国内各类教材和国外教材的优点. 下面是本书的几个主要特点:

(1) 在内容处理上尽量符合学生思维的发展规律, 将定积分与不定积分统一处理, 尽可能反映人类认识数学的思维发展规律;

(2) 在概念处理上尽可能用直观的例子加深理解, 针对高等教育 "大众化", 各学科不断融合的趋势, 加入了数学在经济、化学中应用等例子;

(3) 增加了 "差分方程" 等内容;

(4) 习题配置由浅入深, 并为每章配置了总练习题, 帮助学生检查学习效果;

(5) 为方便教学, 随书提供一个基于 Maple 软件的数学实验例子和基于 Flash 软件的动态演示课件光盘.

本书共分上、下两册, 上册内容包括极限, 一元微分和积分, 空间解析几何; 下册内容包括多元微分, 重积分, 线、面积分, 微分方程以及差分方程初步. 建议教学时数为 160~200.

本书的编写工作由柴俊主持, 并写了主要章节的前言. 第 1、2、11 章由柴俊编写; 第 3~6、10 章由丁大公编写; 第 7 章由陈咸平编写; 第 8 章由闻人凯编写; 第 9 章由夏小张编写; 第 12、13 章由汪元培编写; 赵书钦为本书绘制了插图, 编写了 Maple 实验. 最后由柴俊对全书进行了修改, 并对全书的文字做了必要的加工.

本书的出版得到了华东师范大学教材建设基金的资助. 华东师范大学数学系对本书的编写和出版给予了大力支持, 科学出版社的编辑也付出了辛勤的劳动, 华东师范大学数学系韩士安、汪晓勤、王一令对本书的修改提出了宝贵的意见, 在此表示衷心的感谢. 同时还要感谢在本书编写和出版过程中提供过帮助的所有朋友.

尽管我们在出版前试用、修改了多次, 但难免还有缺点和疏漏之处, 恳请使用本书的教师和读者批评指正.

编　者

2006 年 10 月于华东师范大学

目录

第 1 章 基本知识 1

1.1 实数与实数集 1

1.1.1 集合 1

1.1.2 集合的运算 2

1.1.3 数集的演进 2

1.1.4 区间和邻域 3

1.1.5 实数的完备性 4

1.2 函数 6

1.2.1 函数的概念 6

1.2.2 函数的表示法 7

1.2.3 函数的一些特性 9

1.2.4 反函数与复合函数 11

1.2.5 初等函数 13

第 2 章 极限与连续 19

2.1 数列的极限 19

2.1.1 数列 19

2.1.2 数列的极限 20

2.1.3 收敛数列的性质与极限的四则运算 23

2.1.4 数列极限存在的条件 27

2.2 函数的极限 31

2.2.1 自变量趋于无穷大时函数的极限 31

2.2.2 自变量趋于有限值时函数的极限 32

2.2.3 函数极限的性质以及运算法则 35

2.2.4 两个重要的极限 38

2.3 无穷小与无穷大 41

2.3.1 无穷小 41

2.3.2 无穷大 43

2.3.3 无穷小的比较 44

2.4 连续函数 47
2.4.1 函数的连续性 47
2.4.2 间断点及其分类 50
2.4.3 连续函数的运算和初等函数的连续性 51
2.4.4 闭区间上连续函数的性质 54
*2.4.5 函数的一致连续性 56
第 2 章总练习题 59
第 3 章 导数与微分 61
3.1 导数概念 61
3.1.1 导数的定义 61
3.1.2 求导的例 63
3.1.3 导数的意义、平面曲线的切线和法线 65
3.2 求导法则 66
3.2.1 导数的四则运算 66
3.2.2 反函数的导数 68
3.2.3 复合函数的导数 69
3.2.4 基本初等函数的导数公式与求导法则 71
3.3 高阶导数 73
3.4 隐函数和由参数方程确定的函数的导数 76
3.4.1 隐函数的导数 76
3.4.2 由参数方程确定的函数的导数 78
3.4.3 相关变化率 78
3.5 微分 80
3.5.1 微分的概念 80
3.5.2 微分基本公式与运算法则 82
3.5.3 利用微分进行近似计算 84
第 3 章总练习题 87
第 4 章 微分中值定理与导数的应用 89
4.1 微分中值定理 89
4.1.1 费马 (Fermat) 定理 89
4.1.2 罗尔 (Rolle) 定理 90
4.1.3 拉格朗日 (Lagrange) 中值定理 90
4.1.4 柯西 (Cauchy) 中值定理 92
4.2 洛必达 (L'Hospital) 法则 94
4.2.1 $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限 94

4.2.2 其他类型的不定式极限 …… 95
4.3 泰勒 (Taylor) 公式 …… 98
4.3.1 泰勒公式 …… 98
4.3.2 几个初等函数的带皮亚诺余项的麦克劳林 (Maclaurin) 公式 …… 100
4.4 函数的单调性、极值和最值 …… 103
4.4.1 函数的单调性的判别法 …… 103
4.4.2 函数的极值的判别法 …… 105
4.4.3 函数的最值 …… 107
4.5 函数图形的讨论 …… 109
4.5.1 曲线的凸性与拐点 …… 109
4.5.2 曲线的渐近线 …… 111
4.5.3 函数图形的描绘 …… 113
4.6 曲率 …… 116
第 4 章总练习题 …… 120
第 5 章 积分 …… 122
5.1 定积分概念 …… 122
5.1.1 实例 …… 122
5.1.2 定积分的定义 …… 124
5.2 定积分的基本性质 …… 126
5.3 原函数和微积分学基本定理 …… 129
5.3.1 原函数 …… 129
5.3.2 积分上限的函数及其导数 …… 130
5.3.3 牛顿 - 莱布尼茨公式 …… 132
5.4 不定积分 …… 133
5.4.1 不定积分概念 …… 133
5.4.2 直接积分法 …… 134
5.4.3 不定积分的第一类换元积分法 …… 136
5.4.4 不定积分的第二类换元积分法 …… 141
5.4.5 分部积分法 …… 145
5.4.6 有理函数的积分 …… 149
5.4.7 三角函数有理式的积分 …… 152
5.4.8 简单无理函数的积分 …… 154
5.5 定积分的积分法 …… 157
5.5.1 直接利用牛顿 - 莱布尼茨公式 …… 157
5.5.2 定积分的换元积分法 …… 158

5.5.3　定积分的分部积分法 161
5.6　定积分的近似计算 163
5.6.1　矩形法 164
5.6.2　梯形法 164
5.6.3　抛物线法 166
5.7　广义积分 168
5.7.1　无限区间上的广义积分 168
5.7.2　无界函数的广义积分 170
第 5 章总练习题 172
第 6 章　定积分的应用 175
6.1　微元法 175
6.2　平面图形的面积 175
6.2.1　直角坐标系下的面积公式 175
6.2.2　极坐标系下的面积公式 178
6.3　体积 180
6.3.1　已知平行截面面积的立体的体积 180
6.3.2　旋转体体积 182
6.4　平面曲线的弧长与旋转曲面面积 184
6.4.1　平面曲线的弧长 184
6.4.2　旋转曲面面积 187
6.5　若干物理应用 189
6.5.1　物体的质量 189
6.5.2　引力 189
6.5.3　液体的压力 190
6.5.4　功 191
第 6 章总练习题 193
第 7 章　空间解析几何 194
7.1　空间直角坐标系 194
7.2　向量及其线性运算, 向量的坐标 197
7.2.1　向量的基本运算 197
7.2.2　向量的坐标　向量运算的坐标表示 198
7.3　向量的数量积、向量积 200
7.3.1　向量的数量积 200
7.3.2　向量的向量积 202
*7.3.3　向量的混合积 204

7.4 平面的方程 205
7.5 空间直线的方程 209
7.6 曲面与空间曲线 212
7.7 旋转面、柱面 214
7.7.1 旋转面 214
7.7.2 柱面 216
7.8 二次曲面 219
第 7 章总练习题 223
上册各章习题部分解答 225
附录 A 积分表 242
附录 B 常用曲线 251

第1章　基本知识

本章复习集合、实数和函数等一些基本概念，介绍一些常用的逻辑符号. 这些知识很多在中学已学过，这里作为学习大学数学的基本知识整理如下.

1.1　实数与实数集

1.1.1　集合

集合是数学的一个基本概念，是学习现代数学的基础.

集合是具有某种特征的事物或对象的全体，构成集合的事物或对象称为集合的**元素**.

世界上的事物各种各样，在数学中，并不需要知道这些事物的具体内容，只需抽象出其特征加以研究，这就是产生集合这一概念的缘由.

例如，我们可以将一个班的全体学生看成是一个集合，班里的每位学生就是这个集合的一个元素；全体自然数构成一个集合，称为自然数集，常记成 $\mathbb{N}$.

通常用大写字母 A, B, C 等表示集合，用小写字母 a，b，c 等表示集合的元素. 给定一个集合，集合中的元素就确定了，任何一个事物或者是集合中的元素，或者不是集合中的元素，只有两种情况.

如果 a 是集合 A 的元素，称 a 属于 A，记为 $a \in A$；否则就称 a 不属于 A，记为 $a \notin A$. 对于自然数集 $\mathbb{N}$，1 是 $\mathbb{N}$ 的元素，所以 $1 \in \mathbb{N}$；而 -1 不是 $\mathbb{N}$ 的元素，所以 $-1 \notin \mathbb{N}$.

集合常用列举法和描述法来表示.

列举法是将集合的元素一一列出，如自然数集就可以表示为

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}.$$

描述法是通过描述集合中元素所具有的性质来表示集合，一般表示为

$$A = \left\{ a \mid a \text{ 具有性质 } P \right\},$$

如大于根号 2 的实数可以表示为

$$A = \left\{ x \mid x > \sqrt{2} \right\}.$$

有时一个集合可以用不同的方法表示，不管用什么方法表示集合，只要集合中的元素是一样的，就表示同一个集合. 例如，集合 $\{x \mid x^2 - 1 = 0\}$ 与集合 $\{-1,\ 1\}$ 是同一个集合.

只有有限个元素的集合称为**有限集**；不含任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$；既不是有限集，又不是空集的集合称为**无限集**.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，就称集合 A 是集合 B 的一个**子集**，记为 $A \subset B$. 例如，一个班级中的女生全体是这个班级组成的集合的子集. 当 A 是 B 的子集，而 B 又是 A 的子集时，称集合 A 与 B 相等，记为 $A = B$.

1.1.2 集合的运算

设有集合 A 与 B, A 与 B 的并集记为 $A \cup B$, A 与 B 的并集中的元素是集合 A 和集合 B 的元素放在一起所组成的集合，即

$$A \cup B = \left\{ x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B \right\};$$

集合 A 与 B 的交集记为 $A \cap B$,

$$A \cap B = \left\{ x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B \right\};$$

集合 A 与 B 的差集记为 $A \backslash B$,

$$A \backslash B = \{ x \mid x \in A,\ x \notin B \}.$$

显然有

$$A \backslash B \subset A \subset A \cup B, \quad A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B.$$

集合的运算有下面的规律：

(1) $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$;

(2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

(4) $A \cup A = A, \quad A \cap A = A, \quad A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing$.

1.1.3 数集的演进

在人类的进化初期，最早认识到的是自然数，它是一个一个数出来的. 要知道，即便是最简单的自然数，也是一个高度抽象的概念，如 1 可以指一个人，也可以指一把椅子，是实物的抽象. 自然数集记为 $\mathbb{N}$，即

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}.$$

在自然数集中可以进行加法运算 (自然也能进行乘法运算)，但是要进行减法运算就会出问题，这是由于自然数集本身的原因造成的. 为了使减法能够进行，人们将自然数发展到了整数. 整数集用 $\mathbb{Z}$ 表示，即

$$\mathbb{Z} = \{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots\}.$$

自然数集有一个很好的性质，就是它的任何一个非空子集都一定有最小数，整数集就没有这个性质了，这是数系扩大的必然结果.

在整数集中, 加、减、乘法都能进行运算, 除法还是不行. 一个整数除以另一个整数不一定是整数 (除不尽), 这样就出现了有理数. 有理数就是分数, 也可以表示成有限小数, 或者无限循环小数. 特别注意, 分数和小数有着完全不同的数学含义. 人们最早认识的是分数, 就是几分之几, 意义很明确. 有理数的全体称为有理数集, 记为 $\mathbb{Q}$, 即

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\mid p,q\in\mathbb{Z};\ p,q\text{ 互质且 }q\neq 0\right\}.$$

有理数是稠密的, 即在任何两个有理数之间一定还有有理数. 理由很简单: 设 $a,b\in\mathbb{Q}$, 则 $c=(a+b)/2$ 在 a,b 之间, 且仍然是有理数. 所以有理数集不具备离散性. 从代数学的角度看, 有理数集已经是一个数域, 对加、减、乘、除运算都封闭, 尽管如此, 人们还是发现了问题, 即在有理数集中进行开方运算仍然不行, 如 $x^2=2$ 在有理数集中就没有解. 因此有理数还有 “缝隙”, 应该还存在 “无理数”. 有理数与无理数的全体组成的集合称为实数, 记为 $\mathbb{R}$.

有理数表示有限小数和无限循环小数, 而无理数则是无限不循环小数, 如 $\sqrt{2},\pi$, e 等都是无理数.

在引进了数轴后, 实数集就与数轴上的点一一对应了. 这样实数全体就不存在 “缝隙” 了, 实数集不仅对加、减、乘、除运算封闭, 对开方运算封闭, 而且以后会看到实数对极限运算也封闭. 实数的这个性质称为 “**完备性**”.

下面的讨论都在实数集中进行. 实数中的集合通常称为**数集**.

1.1.4 区间和邻域

区间是微积分中最常见的数集. 设 $a,b\in\mathbb{R}$, 是两个实数, 且 $a<b$. 如图 1.1 所示, 各类区间定义如下:

闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ (图1.1(a));

开区间 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$ (图1.1(b));

左开右闭区间 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$ (图1.1(c));

左闭右开区间 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$ (图1.1(d)).

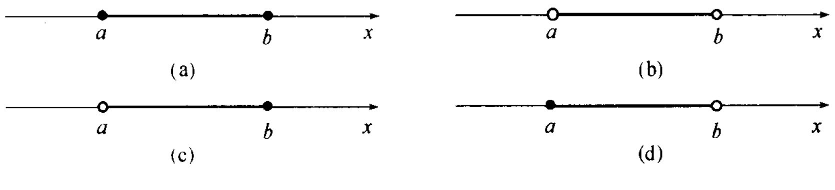


图 1.1

上面这些区间统称为有限区间, 其中 a,b 称为这些区间的端点, $b-a$ 是这几种区间的长度. 除了有限区间, 还有无限区间, 如图 1.2 所示, 无限区间的定义如下:

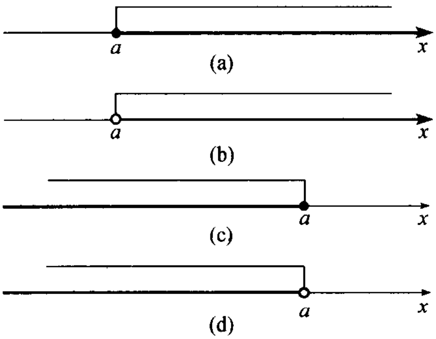


图 1.2

$[a,+\infty)=\{\,x \mid a \leqslant x<+\infty\,\}$ (图1.2(a));

$(a,+\infty)=\{\,x \mid a<x<+\infty\,\}$ (图1.2(b));

$(-\infty,a]=\{\,x \mid -\infty<x \leqslant a\,\}$ (图1.2(c));

$(-\infty,a)=\{\,x \mid -\infty<x<a\,\}$ (图1.2(d));

$(-\infty,+\infty)=\{\,x \mid -\infty<x<+\infty\,\}=\mathbb{R}$.

邻域是一种特殊的区间. 如图 1.3 所示, 设 $a,\delta \in \mathbb{R}, \delta>0$, 称数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a;\delta)$ (图 1.3(a)). a 是这个邻域的中心, δ 是邻域的半径. 于是有

$$U(a;\delta)=(a-\delta,a+\delta).$$

称数集 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 δ **去心邻域**, 记作 $U^{\circ}(a;\delta)$ (图 1.3(b)). 于是有

$$U^{\circ}(a;\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta).$$

(a)　　(b)

图 1.3

1.1.5　实数的完备性

实数没有 “缝隙”, 也就是实数是 “完备” 的. 实数的这个完备性是建立微积分理论的基础. 这里我们不讨论实数理论, 有兴趣的读者可以参阅《数学分析》上册 (华东师范大学数学系主编, 高等教育出版社出版).

但是在这里指出, 实数的完备性意味着实数集的任何一个有上界或下界的子集 E, 一定有最小的上界或最大的下界. 首先给出数集的界的定义.

定义 1.1.1　设 E 是一个非空数集, 如果存在常数 K(或 k), 使得对一切 $x \in E$, 有

$$x \leqslant K \quad (\text{或 } k \leqslant x),$$

则称数集 E 有上界 (或下界). 而实数 K(或 k) 称为数集 E 的一个上界 (或下界). 否则就称 E 没有上界 (或下界).

当数集 E 既有上界, 又有下界时, 称 E 是**有界的**. 否则就称 E **无界**.

这样, 数集 E 有界等价于存在常数 $k, K \in \mathbb{R}$, 使得对一切 $x \in E$, 有

$$k \leqslant x \leqslant K;$$

还等价于存在常数 $M>0$, 使得对一切 $x\in E$, 有

$$|x|\leqslant M,$$

这与 $E\subset[-M,\ M]$ 是一致的.

因此, 有界数集就是可以包含于一个有限闭区间中的 $\mathbb{R}$ 的子集.

如果一个数集 E 有上界, 那么它有无限多个上界. 因为任何比上界 K 大的实数都是 E 的上界. 下界也是如此. 这样就会提醒我们想这样的问题: 上界中是否会有一个最小的上界? 这对习惯在有限集中讨论问题的一年级大学生来说不太好理解, 因为有限个数可以从中挑出其中的最大数或最小数, 无限多个数很难这样做, 如从比 $\sqrt{2}$ 大的有理数中找一个最小的有理数, 能找到吗? 这就需要有上 (下) 确界的概念.

定义 1.1.2 设 E 是非空数集, 如果存在常数 $\beta\in\mathbb{R}$, 满足:

(1) β 是 E 的上界, 即对一切 $x\in E$, 有 $x\leqslant\beta$;

(2) 一切小于 β 的实数都不是 E 的上界, 即若 $\beta'<\beta$, 一定存在 $x'\in E$, 使得 $x'>\beta'$, 则称 β 是数集 E 的上确界 (即最小的上界), 记为

$$\beta=\sup E.$$

类似可以定义数集 E 的下确界, E 的下确界记为 $\eta=\inf E$. 请看几个例子.

数集 $\left\{1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots\right\}$ 最小的上界自然是 1, 比 1 小的所有数都不是上界, 而最大的下界是 0, 比 0 大的数都不可能是下界.

闭区间 $[0,1]$ 和开区间 $(0,1)$ 有相同的上确界 1 和下确界 0.

数集 $\{x|x^2<2,\ x\in\mathbb{Q}\}$ 在实数集 $\mathbb{R}$ 中有上确界$\sqrt{2}$, 下确界$-\sqrt{2}$, 而在有理数集 $\mathbb{Q}$ 中却没有, 因为无论$\sqrt{2}$ 还是$-\sqrt{2}$ 都不是有理数. 实数的这个性质称为实数的完备性. 这个性质可以叙述成下面的定理.

确界原理 非空有上界的数集一定有上确界, 非空有下界的数集一定有下确界.

习 题 1.1

1. 给出集合的表达式:

(1) 方程 $x^2-x-6=0$ 的根;

(2) 圆 $x^2+y^2=2$ 的内部的所有点.

2. 用区间表示下面的数集:

(1) $\{x\mid x^2>3\}$; (2) $\{x\mid 0<|x-3|\leqslant 2\}$.

3. 用邻域表示下面的区间或数集:

(1) $(1,\ 4)$; (2) $(a,\ b)\ (a<b)$;

(3) $\left|x-\dfrac{3}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$; (4) $0<|x-9|<2$.

4. 观察下列数集, 如果有上界或下界, 请指出其上确界或下确界:

(1) $\left\{x \mid x=\sin t,\ -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right\}$;　　(2) $\left\{0,\ \pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \cdots\right\}$;

(3) $\{x \mid x=\mathrm{e}^t,\ t \geqslant 0\}$;　　(4) $\left\{x \mid x=\frac{1}{t},\ 0<t<2\right\}$.

1.2 函　数

1.2.1 函数的概念

函数是研究变量之间关系的结果. 在自然界中有很多量, 有些量是随着时间或其他过程的变化而变化的, 称为**变量**, 变量通常用字母 x,y,z 表示; 有些量是不发生变化的, 称为**常量**, 常量通常用字母 a,b,c 表示. 各种变量之间会相互影响, 如果两个变量之间有着确定性的依赖关系, 即某个量的值可以确定另一个量的值, 就是我们要研究的函数关系.

定义 1.2.1　设有两个变量 x 与 y, 其中变量 x 在数集 D 中取值. 如果对于每个 $x \in D$, 按照某个确定的对应法则 f, 变量 y 总有唯一的值与它对应, 则称对应法则 f 是定义在数集 D 上的函数, 记作

$$f: D \to (-\infty,\ +\infty);$$

或

$$f: x \mapsto y, \qquad x \in D;$$

或

$$y=f(x), \qquad x \in D.$$

其中 x 称为函数 f 的**自变量**, y 称为函数 f 的**因变量**, D 称为函数 f 的**定义域**. 与 $x_0 \in D$ 对应的值 $y_0=f(x_0)$ 称为函数 f 在点 x_0 处的函数值, 函数值的全体可用集合 W 表示, 即

$$W=\{y \mid y=f(x), x \in D\}.$$

集合 W 称为函数 f 的**值域**.

在不需要指出定义域时, 函数可以简写为 $y=f(x)$, 并且约定, 若不特别指出函数 $y=f(x)$ 的定义域, 则这个函数的定义域就是使函数 $f(x)$ 有意义的一切 x. 如 $y=\sqrt{x}$ 的定义域就是 $\{x \mid x \geqslant 0\}$.

注 1　在定义 1.2.1 中, 我们要求对定义域中每一个 x, 只有唯一的值 y 与之对应, 这样定义的函数称为**单值函数**. 如果有不止一个 y 值与 x 对应, 就是**多值函数**. 除非有特殊说明, 本书中涉及的都是单值函数.

注 2　如果对于定义域中不同的 x, 其对应的 y 值也不同, 即当 $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$ 时, $f(x_1) \neq f(x_2)$, 我们称这类函数为**一一对应函数**, 简称一一对应.

对于定义域, 除了考虑数学表达式本身的意义外, 还应考虑函数的实际意义. 例如, 圆的面积 S 是圆的半径 r 的函数: $S=\pi r^2$, 由于圆的半径应该大于 0, 所以定

义域是 $(0,+\infty)$；一天中的气温 T 是时间 t 的函数：$T=T(t)$，一天有 24 小时，所以定义域是 $[0,24]$.

一个函数要涉及很多概念，其中定义域和对应法则是最重要的，是函数的两个要素. 因为只要有了自变量的定义域，有了关于定义域的对应法则，一个函数就被确定了.

有一种特殊的函数，无论自变量如何变化，其函数值始终取同一个常数，这类函数称为**常量函数**，如

$$y=C, \qquad x\in D.$$

例 1.2.1 试确定下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$； (2) $f(x)=\ln(1+x)+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$.

解 (1) 要使 $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$ 有意义，必须使分母不为零，即 $2x-1\neq 0$，$x\neq\dfrac{1}{2}$. 所以 $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$ 的定义域是 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\bigcup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

(2) 要使 $f(x)=\ln(1+x)+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ 有意义，必须满足

$$\begin{cases}1+x>0,\\ x^2-4>0.\end{cases}$$

由 $1+x>0$，得 $x>-1$；而由 $x^2-4>0$，得到 $x>2$ 或 $x<-2$. 所以函数 $f(x)=\ln(1+x)+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ 的定义域是 $x>2$，即 $(2,+\infty)$.

1.2.2 函数的表示法

函数有三种常用的表示法：数值法、图示法、公式法. 这三种表示法各有特点，都很重要，下面一一介绍.

数值法，也称**表格法**，是将两个变量之间的对应关系通过数值对应的形式一一列出，如我们熟知的对数表、三角函数表就是通过列表用数值对应的形式表示对数和三角函数的自变量与函数值的关系. 数值法的特点是自变量与函数值对应关系非常清楚，便于查找. 在科学实验中，两个变量之间的函数关系，通常只能通过数值方法来表示.

如气象站每隔一小时测量一次气温，如表 1.1 所示. 从表 1.1 很容易看出气温与时间的函数关系.

表 1.1 气温与时间的函数关系

时间	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00
气温 / °C	19.5	21.2	23.8	25.2	26.0	27.5	27.8	26.6	25.3	22.4